Análisis cuantitativo para la toma de decisiones

Bierman • Bonini • Hausman



• Octava edición •

Mc Graw Hill

IRWIN

Análisis cuantitativo para la toma de decisiones



Análisis cuantitativo para la toma de decisiones

Octava edición

Harold Bierman, Jr.
Cornell University

Charles P. Bonini
Stanford University

Warren H. Hausman
Stanford University

Versión en español de
Ernesto Morales Peake
México, D.F.

Con la colaboración de
Mª Josefa Peralta Estadillo
Universidad Pontificia de Comillas
ICADE
Madrid, España

McGRAW-HILL

MÉXICO · BUENOS AIRES · CARACAS · GUATEMALA · LISBOA · MADRID · NUEVA YORK
PANAMÁ · SAN JUAN · SANTAFÉ DE BOGOTÁ · SANTIAGO · SÃO PAULO
AUCKLAND • HAMBURGO • LONDRES • MILÁN • MONTREAL • NUEVA DELHI • PARÍS
SAN FRANCISCO • SINGAPUR • ST. LOUIS • SIDNEY • TOKIO • TORONTO

ANÁLISIS CUANTITATIVO PARA LA TOMA DE DECISIONES

Prohibida la reproducción total o parcial de esta obra,
por cualquier medio, sin autorización escrita del editor.

DERECHOS RESERVADOS © 1988, respecto a la primera edición en español por
McGRAW-HILL/INTERAMERICANA DE MÉXICO, S.A. de C.V.
UNA DIVISIÓN DE THE McGRAW-HILL COMPANIES, INC.
Cedro N° 512, Col Atlampa
06450 México, D.F.
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana,
Reg. Núm. 736

ISBN 970-10-1690-4
(ISBN 0-256-08267-7 octava edición. Publicado por Richard D. Irwin, Inc.)

Traducido y adaptado de la octava edición en inglés de
Quantitative Analysis for Business Decisions
Copyright © MCMXCI, by Richard D. Irwin, Inc.

Primera impresión, por Addison Wesley, 1994

1234567890 **L.I.-97** 9086543217

Impreso en México **Printed in México**

Esta obra se terminó de
imprimir en Mayo de 1997 en
Litográfica Ingramex
Centeno Núm. 162-1
Col. Granjas Esmeralda
Delegación Iztapalapa
C.P. 09810 México, D.F.

Se tiraron 4650 ejemplares

Prefacio

En esta octava edición de *Análisis cuantitativo para la toma de decisiones,* intentamos hacer cambios que sean consistentes con el objetivo que se describió en el prefacio de la primera edición: que el material sea comprensible para los lectores que no tengan amplios antecedentes matemáticos. El principio de cada capítulo presenta material de introducción más amplio y además se añadieron resúmenes de los conceptos más importantes.

Así mismo, se agregaron varios problemas nuevos. Los problemas se agrupan de la manera siguiente: problemas con respuestas, problemas, problemas más difíciles y casos. Al final del libro se encuentran las respuestas al primer grupo de problemas; con esto se presenta la oportunidad de que los estudiantes tengan retroalimentación inmediata. También efectuamos varios cambios en el libro para que la presentación fuera más clara.

Agradecemos el apoyo de Joan Hausman en el rediseño de varias de las figuras y tablas.

La lista de personas que nos han ayudado es cada vez mayor. Queremos extender nuestro agradecimiento especial a los usuarios de las ediciones anteriores que se tomaron la molestia de señalar los errores que cometimos y nos ofrecieron recomendaciones para mejorar esta edición. Se agradece mucho su ayuda.

Para la octava edición reorganizamos y reescribimos gran parte del material acerca de la programación lineal. Incluimos, después del popular capítulo acerca de la formulación de programas para la programación lineal, un capítulo nuevo que abarca la solución gráfica, la solución por computador, la interpretación de precios duales y el análisis de sensibilidad, todo ello con base en el método gráfico y en la interpretación de soluciones por computador. El método símplex se analiza en un capítulo aparte, que puede omitirse, si así se desea, sin menoscabar el conocimiento de las ventajas que presenta la programación lineal para la administración de empresas.

También modificamos considerablemente el capítulo acerca de la teoría de colas, añadiendo modelos de tiempos de servicio generales y deterministas y haciendo hincapié en los conceptos para la dirección. Agregamos un apéndice al

capítulo dedicado a la simulación, donde se muestra cómo llevar a cabo una simulación de Montecarlo en una hoja de cálculo. Eliminamos el capítulo acerca de la estadística clásica y agregamos un breve análisis de los diagramas de influencia, el análisis conjunto y la "maldición del ganador" en distintas partes del texto. Así mismo, combinamos dos de los capítulos anteriores —los relacionados con la teoría de la decisión y la modificación de probabilidades— para formar un capítulo integral.

Aunque ya no se considera que Lawrence Fouraker y Robert Jaedicke sean autores del libro, reconocemos que gran parte del material representa sus palabras y sus ideas.

Harold Bierman, Jr.
Charles P. Bonini
Warren H. Hausman

Agradecimientos

Queremos agradecer a los siguientes revisores sus valiosas recomendaciones en las ediciones más recientes. Apreciamos sus contribuciones.

Thomas Bolán, *University of Illinois*
Linda Salchenberger, *hoyóla University*
Mary Rolfes, *Mankato State University*
George Vlahos, *University of Dayton*
Peter Ellis, *Utah State University*
Mike Middleton, *University of San Francisco*
Steve Achtenhagen, *San José State University*
G. John Miltenburg, *McMaster University*
Mark Walker, *State University of New York—Stonybrook*
Tim Ireland, *Oklahoma State University*
W. E. Pinney, *University of Texas*
Prem S. Mann, *California State University—Fullerton*

Extracto del prefacio de la primera edición

La administración de una empresa moderna es una tarea de enorme complejidad. Cada vez es mayor la tendencia a utilizar técnicas y modelos cuantitativos como medio potencial para resolver muchos de los problemas que surgen en la empresa. El propósito de este libro es describir una muestra representativa de los modelos y sus técnicas cuantitativas relacionadas. Esperamos que el libro sirva como base para un curso... que sirva como eslabón entre los cursos matemáticos y los cursos de administración aplicada.

Este libro es una introducción a la aplicación de las matemáticas en los problemas empresariales; no se trata de una introducción a las matemáticas aplicadas. Hemos resumido, de manera un poco burda y simplista desde el punto de vista de un matemático, algunas de las herramientas matemáticas que se emplean. Nuestro propósito es presentar al lector nuestra notación y algunas relaciones básicas, más que enseñarle matemáticas.

Hemos intentado minimizar la cantidad de formación matemática necesaria para leer el libro. . . Los lectores que no tengan conocimiento formal de estos temas no deberán pensar que el libro está fuera de sus posibilidades.

Este libro pretende considerar técnicas que se relacionan con problemas difíciles y complejos; por esto, aunque tratamos de usar el medio de exposición más sencillo, evitando las demostraciones y gran parte del rigor característico de estos tratamientos, permanece la esencia de las técnicas. Estas propiedades sólo se pueden comprender si se aplican con paciencia durante un periodo prolongado.

Harold Bierman, Jr.
Lawrence E. Fouraker
Robert K. Jaedicke

Índice general

PARTE I Modelos y toma de decisiones, 1

1 Introducción al análisis cuantitativo, 3

Decisiones empresariales, 3
Abstracción y simplificación, 4
Construcción de modelos, 5
Soluciones, 5
Errores, 6
Técnicas para la construcción de modelos, 6
Decisiones e incertidumbre, 8
Clasificación de modelos, 9
Problemas sencillos
Problemas complejos
Problemas dinámicos Sistemas de apoyo
para las decisiones, 11
Bibliografía, 12
Problemas con respuestas, 12
Problemas, 13
Problemas más difíciles, 13

2 Introducción a la construcción de modelos, 15

Introducción, 15
Conceptos del modelo básico, 15

Variables de decisión
Variables exógenas
Políticas y restricciones
Medidas de rendimiento
Variables intermedias
El modelo y la relación entre variables, 17
Ejemplo: Modelo de un aserradero, 18
Relaciones: Diagrama de influencia
Relaciones físicas
Relaciones financieras
Análisis con el modelo, 22
Implantación del modelo en un computador, 23
Fórmulas para otros trimestres
Ejemplos de análisis con el modelo, 27
Análisis de sensibilidad
Ejemplo: Modelo *New York Tunes,* 33
Apéndice: Valor actual y futuro del dinero, 34
Bibliografía, 35
Problemas con respuestas, 35
Problemas, 36
Problemas más difíciles, 37
Caso 2-6: Super Spuds, Inc., 38
Caso 2-7: Chase Manufacturing, 40
Caso 2-8: *Gotham City Times,* 45

PARTE II Análisis de decisiones, 49

3 Conceptos básicos de probabilidad, 51

Probabilidades objetivas y subjetivas, 51
Enunciados básicos de la probabilidad, 53
Sucesos mutuamente excluyentes, 53
Sucesos independientes, 54
Sucesos dependientes, 55
Probabilidades condicional, marginal y conjunta, 56
Modificación de probabilidades, 62
Variables aleatorias, 64

Valor esperado de una variable aleatoria
Sumas de variables aleatorias
Constante multiplicada por una variable aleatoria
Varianza y desviación estándar de una variable aleatoria
Proceso de Bernoulli y distribución binotnial, 70
Distribución de probabilidad binomial, 72
Función de probabilidad binomial, 73
Bibliografía, 76
Problemas con respuestas, 76
Problemas, 78
Problemas más difíciles, 82

4 Toma de decisiones en condiciones de incertidumbre: Modificación de probabilidades, 85
Valor condicional, 85
Tabla de pérdidas, 87
Valor monetario esperado, 88
Pérdida de oportunidad esperada, 90
Utilidad esperada, 91
Beneficio esperado con pronósticos perfectos, 92
Valor esperado de la información perfecta, 93
Análisis de sensibilidad de las probabilidades subjetivas, 94
Árboles de decisión, 96
Árbol de decisión para el problema del tendero
Diagrama de influencia
Análisis del problema de decisión
Desarrollo del árbol de decisión
Modificación de probabilidades, 103
Valor de la información imperfecta, 105
Determinación de probabilidades, 108
Valor de la información del estudio, 113
Conclusión, 114
Bibliografía, 115
Problemas con respuestas, 115
Problemas, 118
Problemas más difíciles, 127
Caso 4-45: Departamento Estatal de Bosques, 133

Caso 4-46: Particular Motors, 134
Caso 4-47: Planta de montaje de automóviles, 136
Caso 4-48: Telco, 137

5 Teoría de la decisión, 140

El problema de decisión, 141
Criterios de decisión, 142
Igualmente probable
Maximax
Minimax
Probabilidad máxima
Regla de decisión del valor esperado
Dominación
Dominación en árboles de decisión
Funciones lineales, 152
Producto de variables aleatorias independientes, 153
Conclusión, 155
Bibliografía, 156
Problemas con respuestas, 156
Problemas, 157
Problemas más difíciles, 160

6 La utilidad como base para la toma de decisiones, 162

Utilidad, 163
Medida de la utilidad, 164
Hipótesis psicológicas, 165
Cambio de escala
Obtención de una función de utilidad para el dinero, 169
La forma de las funciones de utilidad
Costrucción de una función de utilidad
Utilización de funciones de utilidad, 173
Equivalentes ciertos
Primas de riesgo
Funciones de utilidad y preferencia por el riesgo, 177
Funciones de utilidad multiatributo, 180
Atributos no comparables: Dominación
Elección entre alternativas
Análisis conjunto

Resultados en riesgo, 184
Teoría de las perspectivas, 187
Bibliografía, 190
Problemas con respuestas, 190
Problemas, 192
Problemas más difíciles, 194

7 Distribución de probabilidad normal y valor de la información, 196

Distribuciones de probabilidad, 196
Funciones de masa acumulada, 198
Funciones de distribución acumulada, 199
La distribución de probabilidad normal, 201
Colas a la izquierda y a la derecha, 203
La variable normal estandarizada y tablas de probabilidad normal, 204
Probabilidades a priori normales y el valor de la información, 206
Bibliografía, 213
Problemas con respuestas, 213
Problemas, 214
Problemas más difíciles, 216

8 **Modificación de probabilidades normales por muestreo, 219**

Distribuciones de probabilidad, 220
Modificación de la distribución a priori, 223
Modificación de la desviación estándar
Distribución normal a posteriori y toma de decisiones, 226
Decisión de muestrear, 227
Situación inicial
Distribución esperada a posteriori
Valor esperado de la información de la muestra
Decisión de muestrear
Tamaño óptimo de la muestra, 232
Un ejemplo integral, 233
Conclusión, 238 Bibliografía, 238
Problemas con respuestas, 238
Problemas, 239
Problemas más difíciles, 241

9 Teoría de juegos, 244

Juegos, 244
Juegos de dos personas con suma cero, 245
Estrategias mixtas, 248
Solución gráfica, 249
Solución algebraica, 252
Solución de programación lineal
Evaluación de la estrategia minimax, 254
Juegos con suma distinta de cero, 255
Resultados inciertos, 256
Oferta competitiva: Maldición del ganador, 256
Conclusiones, 257
Bibliografía, 258
Problemas con respuestas, 258
Problemas, 259
Problemas más difíciles, 260

PARTE III Programación matemática, 263

10 Introducción a la programación lineal, 265

Formulación de problemas de programación lineal, 267
Ejemplo 1: Problema de mezcla de productos
Ejemplo 2: Problema de transporte
Ejemplo 3: Problema de mezcla
Ejemplo 4: Problema de programación de actividades
Ejemplo 5: Modelo integrado de planificación corporativa
El arte de formular modelos de programación lineal, 278
Limitaciones de la programación lineal, 281
Bibliografía, 282
Problemas con respuestas, 283
Problemas, 285
Problemas más difíciles, 291
Caso 10-28: Impala Gold Company, 298
Caso 10-29: Tienda de departamentos Racy's, 299
Caso 10-30: Daguscahonda Mines Company, 300

11 Resolución de problemas de programación lineal

Solución gráfica, 302
Análisis de sensibilidad para las restricciones, 307
Precios duales
Intervalos de variación del término independiente, 313
Análisis de sensibilidad: Evaluación de nuevos productos, 315
Análisis de sensibilidad: Coeficientes de la función objetivo, 316
Minimización, 318
Método algebraico, 320
Solución por computador de problemas de programación lineal, 324
Programación lineal en paquetes de hoja de cálculo
Programación paramétrica, 326
Apéndice: Interpretación de resultados de LINDO, 333
Bibliografía, 337
Problemas con respuestas, 337
Problemas, 338
Problemas más difíciles, 344

12 Programación lineal: *Método símplex*, 351

Formulación algebraica, 351
Método símplex, 352
Tabla del símplex
Solución inicial
Determinación de una nueva solución
Tercera solución
Revisión de optimalidad
Situaciones especiales, 370
Degeneración
Análisis de sensibilidad, 373
Interpretación económica de los valores $C_j - Z_j$
Intervalos del término independiente
Cambios en los precios
Ejemplo integral, 379
Precios duales y costos reducidos
Adición de nuevos productos
Intervalos del término independiente
Intervalos de coeficientes en la función objetivo

Apéndice. Programación lineal: El problema dual, 388
Bibliografía, 394
Problemas con respuestas, 394
Problemas, 397
Problemas más difíciles, 401

13 Programación lineal: *Temas especiales,* 404

Problema de transporte, 404
Evaluación de rutas alternativas
Soluciones enteras
Degeneración
Oferta distinta de la demanda
Soluciones por computador
Interpretaciones económicas, 410
Costos de rutas indirectas
Cambios en costos de envío
Ventajas de la ubicación
Objetivos múltiples y programación por metas, 412
Método 1: Un sólo objetivo con otros como restricciones
Método 2: Definición de compensaciones entre objetivos
Método 3: Programación por metas
Método 4: Programación por prioridades
Apéndice: Problema de transporte expresado en forma convencional de programación lineal, 419
Bibliografía, 420
Problemas con respuestas, 420
Problemas, 422
Problemas más difíciles, 425

14 Programación entera y procedimientos de ramificación y acotamiento, 429

Formulación de problemas de programación entera, 431
Problema de cargo fijo
Problema de tamaño de lote
Restricciones mutuamente excluyentes
Ejemplos de formulaciones enteras, 433
Problema de presupuesto de capital
Problema de expansión de capacidad

Tamaño y ubicación de fábricas
Solución de problemas de programación entera, 439
Algoritmo de ramificación y acotamiento
Árbol de posibilidades de solución
Solución del ejemplo por ramificación y acotamiento
Discusión
Solución por computador
Discusión
Apéndice: Procedimientos de ramificación y acotamiento para problemas combinatorios, 453
Bibliografía, 459
Problemas con respuestas, 460
Problemas, 462
Problemas más difíciles, 466
Caso 14-25: Alien Company, 470
Caso 14-26: Rodney Development Company, 472

PARTE IV Modelos deterministas y probabilísticos, 475

15 Control de inventarios con demanda constante, 477
Análisis ABC, 478
Realización de un análisis ABC
Advertencias con respecto al análisis ABC
Cantidad económica de pedido con demanda conocida, 481
Sensibilidad de los costos ante errores en Q
Descuentos por volumen, 485
Pedidos permanentes
Hipótesis de flujo continuo de un producto, 487
Sistemas de inventario justo a tiempo, 488
Rotación de inventarios
Apéndice: Tamaño del lote de producción, 491
Bibliografía, 492
Problemas con respuestas, 492
Problemas, 493
Problemas más difíciles, 494

16 Control de inventarios con reorden y demanda incierta, 497

Modelo de costo de escasez, 500
Hipótesis, 500
Modelo, 500
Punto óptimo de pedido: método marginal, 501
Cálculo de la desviación estándar de la demanda durante el tiempo de entrega (σ_M)
Costo total esperado Modelo de nivel de servicio, 507
Otras mediciones de la escasez
Sistemas justo a tiempo
Apéndice: Determinación del punto óptimo de pedido y tamaño del pedido, 509
Bibliografía, 512
Problemas con respuestas, 512
Problemas, 513
Problemas más difíciles, 514

17 Control de inventarios con incertidumbre y sin reorden, 517

Método marginal, 518
Costo de la reacción negativa, 521
Uso de una distribución continua de probabilidad, 522
Costos relevantes
Bibliografía, 525
Problemas con respuestas, 526
Problemas, 526
Problemas más difíciles, 528

18 Colas de espera: *Teoría de colas,* 532

Experiencia y colas
Modelos matemáticos de colas, 533
Modelo de colas con un solo punto de servicio, 535
Comportamiento del sistema de colas, 539
Tiempos generales de servicio: Modelo *M*/*G*/*l,* 540
Tiempos constantes de servicio: Modelo *M*/*D*/*l,* 541
El papel de la variabilidad
Puntos de servicio múltiples: Modelo *M*/*M*/*c,* 542
Instalaciones agrupadas, 547

Conclusión, 548
Apéndice 1: Proceso y distribución de Poisson, 550
Apéndice 2: Obtención de la fórmula básica de colas, 552
Bibliografía, 554
Problemas con respuestas, 554
Problemas, 555
Problemas más difíciles, 556

19 Simulación, 559

Simulación probabilística, 560
Simulación y computadores
Simulación y control de inventarios, 565
Análisis de riesgo, 567
Simulación con distribuciones continuas de probabilidad, 572
Método gráfico
Generación de variables aleatorias por computador
Simulación de sistemas complejos, 574
Apéndice 1: Método algebraico para generar variables aleatorias, 576
Apéndice 2: Simulación de Montecarlo en hojas de cálculo, 577
Bibliografía, 587
Problemas con respuestas, 587
Problemas, 588
Problemas más difíciles, 589

20 PERT: Técnica de evaluación y revisión de programas, 592

Requisitos de información
Caso I: Tiempos conocidos de actividades, 593
Diagrama de red
Ruta crítica, 594
Algoritmo para la ruta crítica
Holgura y ruta crítica
Compensaciones entre tiempo y costo, 599
Caso II: Tiempos de actividad inciertos, 603
Varias estimaciones para tiempos de actividad inciertos
Simulación de redes PERT, 607
Evaluación de PERT, 609
Bibliografía, 610
Problemas con respuestas, 610

Problemas, 611
Problemas más difíciles, 613

21 Procesos de Markov, 617

Análisis a corto plazo
Análisis de estado estacionario
Cálculo de probabilidades de estado estacionario, 622
Características de un proceso de Markov, 624
Comportamiento en estado estacionario de un proceso de Markov de dos estados, 625
Utilización de los procesos de Markov en problemas de decisión, 626
Solución de estado estacionario para problemas mayores, 630
Bibliografía, 633
Problemas con respuestas, 633
Problemas, 634
Problemas más difíciles, 635

22 Programación dinámica, 639

Conceptos básicos, 640
Formalización de la técnica de programación dinámica, 642
Principio de optimalidad, 643
Formulación y solución de problemas de programación dinámica, 654
Programación dinámica en condiciones de incertidumbre, 655
Apéndice: Uso de programación dinámica en procesos de Markov, 659
Bibliografía, 663
Problemas con respuestas, 663
Problemas, 665
Problemas más difíciles, 669

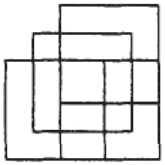
Apéndice de tablas, 673

Tabla A: Función de distribución normal estandarizada, 673
Tabla B: Función de pérdida de la distribución normal estandarizada, 674
Tabla C: Distribución binomial acumulada, 675

Solución de problemas seleccionados, 693

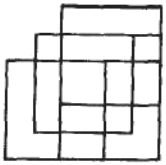
Índice, 748

PARTE I



Modelos y toma de decisiones

CAPÍTULO 1



Introducción al análisis cuantitativo

Este libro trata sobre la toma de decisiones en la empresa, proceso por medio del cual la gerencia, al enfrentarse a un problema, selecciona un curso de acción específico o "solución", de un conjunto de alternativas. Puesto que por lo general hay incertidumbre con respecto al futuro, no es posible estar seguro de las consecuencias de la decisión que se tome, y tampoco se puede asegurar que la decisión que se elija produzca los mejores resultados. Además, el problema puede ser muy complejo, ya sea porque existan muchas alternativas por considerar o un gran número de factores que deben tomarse en cuenta.

El libro presenta un método general para que puedan utilizarlo los directivos cuando se enfrenten a problemas de decisión, así como herramientas cuantitativas específicas para tipos particulares de problemas.

Decisiones empresariales

El director de una empresa quiere escoger la acción más efectiva para alcanzar las metas de la organización. Al juzgar la eficacia de las distintas decisiones posibles, hay que utilizar algún criterio o medida del rendimiento. La medida más común del rendimiento es la unidad monetaria, pero en los capítulos siguientes se verá que para ciertas decisiones estas unidades no son adecuadas para determinar las ventajas relativas de distintos cursos de acción.

El proceso general que se presenta a continuación es común para todos los tipos de situaciones de toma de decisiones:

1. Establecer el *criterio* que se usará. Por ejemplo, en una situación sencilla, el criterio puede ser elegir la acción que maximice los beneficios.
2. Seleccionar un conjunto de *alternativas* para considerarlas.

3. Determinar el *modelo* que se usará y los valores de los parámetros del proce so. Por ejemplo, se podría decidir que una expresión adecuada de los gastos totales sería:

$$\text{Gastos totales} = a + b(\text{unidades vendidas})$$

Los parámetros son *a y b* y será necesario determinar sus valores para poder utilizar el modelo.

a = Costo fijo para el periodo o proyecto
b = Costo variable (marginal) por unidad

4. Determinar cuál de las alternativas *optimiza* (es decir, produce el mejor valor para) el criterio que se estableció en el paso 1.

Ejemplo Se pueden vender al gobierno 1000 unidades de un producto, al precio de 50 dólares por unidad. ¿Deberá aceptarse el pedido? La empresa tiene exceso de capacidad.

1. Se usará el criterio de maximización de beneficios.
2. Las alternativas son (*a*) aceptar el pedido o (*b*) rechazar el pedido. De acuerdo con el criterio de beneficios, se aceptará el pedido si aumenta el beneficio o se rechazará si no lo aumenta.
3. Hay que saber cuáles son los gastos marginales o adicionales de la producción de 1000 unidades. El modelo de gastos que se aplica es:

$$E = a + 1000b$$

Suponga que se tendrán que comprar troqueles especiales con costo de 5000 dólares *(a* es igual a 5000 dólares) y que los costos variables para producir una unidad son de 30 dólares *(b* es igual a 30 dólares). Los gastos relevantes totales para satisfacer el pedido son de 35 000 dólares (equivalente a 5000 dólares más 30 000 dólares).
4. Al comparar los ingresos (50 000 dólares) y los gastos (35 000 dólares), se obtiene que debe aceptarse el pedido. El beneficio aumentará 15 000 dólares si "se acepta", en comparación con la alternativa "se rechaza".

En el ejemplo anterior se aplicaron conocimientos básicos y técnicas de cálculo sencillas. Sin embargo, al tratar con problemas más complejos, se pueden requerir otras herramientas de análisis cuantitativo, como el cálculo, la probabilidad, la estadística y la programación (lineal, entera y dinámica).

En seguida consideraremos algunos aspectos relativos a la elaboración de modelos.

Abstracción y simplificación

Los problemas del mundo real tienden a ser de complejidad enorme. Hay, literalmente, una cantidad incontable de "factores" intrínsecos en cualquier sitúa-

ción empírica. Además, cada acción potencial inicia una cadena de causa, efecto e interacción que, como es lógico, nunca termina.

Considere el problema de construir un edificio. Se podría utilizar una cantidad enorme de tiempo para recopilar información de los factores relacionados con la situación: por ejemplo, la ubicación precisa y las características físicas del edificio; un estudio detallado de las condiciones climáticas de los lugares posibles y la influencia que tendrían en los costos de construcción; las fuentes de financiación que se usarían y sus costos. El decisor puede optar por considerar específicamente y con detalle todos los usos alternativos posibles de los fondos en este periodo y los subsecuentes. Si el decisor adopta la estrategia de recopilar *todos* los hechos antes de actuar, nunca se emprenderá la acción. La mente no puede considerar todos los aspectos de un problema empírico. Hay que omitir algunos de los atributos del problema para poder tomar una decisión. El decisor debe determinar cuáles son los factores más relevantes para el problema. La abstracción y la simplificación son pasos necesarios para resolver cualquier problema humano. Nuestro objetivo es mejorar la toma de decisiones, no ofrecer un pretexto para no tomar una decisión.

Construcción de modelos

Una vez que el decisor selecciona los factores decisivos, o variables, de la situación empírica, éstos se combinan de manera lógica para que formen un *modelo* del problema real. Un *modelo* es una representación simplificada de una situación empírica. De manera ideal, elimina la complejidad abrumante de un fenómeno natural y resalta el comportamiento básico del mismo a través de unas cuantas variables que se relacionan de manera sencilla. Si es más sencillo el modelo, es mejor para la persona que toma la decisión, siempre y cuando el modelo sea un símil razonablemente confiable del problema empírico. Las ventajas de contar con un modelo sencillo son:

1. Reduce la cantidad de tiempo y esfuerzo.
2. El decisor puede comprenderlo rápidamente.
3. Si es necesario, el modelo se puede modificar de manera rápida y efectiva.

El objetivo del decisor no es construir un modelo que sea lo más parecido posible a la realidad. Se requeriría demasiado tiempo para construir este modelo y a final de cuentas podría quedar fuera de los límites de la comprensión. En cambio, se busca el modelo más sencillo que pronostique los resultados con precisión razonable y que sea consistente con la acción efectiva.

Soluciones

Después de construir el modelo, se pueden obtener conclusiones acerca de su comportamiento, por medio del análisis lógico. Quien toma la decisión basa sus

acciones o decisiones en estas conclusiones. Si es correcta la lógica utilizada para obtener las conclusiones a partir de las variables abstraídas, y si se abstrajeron las variables relevantes, entonces la solución del modelo servirá eficazmente para el problema empírico. En nuestro ejemplo, se podría decidir que una tasa de interés del 15% mide el costo de oportunidad anual del dinero de la empresa. Así, la empresa puede decidir acerca de la construcción del edificio por medio del cálculo del valor neto actual de los flujos de efectivo y no considerar con detalle las alternativas de inversión.

Errores

Dos errores importantes que ocurren al usar modelos para la toma de decisiones son la exclusión de variables importantes y las equivocaciones al definir las relaciones entre variables. Por ejemplo, en el problema relacionado con el contrato con el gobierno, suponga que se puede esperar una pérdida del 40% en la producción, por causa de especificaciones de producto muy rigurosas. Si existiera este factor y se omitiera del análisis, el modelo no representaría de manera adecuada la situación para una decisión (se obtendría la decisión equivocada).

Técnicas para la construcción de modelos

Los modelos se pueden representar de varias maneras. En el caso de problemas sencillos y repetitivos, todo el proceso de toma de decisiones puede ocurrir en la mente del decisor, quizás de manera informal e intuitiva. Todos los días caminamos, comemos y abrimos puertas sin necesidad de modelos formales. Si el problema es menos común o más complejo, pensamos un poco más acerca de él.

La técnica apropiada para describir y relacionar las variables seleccionadas depende en gran medida de la naturaleza de las variables. Si se pueden medir de alguna forma, y sobre todo si se les puede dar una representación cuantitativa, hay fuertes razones para usar una representación matemática del modelo. En primer lugar, las matemáticas poseen una disciplina rigurosa que asegura un procedimiento ordenado por parte del investigador; hay que ser específicos con respecto a las variables que se seleccionaron y a las relaciones que supuestamente existen entre ellas. En segundo lugar, las matemáticas son una técnica poderosa para relacionar variables y obtener conclusiones lógicas a partir de determinadas premisas. Al combinar las matemáticas con los computadores modernos, se pueden manejar problemas que requieren modelos de gran complejidad y es más sencillo el proceso de toma de decisiones cuando puede aplicarse el análisis cuantitativo.

Se ha representado cuantitativamente, con éxito, gran número de problemas empresariales, de donde surge el procedimiento general llamado análisis cuanti-

tativo, ciencia de la decisión, ciencia de la dirección o investigación de operaciones. Por supuesto, la representación cuantitativa y la resolución de problemas empresariales son mucho más antiguas que estas etiquetas, como lo demuestra la práctica de la contabilidad. No obstante, el análisis cuantitativo se ha extendido a otra áreas de las operaciones de la empresa y se ha establecido como una manera eficaz de atacar ciertos problemas de decisiones empresariales. Los directores actuales tienen que conocer estas técnicas y estos modelos tan bien como conocen los informes de contabilidad.

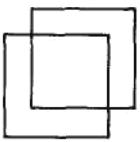
Hay que hacer una advertencia: los ejecutivos de una empresa nunca deberán ser prisioneros de un modelo cuantitativo ni aceptar automáticamente sus conclusiones como si fueran la decisión correcta. La conclusión que se obtiene de un modelo contiene cierto grado de error, debido al proceso de abstracción. Es cuestión de juicio determinar cuándo es tan grande el error que hay que modificar la conclusión antes de aceptarla como solución. La cuantificación es un auxiliar del juicio empresarial, no un sustituto. Al considerar el análisis cuantitativo de problemas empresariales, es deseable usar el mismo grado de escepticismo constructivo que se aplica a otros procesos de toma de decisiones.

Factores cualitativos. Muchas decisiones empresariales, en particular las más importantes, comprenden algunas variables que son de naturaleza cualitativa, más que cuantitativa. Por ejemplo, las decisiones importantes pueden afectar la moral o el liderazgo en una organización, o pueden alterar el empleo, las acciones positivas, la contaminación u otras áreas de responsabilidad social. Muchos de estos factores no pueden expresarse en términos monetarios; entonces, ¿cómo considera el decisor estas variables cualitativas?

Primero, hay dos actitudes externas que deben evitarse. Una es omitir los factores cualitativos, con el argumento de que los factores que no pueden medirse no son importantes. El otro extremo sería afirmar que los modelos cuantitativos no tienen valor, ya que sólo los factores cualitativos son importantes.

Un método más sensato es aceptar la idea de que el modelo cuantitativo puede tratar de manera eficaz los aspectos mensurables del problema de decisión, y que el decisor también deberá contar con un modelo intuitivo que considere las variables cualitativas. El director deberá hallar un equilibrio adecuado entre los factores cualitativos y los cuantitativos.

RESUMEN



Al tomar decisiones empresariales se debe establecer el criterio para la toma de decisiones, seleccionar las alternativas, determinar un modelo y evaluar las alternativas con base en el modelo para seleccionar la mejor.

Un modelo es una abstracción y simplificación de un problema real, que de manera ideal incorpora los elementos y las relaciones esenciales del problema real. Resolver un modelo significa obtener las conclusiones lógicas que sirvan como guía eficaz para tomar decisiones, si el modelo se diseñó y se resolvió correctamente. La toma de decisiones comprende la integración de la información cuantitativa que se obtiene del modelo y el juicio intuitivo acerca de los factores cualitativos.

Decisiones e incertidumbre

Las decisiones empresariales ocurren en dos contextos esencialmente distintos: en condiciones que se aproximan a la certidumbre y, lo más común, en condiciones de incertidumbre. El análisis cuantitativo que apoya la toma de decisiones en condiciones de certidumbre generalmente se refiere a la maximización de un objetivo (por ejemplo, el beneficio o la producción) sujeto a restricciones (por ejemplo, la capacidad productiva).

En el ejemplo del principio del capítulo se compararon las alternativas "aceptar el pedido" y "rechazar el pedido" para un contrato con el gobierno por 1000 unidades. Ésta fue una decisión en condiciones de certidumbre. Se compararon las dos alternativas y, como el beneficio era 15 000 dólares mayor al aceptar el pedido, se eligió esta alternativa.

Suponga, que se modifica ligeramente la situación anterior. Se venderá el producto a 50 dólares por unidad y, como antes, los gastos de producción de X unidades son:

$$E = a + bX$$
$$= 5000 + 30X$$

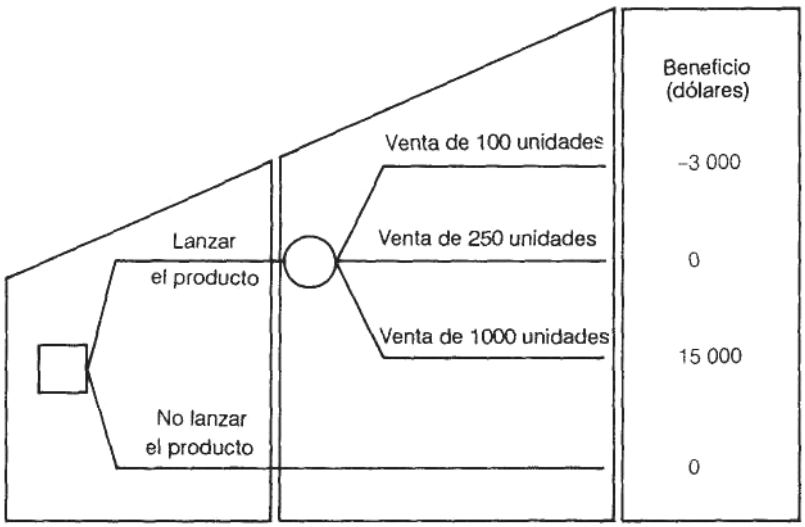
Pero ahora hay incertidumbre acerca del nivel real de las ventas. Las ventas pueden ser de 100 unidades, de 250 o de 1000, pero no se sabe con seguridad cuál será el nivel que se alcance. Las dos alternativas son: (1) lanzar el producto al mercado y aceptar los beneficios o las pérdidas que surjan, o (2) rechazar el proyecto y no obtener beneficios. Suponga que hay que aplicar los 5000 dólares de costos fijos antes de conocer la demanda real, pero que se pueden producir unidades después de conocer la demanda (no hay problemas de inventario).

La figura 1-1 ilustra un **árbol de decisión para** este **problema. Las alternativas** (lanzar al mercado o no hacerlo) se representan como ramas **que parten del nudo (o** nodo) cuadrado; y los sucesos inciertos (niveles de ventas), como **ramas que** parten del nudo circular. La figura 1-1 también contiene los beneficios **o las pérdidas** que se obtienen de cada nivel de ventas posible y que se calculan como sigue:

Ventas	*Ingresos (50 por unidad)*	*Gastos (5000 + 30 por unidad)*	*Beneficio (ingresos - gastos)*
100	5 000	8 000	-3 000
250	12 500	12 500	0
1000	50 000	35 000	15 000

Aunque se han descrito claramente las alternativas y sus consecuencias, no es obvia la decisión. La mejor alternativa depende de cuan "probable" sea cada nivel de ventas. Si se tiene la seguridad de que las ventas serán de 1000 unidades, hay que lanzar el producto al mercado. Si lo más seguro es que las ventas sólo sean

Figura 1-1 Alternativas y consecuencias de la decisión de lanzar un producto al mercado



de 100 unidades, hay que rechazar el proyecto y evitar una pérdida de 3000 dólares. Si las ventas fueran de 250 unidades, no importaría la alternativa que se eligiera, ya que los beneficios de ambas decisiones son de cero dólares.

Cuando se desconoce el estado real de la situación, el decisor tiene que actuar con **información imperfecta.** Hay varios procedimientos de toma de decisiones que tienen que ver con la información imperfecta; se analizarán algunas de las técnicas más útiles más adelante en este libro. Estas técnicas comprenden tanto el uso de probabilidades para representar el juicio acerca de la posibilidad de ocurrencia de los sucesos como los procedimientos para determinar el valor de obtener más información antes de actuar.

Clasificación de modelos

En el libro se analizarán varios tipos de modelos de decisión, los cuales se clasifican en la figura 1-2. Los modelos se clasifican como **ciertos** si se supone que se conocen los factores principales, y como **inciertos** si se desconocen algunos factores.

Problemas sencillos

Al construir el modelo para el análisis hay que simplificar todos los problemas. Si con esto se obtiene un número pequeño de factores o variables, y relativamente

Figura 1-2 Tipos de modelos

El problema de decisión es:	Las variables principales en los problemas de decisión son: Cierto	Incierto
Sencillo	Modelos de caso	Análisis de decisiones (árboles de decisión)
Complejo	Modelos de caso Programación lineal y entera	Simulación
Dinámico	Modelos de inventarios Modelos PERT (ruta crítica) Programación dinámica	Modelos de inventarios Modelos de colas Procesos de Markov Programación dinámica

pocas alternativas, se dice que el modelo es **sencillo.** Los modelos sencillos pueden ser muy útiles, incluso para problemas de decisión importantes.

Un **caso** o **modelo de situación** es un modelo de un problema de decisión que se analiza ensayando una serie de casos (posibles resultados o situaciones) con diversas alternativas o distintas hipótesis. Este modelo no se diseña para encontrar en forma directa la "mejor" solución. Más bien, el director usa el modelo en un proceso por tanteo. La mayoría de los demás tipos de modelos que aparecen en la figura 1-2 son modelos de **optimización,** donde se usan procedimientos matemáticos para encontrar la solución óptima. Los modelos de caso se describen en el capítulo 2.

Los modelos de **análisis de decisiones** incorporan la aplicación de probabilidades para tomar decisiones en condiciones inciertas. Con frecuencia comprenden el uso de árboles de decisión similares al de la figura 1-1. La parte II del libro presenta estos modelos.

Problemas complejos

Muchos problemas de decisión implican gran número de factores o de variables importantes, o pueden considerar muchas alternativas. Por ejemplo, una empresa puede tener varias plantas que producen bienes para envío a cientos de clientes. El problema de decisión de la programación de actividades de las plantas y la determinación de cuáles plantas proveerán a qué clientes, para minimizar el costo, comprende cientos de variables y restricciones y puede tener millones de soluciones posibles.

Los modelos de **programación lineal y entera** son las técnicas que más se usan para resolver los problemas empresariales grandes y complejos de este tipo.

Estos modelos utilizan técnicas matemáticas para encontrar el valor máximo (o mínimo) de un objetivo, sujeto a un conjunto de restricciones. Estas técnicas se analizan en la parte III del libro.

La **simulación** es una técnica para modelizar sistemas grandes y complejos que presentan incertidumbre. Se designa un modelo para que sea una réplica del comportamiento del sistema. Los modelos de simulación generalmente se analizan con el método de caso por caso (en vez del método de optimización). El capítulo 19 presenta los modelos de simulación.

Problemas dinámicos

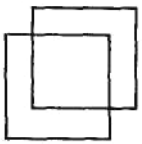
Los problemas **dinámicos** de decisión comprenden un tipo de complejidad especial: una secuencia de decisiones relacionadas que se presentan en varios periodos. La parte IV del libro incluye varios de estos tipos de modelos: modelos de **inventarios** para determinar cuándo pedir inventario y cuántas existencias se deben almacenar; modelos **PERT** o de **ruta crítica** para la programación de proyectos; modelos de **colas** para problemas que implican colas de espera; y la **programación dinámica** y los **procesos de Markov,** para problemas dinámicos más generales.

Sistemas de apoyo para las decisiones

Un *sistema de apoyo para las decisiones,* o DSS *(decision support system),* es un sistema de computación integrado, diseñado para auxiliar en la toma de decisiones para la dirección. Un DSS generalmente incluye un modelo de algunos de los tipos que se describen en este libro y el computador lleva a cabo los cálculos necesarios para resolver el modelo. No obstante, un DSS es algo más que un modelo, ya que por lo general comprende una base de datos que se puede usar para proporcionar información directamente al gerente (o al modelo). En otros casos, un DSS incluye gráficos u otros informes que puede comprender el usuario con facilidad. Así mismo, el DSS incorpora la tecnología de computación para que sea fácil efectuar el análisis necesario para el problema de decisión o para consultar la información requerida a la base de datos.

Este libro no se orienta hacia el desarrollo de las herramientas de computación necesarias para construir un DSS. No obstante, los modelos son una parte importante del DSS y la comprensión de los modelos que se describen en este libro representa un paso importante para construir un DSS. A lo largo del libro haremos referencia a *software* de computación y presentaremos ejemplos de su aplicación para ciertos modelos. Este *software* puede ser parte de un DSS.

RESUMEN



Se pueden clasificar las decisiones según se tomen con certidumbre o incertidumbre, dependiendo de que se suponga o no el conocimiento de los factores principales. La toma de decisiones en condiciones de incertidumbre implica el uso de probabilidades para expresar la verosimilitud de sucesos inciertos.

También se pueden clasificar los modelos de decisiones como sencillos (hay pocas variables de importancia), complejos (hay muchas) o dinámicos (las decisiones se relacionan entre sí en el tiempo). En el libro se describen varios tipos de modelos que corresponden a estas categorías.

Los sistemas de computación de apoyo para las decisiones (DSS) muchas veces incluyen, como uno de los componentes principales, un modelo de decisión del tipo que se presenta en este libro.

Bibliografía

Baker, K. R. y D. H. Kropp, *Management Science: An Introduction to the Use of Decision Models,* Nueva York, John Wiley & Sons, 1985.

Bodily, S., *Modern Decision Making: A Guide to Modeling with Decision Support Systems,* Nueva York, McGraw-Hill, 1985.

Bonini, C. R, *Computer Models for Decision Analysis,* Palo Alto, Calif., Scientific Press, 1980.

Buffa, E. S. y J. S. Dyer, *Management Science/Operations Research,* segunda edición, Nueva York, John Wiley & Sons, 1981.

Eppen, G. D., F. J. Gould y C. Schmidt, *Quantitative Concepts for Management,* tercera edición, Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1988.

Jackson, B. B., *Computer Models in Management,* Homewood, 111., Richard D. Irwin, 1979.

Raiffa, H., *Decision Analysis,* Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing, 1968.

Schlaifer, R., *Analysis of Decisions under Uncertainty,* Nueva York, McGraw-Hill, 1969.

Wagner, H. M., *Principles of Operations Research,* segunda edición, Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1975.

Problemas con respuestas

1-1. Remítase al ejemplo del contrato gubernamental de este capítulo. Suponga que existe una pérdida del 40% en la producción por causa de las especificaciones más rigurosas para el producto.

a. ¿Cuántas unidades tendrían que entrar al proceso de producción para obtener 1000 unidades "buenas"?

b. ¿Cuál es el costo total para obtener 1000 unidades "buenas"?

c. ¿Debe aceptarse el contrato? ¿Por qué?

1-2. La compañía de aparatos domésticos XYZ pretende sustituir un engranaje metálico con uno de plástico. El engranaje de plástico ahorrará 50 centavos por unidad, pero se requiere un gasto de 20 000 dólares para elaborar un molde especial para la producción del engranaje. El molde especial durará un año y las ventas anuales son de 80 000 unidades.

a. ¿Deberá la compañía hacer el cambio al engranaje de plástico? ¿Por qué?

b. Suponga ahora que el engranaje de plástico se relaciona con una tasa de averias un poco más alta en el primer año; específicamente, por cada 1000 unidades que se venden, habrá, en promedio, dos averías más con el engranaje de plástico que con el metálico. Las averías le cuestan 40 dólares a la compañía (costos de reparación por garantía y por reacción negativa). ¿Deberá ahora la compañía hacer el cambio al engranaje de plástico? ¿Por qué?

Problemas

1-3. La determinación del precio de un producto es una decisión empresarial muy importante. ¿Cuáles son los elementos de incertidumbre que existen en la decisión de cambiar el precio de un producto?

1-4. ¿En qué sentido existen "oponentes" cuando se establece el precio de un producto?

1-5. Una familia quiere realizar un día de campo. ¿En qué forma es un oponente la naturaleza? ¿Es razonable usar probabilidades para describir los distintos estados de la naturaleza?

1-6. Con frecuencia se describe a la maximización de beneficios como el criterio principal que debe aplicarse en la toma de decisiones empresariales. Si usted fuera el gerente de una empresa, ¿qué otros criterios usaría para tomar sus decisiones?

1-7. La compañía Crude Oil considera la posibilidad de perforar para buscar petróleo en un terreno que alquila. ¿Es razonable especificar una probabilidad de encontrar petróleo?

1-8. Piense en una decisión empresarial o personal con la que esté familiarizado. Describa esta decisión en función de: *a*. Las alternativas disponibles.

b. El criterio que usaría para seleccionar una de las alternativas.

c. Las variables importantes que deberán integrarse a un modelo que le ayude a tomar esta decisión. ¿Hasta qué punto se pueden cuantificar estas variables?

d. ¿Hasta qué punto puede cuantificar las relaciones entre las variables propuestas en (c)?

1-9. Una filosofía de dirección es "disparar primero, preguntar después". Otra filosofía lleva a "parálisis por análisis". ¿Cuál escoge usted?

1-10. Un modelo posible para los gastos totales es:

$$T = a + bX$$

donde:

T = Costos totales
a = Costos fijos
b = Costos variables
X = Número de unidades

Analice lo adecuado de este modelo para predecir el costo total relacionado con una producción determinada.

Problemas más difíciles

1-11. Un ejecutivo debe tomar una decisión acerca del precio para un producto nuevo. El objetivo es maximizar el beneficio, y las alternativas son precios posibles desde dos dólares por unidad hasta diez dólares por unidad. A continuación se describe el modelo que se usará. Sea:

x = Número de unidades producidas (y vendidas)
$C(x)$ = Costo total para producir x unidades
p = Precio que se cobrará
NP = Beneficio neto total (por maximizar)

Relación de costo: $C(x) = 800+1.25*$

Relación de ventas: $x = -100 + 2\,000/p$
Beneficio: $NP = p \cdot x - C(x)$

a. Comente acerca del modelo que escogió el gerente, en términos de lo razonable de las relaciones, las variables que se incluyeron (y las que se excluyeron) y el valor del modelo.

b. Encuentre por tanteo una solución aproximada para el modelo (es decir, pruebe distintos precios entre dos y diez dólares y trate de encontrar un precio que genere buenos beneficios).

1-12. En un aeropuerto se discute la posibilidad de instalar un complicado dispositivo de ayuda para aterrizajes. El costo equivalente anual

de este dispositivo (incluyendo todos los costos) es de 800 000 dólares por año, que no podrá recuperarse de las líneas aéreas. El dispositivo reducirá el número esperado de accidentes por año en el aeropuerto, de 1.8 a 1.7.

Los vuelos que llegan al aeropuerto transportan en promedio 40 personas (incluyendo la tripulación) y el avión tiene valor de reventa de dos millones de dólares.

a. Si se rechaza el dispositivo, ¿cuál es el valor implícito que se asigna a la vida de las personas que viajan en el avión?

b. ¿Cuánto estaría dispuesto a pagar por el dispositivo?

1-13. El gerente de producto de una fábrica de cereales intenta determinar el presupuesto para publicidad del año entrante. Cuenta con la siguiente información: el precio de venta es de cinco dólares por caja; el costo variable de manufactura es de dos dólares por caja; los costos fijos para producir el cereal ascienden a 100 000 dólares por año. El gerente ha estimado la siguiente relación entre las ventas del cereal (que se llama X y se mide en miles de cajas) y los dólares que se gastan en publicidad (a lo que se denomina Z y se mide en miles de dólares):

$$X = 50 + 1.2Z - 0.006Z^2$$

Para:

$$0 \le Z \le 100$$

a. Formule un modelo para los beneficios netos del cereal. Es decir, identifique todas las variables y relaciones necesarias para determinar los beneficios.

b. Encuentre, por tanteo, una solución óptima aproximada del modelo (o sea, pruebe algunos valores entre cero y 100 000 dólares para la publicidad y encuentre una buena solución para los beneficios).

1-14. Una compañía de computadores pretende introducir un producto nuevo, el modelo B. Algunas de sus ventas serían a costa del modelo A, uno de los productos de mayor venta de la compañía. La situación económica es la que sigue:

	Modelo A	*M* *Modelo B*
Costo fijo	$ 10 millones	$20 millones
Costo variable por unidad	$500	$300
Precio de venta al mayoreo	$1500	$1000

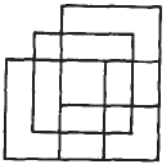
Ya se incurrió en los costos fijos del modelo A, pero no en los del modelo B. Las ventas actuales del modelo A son de 500 000 unidades por año. La introducción del modelo B daría lugar a la venta de 600 000 unidades de B por año, pero las ventas de A se reducirían a 300 000 unidades. La vida restante de ambos productos es de un año; después de este lapso, serán obsoletos. Por esto resulta apropiado un análisis de un año.

a. Formule un modelo para decidir si debe introducirse o no el modelo B en este momento. ¿Qué decisión recomendaría?

b. Suponga que no se hubiera introducido antes el modelo A (y que aún no se hubiera incurrido en su costo fijo). Formule un modelo para esta situación y decida cuáles son los productos que deben introducirse.

c. ¿Qué otros aspectos consideraría aplicables a la situación descrita en (*a*)?

CAPÍTULO 2



Introducción a la construcción de modelos

Introducción

En el capítulo 1 se presentaron los conceptos básicos de la toma de decisiones y el papel que representa un modelo en dicho proceso. El propósito de este capítulo es entrar en mayor detalle y explicar lo que es un modelo y cómo pueden los directores usar y construir cierto tipo de modelos, los modelos de caso. En secciones posteriores del libro se verán otros tipos: modelos para la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre, modelos de optimización y modelos dinámicos.

Conceptos del modelo básico

Como se explicó en el capítulo 1, un modelo es una simplificación de un problema de decisión empresarial. Esta simplificación se logra incluyendo sólo los elementos de importancia y excluyendo los aspectos que no sean esenciales. Un buen ejemplo de un modelo es un mapa de carreteras, ya que excluye la mayoría de los detalles de los terrenos, edificios, etc., para mostrar claramente los caminos. Es muy útil por ser simple. Si se incluyeran todos los detalles de la realidad, no sería tan útil, ya que pasaríamos mucho tiempo tratando de separar los caminos de otros detalles.

Así, el primer paso en la construcción de un modelo es elegir los factores o las variables que el decisor considera importantes. Estos factores se pueden clasificar en cinco categorías:

- Variables de decisión.
- Variables exógenas.
- Políticas y restricciones.

- Medidas del rendimiento.
- Variables intermedias

Variables de decisión

Las variables de decisión son aquellas que están bajo el control del decisor y representan alternativas para el director. Considere el caso de un gerente de mercadotecnia que decide acerca de la introducción de un producto nuevo. El gerente puede elegir entre introducir o no el producto; el gerente también puede elegir el precio de venta del producto y la cantidad que se invertirá en publicidad. Éstas son las elecciones más importantes; por lo tanto, son las variables de decisión.

El gerente también puede tomar algunas decisiones menores, como el color del producto, los detalles del contenido de la publicidad, cómo se le informará a la fuerza de ventas sobre el producto, etcétera. El gerente podría excluir del modelo estos factores menos importantes, para que el análisis sea más sencillo.

Variables exógenas

Las variables exógenas o externas son aquellas que tienen importancia para el problema de decisión pero están bajo el control de factores ajenos al decisor. Por lo general, las variables exógenas son las condiciones económicas, las acciones de los competidores, el precio de las materias primas y otros factores similares. En el caso del gerente de mercadotecnia que considera la introducción de un producto nuevo, la reacción de los clientes (cuánto comprarán) es ciertamente una variable exógena importante. Otras variables exógenas son el costo de las materias primas y otros elementos necesarios para fabricar el producto.

Políticas y restricciones

Con frecuencia el decisor tiene que operar con ciertas restricciones impuestas por las políticas de la compañía, con cuestiones legales y con limitaciones físicas. Por ejemplo, la capacidad disponible de la planta puede estar limitada, lo cual puede restringir las ventas posibles. Una política de la compañía puede especificar que se adquieran los materiales de ciertos proveedores o que se mantengan ciertos niveles de calidad.

En ocasiones se pueden modificar las políticas o las restricciones. Por ejemplo, la capacidad de la planta es una restricción, pero la gerencia puede optar por ampliar la planta. Esto significa que a veces puede existir confusión entre lo que se considera una variable de decisión y lo que es una restricción. No es tan importante hacer una distinción precisa entre ambas, pero la gerencia sí debe reconocer la presencia de las restricciones y tener presente que pueden modificarse, de ser necesario.

Medidas de rendimiento

Al tomar una decisión, los gerentes tienen metas u objetivos que tratan de alcanzar. Los criterios o medidas de rendimiento son expresiones cuantitativas de estos objetivos. Por ejemplo, para el gerente de mercadotecnia que toma la decisión de introducir un producto nuevo, una de las medidas de rendimiento sería el nivel de los beneficios. Otras medidas podrían ser la cuota de mercado y el rendimiento sobre inversiones.

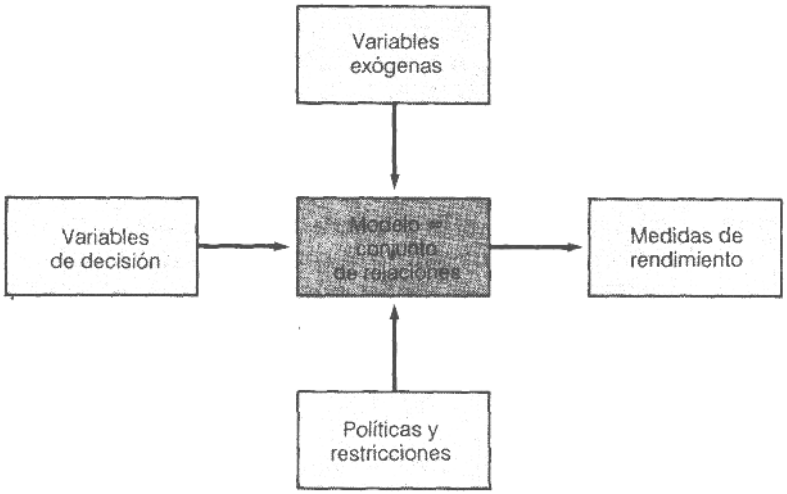
Variables intermedias

Con frecuencia se necesitan otras muchas variables para incluir todos los factores importantes para el problema de decisión. Muchas veces son variables contables relativas a los factores de costo o ingresos y que se usan para relacionar las variables de decisión y las exógenas con las medidas de rendimiento. Son variables intermedias, en el sentido de que se encuentran entre las otras variables. En el ejemplo de la decisión de un producto nuevo, una variable intermedia sería el nivel de los ingresos totales (precio por cantidad de venta); los componentes de los costos de manufactura y ventas serían otras variables intermedias.

El modelo y la relación entre variables

La figura 2-1 muestra cómo se relacionan las distintas categorías de variables. El modelo se encuentra en la parte central y las variables de decisión, las variables

Figura 2-1 Entradas y salidas del modelo



exógenas, las políticas y las restricciones son entradas al modelo, mientras que las salidas son las medidas de rendimiento. En sí, el modelo representa el conjunto de todas las relaciones entre variables. La definición de estas relaciones es el segundo paso importante en la construcción de un modelo (el primer paso, como se mencionó antes, es la definición de las variables importantes).

Algunas relaciones son definiciones contables. Por ejemplo, los beneficios son los ingresos menos los gastos, una sencilla regla de contabilidad. Otras relaciones dependen de límites físicos, como la determinación de la cantidad de producto que puede producirse a partir de un lote de materias primas. Algunas relaciones son de juicio, que representan el conocimiento del gerente acerca de la relación entre factores. Un ejemplo de este tipo de relación es el juicio del gerente con respecto a la reacción de los clientes ante un cambio en el precio.

El modelo es el conjunto de todas estas relaciones. Es algo así como una "caja negra" que transforma las variables de decisión en medidas de rendimiento para un conjunto específico de variables exógenas, políticas y restricciones.

Ejemplo: Modelo de un aserradero

Es difícil comprender estos conceptos de manera abstracta. Por esto, presentamos un ejemplo de un aserradero que corta los troncos para fabricar tablas, las cuales vende a clientes mayoristas. Aunque el ejemplo se basa en un hecho real,[1] se ha simplificado un poco para destacar los aspectos principales. Generalmente el modelo real que se use para tomar una decisión empresarial será más complejo.

Suponga que los directores del aserradero hacen sus planes para el próximo año y se enfrentan a dos decisiones: una relativa a la capacidad de la planta y otra acerca de la tarifa laboral. La decisión de capacidad de la planta implica decidir si la empresa debe ampliar el aserradero, cuánto y cuándo. Supongamos que si deciden ampliarlo ahora, entonces la capacidad adicional se puede añadir en cualquier trimestre del año entrante.

La segunda decisión tiene que ver con las negociaciones que comenzarán con el sindicato de trabajadores de la compañía. La compañía y el sindicato tienen que acordar una tarifa de pago para el próximo año; por supuesto, se trata de una decisión conjunta, el resultado del proceso de negociación.

La compañía ha preparado pronósticos de los precios de la madera que venderá el próximo año, así como proyecciones de la cantidad que podría vender (o sea, una estimación de la demanda). La compañía tiene una política de producir por pedido, de manera que no se conserva inventario de madera. En otras palabras, la compañía no puede vender más de lo que puede producir en un periodo. También se han efectuado pronósticos para el precio de los troncos, materia prima para la obtención de madera.

---

[1] Véase el caso Puyallup Forest Products en Charles P. Bonini, *Computer Models for Decision Analysis,* Palo Alto, Calif., Scientific Press, 1980, págs. 55-66.

Tabla 2-1 Factores importantes en el modelo de un aserradero

Variables de decisión

TARIFA LABORAL. Salario promedio de los empleados del aserradero (dólares por hora). CAPACIDAD ADICIONAL. Cantidad de capacidad (capacidad MPC o miles de pies cuadrados de madera) que se añade en cada trimestre.

Medida de rendimiento

BENEFICIOS. Beneficios netos que se obtienen cada trimestre y al año por la operación del aserradero (M$ p miles de dólares).

Variables exógenas

PRECIO DE LA MADERA. Precio de venta de la madera en cada trimestre (dólares por MPC).
DEMANDA. Demanda de la madera cada trimestre (MPC).
COSTO DE TRONCOS. Costo de compra de los troncos (dólares por MPT, dólares por miles de pies de tabla).
PRODUCTIVIDAD LABORAL. Producción (MPC) por hora de trabajo.

Restricciones y políticas

No hay inventarios de madera. La producción se programa para igualar las ventas. El análisis se hará por trimestres.

Variables intermedias

INGRESOS. Ingresos por la venta de madera (M$ por trimestre;.
GASTOS OPERATIVOS (DE EXPLOTACIÓN). Gastos que se relacionan directamente con la producción de la madera (gastos por suministros, materias primas y fuerza de trabajo; M$ por trimestre).
GASTOS DE SUMINISTROS. Gasto para la adquisición de suministros (M$ por trimestre).
GASTOS DE MATERIAS PRIMAS. Costo de las materias primas (troncos; M$ por trimestre).
GASTOS LABORALES. Costo de la fuerza de trabajo (M$ por trimestre).
TRONCOS REQUERIDOS. Cantidad de troncos que se necesitan para la producción (MPT por trimestre).
HORAS DE TRABAJO. Cantidad de horas de trabajo que se requieren para la producción (horas por trimestre).
PRODUCCIÓN DE MADERA. Cantidad de madera que se produce (MPC por trimestre). CAPACIDAD. Capacidad productiva real del aserradero (MPC por trimestre).
OTROS GASTOS. Total de los demás gastos, que incluyen gastos de ventas, fijos y de equipo (M$ por trimestre).
GASTOS DE VENTAS. Gastos para vender la madera (M$ por trimestre). GASTOS FIJOS. Gastos fijos (M$ por trimestre). GASTOS DE EQUIPO. Costo del alquiler del equipo (M$ por trimestre).

Para producir la madera, la compañía incurre en gastos laborales, de suministros y, por supuesto, de materias primas (troncos). Hay otros gastos que se relacionan con las ventas. La compañía alquila su equipo de producción y paga por el alquiler. También hay otros costos fijos (adicionales) en cada periodo.

La tabla 2-1 presenta una lista de los factores importantes para este ejemplo. La abreviatura MPC representa miles de pies cuadrados de superficie y es la unidad de medida de la madera. MPT denota miles de pies de tabla, la unidad para los troncos. M$ indica miles de dólares.

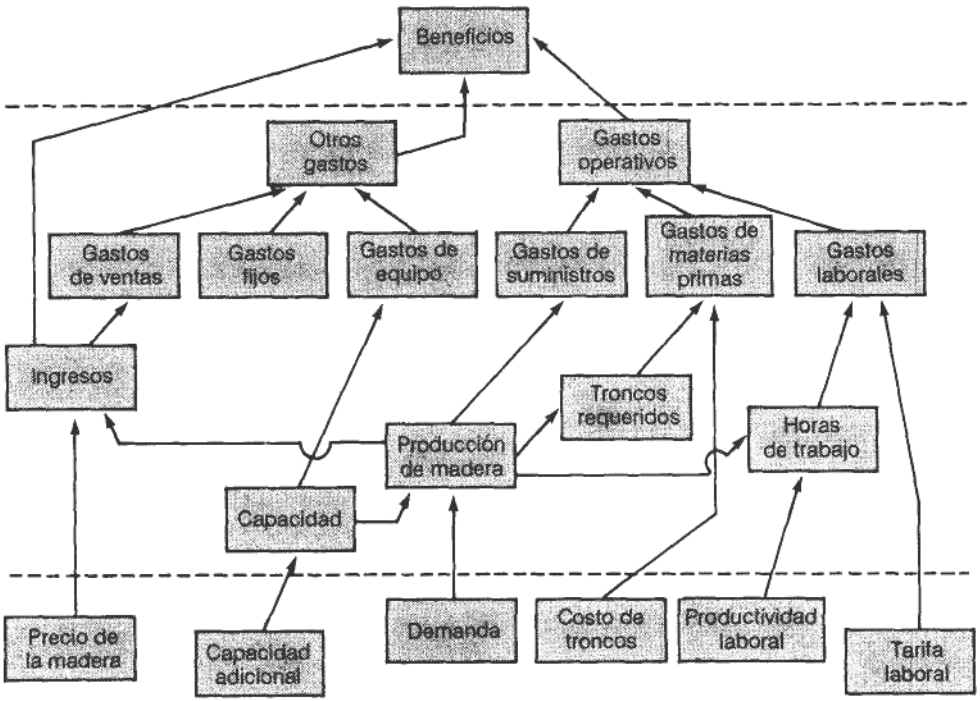
La lista de variables de la tabla 2-1 puede parecer enorme, pero al analizarla con detenimiento se verá que es bastante sencilla. Aunque se ha simplificado el ejemplo, es necesario que tenga la complejidad suficiente para ilustrar el uso de un modelo.

Relaciones: Diagrama de influencia

Ahora hay que definir las relaciones entre las variables. En ocasiones es útil dibujar un diagrama que muestre cómo se relacionan las variables o influyen en otras. Por ejemplo, la figura 2-2 es uno de estos diagramas, llamado **diagrama de influencia.** Las líneas con flechas indican qué variables se relacionan con otras. No es indispensable construir el diagrama, pero muchas veces sirve para comprender el modelo.

Observe que hay dos líneas punteadas en la figura 2-2. La única variable por encima de la línea superior es la medida del rendimiento, BENEFICIOS. Los cuadros que aparecen debajo de la línea inferior contienen las variables de decisión y las exógenas, las entradas para el modelo. Las variables y las relaciones de la parte media integran el modelo.

Figura 2-2 Diagrama de influencia para el modelo del aserradero



Ahora se puede comenzar a definir las relaciones entre variables. Comenzaremos por las relaciones físicas (las que incluyen variables físicas, no monetarias).

Relaciones físicas

```
CAPACIDAD = 9200 + CAPACIDAD ADICIONAL
```

La capacidad inicial del aserradero es de 9200 MPC por trimestre. A esto se le añade cualquier capacidad adicional que se alquile.

```
PRODUCCION DE MADERA = MÍNIMO (CAPACIDAD, DEMANDA)
```

Recuerde que la producción de madera en cualquier trimestre debe ser igual a las ventas, algo que se requiere por la política de no tener inventarios. Si la demanda es mayor que la capacidad, la empresa producirá (y venderá) hasta el límite de su capacidad. Es decir, en este caso la producción está limitada por la capacidad. Por otra parte, si la demanda es menor que la capacidad, entonces será la demanda la que limite la producción (y las ventas). Así, el límite de la producción es el valor menor (o mínimo) de la capacidad y la demanda.

```
TRONCOS REQUERIDOS = .52 * PRODUCCION DE MADERA
```

Esta relación establece que se requieren 0.52 MPT de troncos por cada MPC de madera que se produzca. La cifra 0.52 es una constante que depende de la eficiencia para producir madera a partir de las materias primas, los troncos. El asterisco * significa "multiplicado por"; es un símbolo normal que se usa en programas de computación y que se usará como tal en este capítulo.

Aquí es necesaria una pausa para explicar las constantes. Al construir un modelo, hay valores numéricos, como el coeficiente 0.52 anterior, que se estiman a partir de los costos u otros datos de la empresa. Aunque se les puede considerar como variables exógenas, tienen menor importancia y se supone en cambio que son constantes. Se espera que permanezcan fijas (constantes) durante los análisis del modelo.

```
HORAS DE TRABAJO = PRODUCCION DE MADERA/PRODUCTIVIDAD LABORAL
```

El total de horas requeridas para el trabajo depende de la producción de madera y de la productividad de la fuerza de trabajo.

Relaciones financieras

Las restantes relaciones del modelo son financieras. Lo que se presenta a continuación no son más que definiciones contables que se explican solas. En

algunos casos se requiere la división entre 1000 para hacer la conversión a miles de dólares.

```
BENEFICIOS = INGRESOS - GASTOS OPERATIVOS - OTROS GASTOS
INGRESOS = (PRODUCCI■N DE MADERA * PRECIO DE LA MADERA)  /1000
COSTO OPERATIVO =GASTOS DE MATERIALES + GASTOS DE MATERIAS
                      PRIMAS + GASTOS DE FUERZA DE TRABAJO
OTROS GASTOS =    GASTOS DE VENTAS + GASTOS DE EQUIPO
                           + GASTOS FIJOS
GASTOS DE FUERZA DE TRABAJO =   (TARIFA LABORAL * HORAS DE TRABAJO)
                                 /1000
GASTOS DE MATERIAS PRIMAS = (TRONCOS REQUERIDOS *
                                 COSTO DE TRONCOS)  /1000
```

Algunas de las relaciones sí requieren explicación:

```
GASTOS DE SUMINISTROS  =  (28  *  PRODUCCI■N DE MADERA) /1000
```

Cada MPC de madera utiliza 28 dólares en suministros durante el proceso de producción. La cifra de 28 dólares es otra constante del modelo.

```
GASTOS DE VENTAS = .10 * INGRESOS
```

Los gastos de ventas son del 10% del ingreso por ventas.

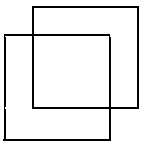
```
GASTOS FIJOS =  20
```

Los gastos fijos son de 20 000 dólares por trimestre.

```
GASTOS DE EQUIPO =  (11 * CAPACIDAD) /1000
```

Recuerde que se alquila el equipo del aserradero. Las cuotas del alquiler son de 11 dólares trimestrales por MPC de capacidad instalada.

RESUMEN



La construcción de modelos implica simplificar primero el problema de decisión, seleccionando para el estudio sólo las variables más importantes. Estas variables incluyen variables de decisión (las que están bajo el control del decisor), variables exógenas, medidas del rendimiento, políticas o restricciones, y variables intermedias. El segundo paso de la construcción del modelo es identificar las relaciones entre las variables; es decir, determinar cómo dependen entre sí las variables. El modelo es, en sí mismo, el conjunto de todas estas relaciones.

Análisis con el modelo

Ya está completo el modelo para el aserradero y ahora pasamos a la utilización del modelo por la dirección. El primer paso es hacer estimaciones de las variables exógenas. Supongamos que se preparan las estimaciones de la tabla 2-2.

Observe que son pronósticos que se basan en el juicio de la dirección, pero que pueden resultar ser incorrectos. Uno de los propósitos del modelo es aprender

Tabla 2-2 Estimaciones para las variables exógenas

Variable	*Unidad*	*Primer trimestre*	*Segundo trimestre*	*Tercer trimestre*	*Cuarto trimestre*
Precio de la madera	$/MPC	125	125	130	130
Demanda de madera	MPC	10 000	10 800	8000	10 000
Costo de troncos	$/MPT	75	75	75	80
Productividad laboral	MPC/hora	0.4	0.4	0.4	0.4

la manera en que los errores de estas estimaciones afectan a las operaciones del aserradero.

Las variables de decisión son la CAPACIDAD ADICIONAL que se añadirá y la TARIFA LABORAL que se negocie con el sindicato. Suponga que se toma como base que no se harán adiciones a la capacidad y que la tarifa es la misma del año pasado, nueve dólares por hora.

Esto nos permite completar los cálculos para el modelo, que se presentan en la tabla 2-3. Observe que en el caso base se obtienen beneficios de 387 000 dólares para el año.

Ahora hay que hacer una pausa y examinar con cuidado la tabla 2-3. Estudie las cifras, con base en las relaciones anteriores. Como ejemplo, los TRONCOS REQUERIDOS en el primer trimestre son 4784, que se calcula como 0.52 * PRODUCCIÓN DE MADERA, una de las relaciones físicas que se describieron antes. Observe que la producción de madera está limitada por la capacidad en el primero, segundo y cuarto trimestres, y por la demanda en el tercero.

Implantación del modelo en un computador

Por supuesto, se pueden hacer a mano los cálculos de la tabla 2-3, lo que tardaría de 20 a 30 minutos si no se cometen errores aritméticos. Esto sería adecuado si sólo se examinara un caso o una situación. Sin embargo, queremos examinar una serie de casos, por lo que es mejor desarrollar una versión del modelo en un computador. Hay varias maneras de hacerlo. Se podría escribir el modelo en un lenguaje de computación de propósito general, como BASIC, FORTRAN o Pascal; podría programarse en un lenguaje de planificación financiera como IFPS o EMPIRE, diseñados especialmente para este tipo de problemas; o se podría implantar en un programa de hoja de cálculo, como Lotus 1-2-3, Excel o Quattro, que existen para los computadores personales. Usaremos este procedimiento, ya que los programas de hoja de cálculo son muy comunes, fáciles de usar e ideales para el análisis de este tipo de problemas.

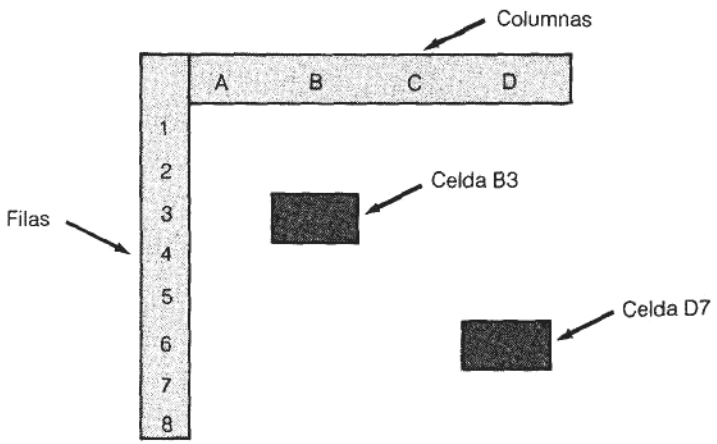
Una hoja de cálculo típica contiene filas y columnas, como se ilustra en la figura 2-3. Las filas se numeran comenzando por 1, y las columnas se indican con

Tabla 2-3 Caso base del modelo del aserradero

	Unidades	Primer trimestre	Segundo trimestre	Tercer trimestre	Cuarto trimestre	Total del año
Variables de decisión						
Capacidad adicional	MPC	0	0	0	0	
Tarifa laboral	$/hora	9.00	9.00	9.00	9.00	
Variables exógenas						
Precio de la madera	$/MPC	125	125	130	130	
Demanda de madera	MPC	10 000	10 800	8 000	10 000	
Costo de troncos	$/MPT	75	75	75	80	
Productividad laboral	MPC/hora	0.4	0.4	0.4	0.4	
Factores físicos						
Capacidad real	MPC	9 200	9 200	9 200	9 200	36 800
Producción de madera	MPC	9 200	9 200	8 000	9 200	35 600
Troncos requeridos	MPT	4 784	4 784	4 160	4 784	18 512
Horas de trabajo requeridas	horas	23 000	23 000	20 000	23 000	89 000
Factores financieros						
Ingresos	M$	1 150	1 150	1 040	1 196	4 536
Gastos de materias primas	M$	359	359	312	383	1 413
Gastos de suministros	M$	258	258	224	258	997
Gastos laborales	M$	207	207	180	207	801
Total de gastos operativos	M$	824	824	716	847	3 211
Gastos de ventas	M$	115	115	104	120	454
Gastos fijos	M$	20	20	20	20	80
Gastos de equipo	M$	101	101	101	101	404
Total de otros gastos	M$	236	236	225	241	938
Beneficios	M$	90	90	99	108	387

Nota: Las discrepancias en los totales se deben al redondeo.

Figura 2-3 Formato de una hoja de cálculo



letras,[2] iniciando con A. Una *celda* (o casilla) es la intersección de una fila y una columna, y se indica con la designación de la columna y la fila. Por ejemplo, la celda B3 es la celda de la columna B y la fila 3.

Una celda puede contener información alfanumérica como la etiqueta "Variables de decisión"; puede contener un número, como 9.00 para la tarifa laboral; y también puede contener una fórmula. Las fórmulas incluyen como variables las designaciones de las celdas; por ejemplo, si la celda D3 contiene la siguiente fórmula:

```
(B3 + C3)
```

esto indicaría que se sumaría el contenido de las celdas B3 y C3 y se almacenaría el resultado en la celda D3.

La tabla 2-4 muestra las fórmulas de hoja de cálculo para el primer periodo (trimestre) del modelo. La primera columna de la tabla 2-4, la columna A, contiene sólo las etiquetas de las variables del modelo. La segunda columna contiene las unidades de medida, que también son información alfabética. Las primeras filas de la columna C contienen valores numéricos para las variables de decisión y las variables exógenas. Las fórmulas están en la columna C, a partir de la fila 14.

La primera fórmula, en la celda C14, es:

```
9200 + C4
```

[2] Esta codificación de filas y columnas es la que se aplica en la mayoría de los programas de hoja de cálculo, pero no en todos.

Tabla 2-4 Fórmulas que se registran en la hoja de cálculo

	A	B	C
1			Primer
2		Unidades	trimestre
3	Variables de decisión		
4	Capacidad adicional	MPC	0
5	Tarifa laboral	$/hora	9.00
6			
7	Variables exógenas		
8	Precio de la madera	$/MPC	125
9	Demanda de madera	MPC	10,000
10	Costo de troncos	$/MPT	75
11	Productividad laboral	MPC/hora	0.4
12			
13	Factores físicos		
14	Capacidad real	MPC	9200+C4
15	Producción de madera	MPC	@MIN(C9,C14)
16	Troncos requeridos	MPT	0.52*C15
17	Horas de trabajo requeridas	horas	+C15/C11
18			
19	Factores financieros		
20			
21	Ingresos	M$	(C15*C8)/1000
22			
23	Gastos de materias primas	M$	(C16*C10)/1000
24	Gastos de suministros	M$	(28*C15)/1000
25	Gastos laborales	M$	(C5*C17)/1000
26			
27	Total de gastos operativos	M$	+C23+C24+C25
28			
29	Gastos de ventas	M$	0.1*C21
30	Gastos fijos	M$	20
31	Gastos de equipo	M$	(11*C14)/1000
32			
33	Total de otros gastos	M$	+C29+C30+C31
34			
35	Beneficios	M$	+C21-C27-C33
36			

Como C4 contiene la CAPACIDAD ADICIONAL, esta fórmula calcula la capacidad real como la capacidad inicial de 9200 MPC más cualquier adición. En la hoja de cálculo, es el equivalente de la relación:

```
CAPACIDAD = 9200 + CAPACIDAD ADICIONAL
```

que se obtuvo en la página 21.

De manera parecida, el contenido de la celda C5 es:

```
@MIN(C9,C14)
```

Esto equivale a la relación:

PRODUCCION DE MADERA = MÍNIMO (DEMANDA, CAPACIDAD)

Observe que la celda C9 es la demanda de madera y la celda C14 es la capacidad real. (La @ es un símbolo especial que se usa para designar funciones, como @MIN para mínimo, ©MAX para máximo, @SUM para total, etcétera).

Revise ahora las otras fórmulas de la tabla 2-4 para asegurarse de que las comprende.

Fórmulas para otros trimestres

Las fórmulas de los otros trimestres del año son semejantes, excepto que estarían en las columnas D, E y F de la hoja de cálculo. En el programa de hoja de cálculo existe un procedimiento que permite copiar o duplicar las fórmulas a otras columnas cuando son similares, como sucede en este caso.[3] Los totales del año son las sumas de los elementos de los cuatro trimestres.

En esta sección no se pretende efectuar un estudio detallado de los paquetes de hoja de cálculo, pues tienen más características que las que podríamos presentar aquí. Más bien, nuestro propósito es demostrar cómo se puede establecer un modelo de caso en formato de hoja de cálculo.

El análisis con la hoja de cálculo es bastante sencillo. Sólo hay que cambiar una o más de las variables de decisión o de las exógenas y en la pantalla del computador aparecerán los resultados casi de inmediato. También se puede modificar el modelo, cambiando las relaciones o añadiendo nuevas variables, o prolongando el modelo por más periodos. Algunos paquetes de hoja de cálculo tienen la capacidad de crear tablas de resultados y elaborar distintos tipos de gráficos con los resultados.

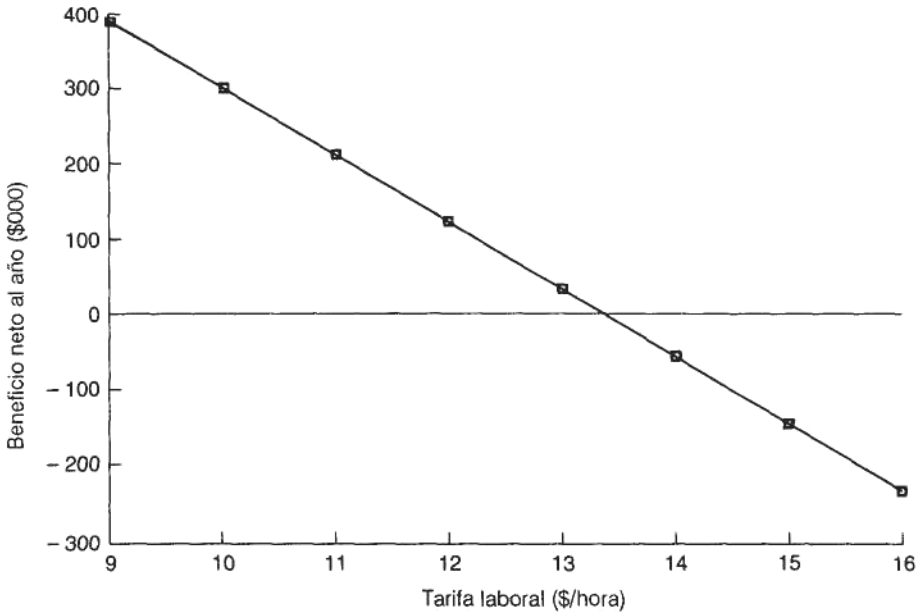
Ejemplos de análisis con el modelo

En el capítulo 1, al igual que al inicio de éste, describimos como modelo de caso el tipo de modelo que hemos construido. Este nombre proviene del tipo de análisis, que implica la revisión con el modelo de varios casos o situaciones. Cada caso utiliza distintas hipótesis acerca de las variables del modelo. A continuación presentamos algunos ejemplos de cómo podrían examinar los directores del aserradero algunos de estos casos y así utilizar el modelo que se desarrolló para responder algunas preguntas de dirección y conocer un poco más acerca de los problemas de decisión que se presentan.

---

[3] La celda C14 es la única excepción a esta afirmación de que se pueden copiar las fórmulas a otras columnas. La celda D14 debe ser (C14 + D4); o sea, CAPACIDAD (en el segundo periodo) - CAPACIDAD (en el primer periodo) + CAPACIDAD ADICIONAL del segundo periodo. Hay que registrar esta fórmula en la celda D14 y después se podría copiar (duplicar) al tercero y al cuarto periodos.

Figura 2-4 Análisis de equilibrio de la tarifa de la fuerza de trabajo



Recuerde que la dirección del aserradero tendrá negociaciones con el sindicato para establecer la tarifa laboral para el año entrante. Los directores podrían utilizar el modelo para analizar el efecto que tienen distintas tarifas en la rentabilidad. La tarifa actual es de nueve dólares por hora; en el modelo se podría registrar un aumento a 10 dólares (cambiando los valores en la fila denominada "Tarifa laboral" en la tabla 2-3). Con esto se obtienen beneficios de 298 000 dólares en el año, una reducción de 89 000 dólares. Una pregunta más interesante es: "¿Cuánto puede aumentar la tarifa laboral antes de que deje de ser rentable el aserradero?". En el modelo se usan ocho valores diferentes para TARIFA LABORAL, primero con nueve dólares por hora, luego diez, hasta llegar a 16 dólares por hora. La figura 2-4 muestra un gráfico de los resultados. Como se puede ver, el punto de equilibrio (donde el beneficio es cero) ocurre entre 13 y 14 dólares por hora, aproximadamente en 13.35 dólares.

Suponga que, como parte de las negociaciones, la gerencia pide al sindicato que cambie algunas de las reglas de trabajo para aumentar la productividad de los trabajadores. Suponga que estos cambios aumentarían la PRODUCTIVIDAD LABORAL de 0.4 MPC por hora a 0.5 MPC por hora. Si el sindicato estuviera de acuerdo en modificar estas reglas de trabajo a cambio de un aumento a once dólares por hora en la tarifa, ¿cuál sería el efecto combinado? Esta situación se presenta en la tabla 2-5, que es igual a la tabla 2-3 excepto por estos dos cambios (TARIFALABORAL es 11 y PRODUCTIVIDAD LABORAL es 0.5). Como se

Tabla 2-5 Caso de modelo del aserradero con aumentos en la productividad y la tarifa laboral

	Unidades	Primer trimestre	Segundo trimestre	Tercer trimestre	Cuarto trimestre	Total del año
Variables de decisión						
Capacidad adicional	MPC	0	0	0	0	
Tarifa laboral	$/hora	11.00	11.00	11.00	11.00	
Variables exógenas						
Precio de la madera	$/MPC	125	125	130	130	
Demanda de madera	MPC	10 000	10 800	8 000	10 000	
Costo de troncos	$/MPT	75	75	75	80	
Productividad laboral	MPC/hora	0.5	0.5	0.5	0.5	
Factores físicos						
Capacidad real	MPC	9 200	9 200	9 200	9 200	36 800
Producción de madera	MPC	9 200	9 200	8 000	9 200	35 600
Troncos requeridos	MPT	4 784	4 784	4 160	4 784	18 512
Horas de trabajo requeridas	horas	18 400	18 400	16 000	18 400	71 200
Factores financieros						
Ingresos	M$	1 150	1 150	1 040	1 196	4 536
Gastos de materias primas	M$	359	359	312	383	1 412
Gastos de suministros	M$	258	258	224	258	997
Gastos laborales	M$	202	202	176	202	783
Total de gastos operativos	M$	819	819	712	843	3 192
Gastos de ventas	M$	115	115	104	120	454
Gastos fijos	M$	20	20	20	20	80
Gastos de equipo	M$	101	101	101	101	405
Total de otros gastos	M$	236	236	225	241	938
Beneficios	M$	95	95	103	112	405

Nota: Las discrepancias en los totales se deben al redondeo.

Tabla 2-6 Resultados de la capacidad adicional agregada al caso base en el primer trimestre

Capacidad adicional (MPC)	*Beneficio anual (M$)*
0 (caso base)	387
1000	405
2000	374
3000	330

puede observar, hay un aumento neto en el beneficio anual (de 387 000 a 405 000 dólares).

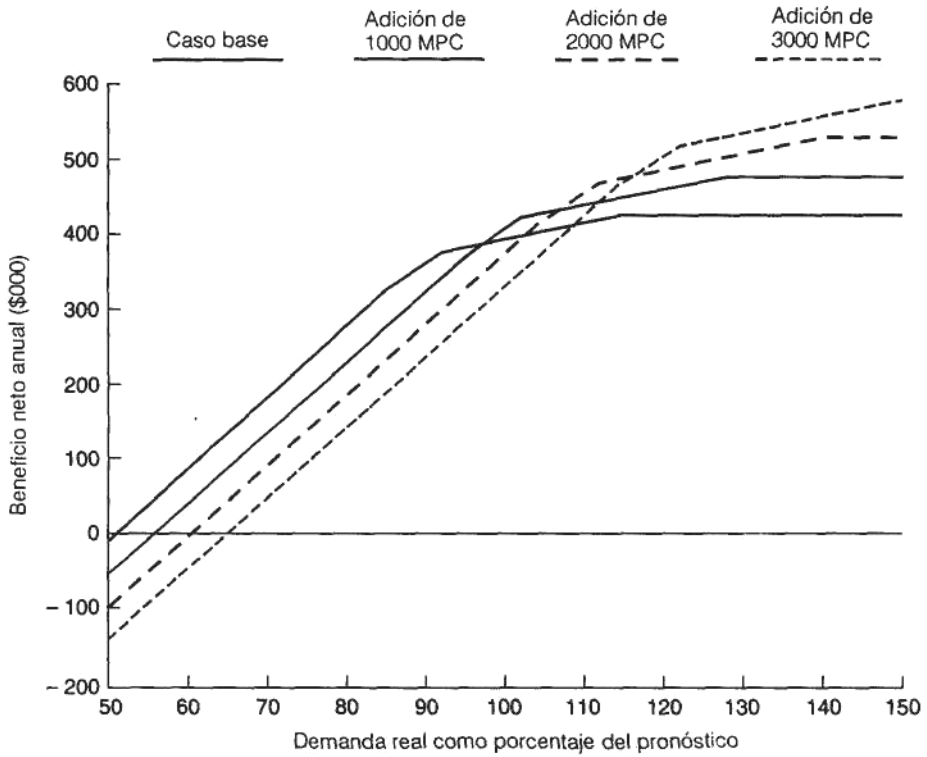
Otra decisión se relaciona con la adición de capacidad al aserradero. Se puede partir del caso base y añadir distintas capacidades en el primer trimestre. La tabla 2-6 presenta los resultados de cuatro casos, cada uno con diferente capacidad adicional. A partir de estos resultados parece que lo mejor sería agregar cerca de 1000 MPC, aunque las diferencias no son muy grandes.

La dirección también podría preguntar cómo cambiaría esta decisión de capacidad si no fueran correctos los pronósticos de la demanda de madera. En otras palabras, ¿es sensible esta decisión de capacidad con respecto a la demanda? Para verlo, supongamos que el patrón de la demanda es el mismo durante los cuatro trimestres (alto en el segundo trimestre, bajo en el tercero), pero que se considera un caso en el que la demanda total real es la mitad (50%) del pronóstico, en otro caso es 60% del pronóstico, etc., hasta 150% de lo pronosticado. En 100%, el pronóstico y lo real son iguales. Consideremos también la instalación de 1000, 2000 o 3000 MPC de capacidad adicional. Para esto hay que introducir gran número de combinaciones en el modelo y registrar los resultados; de hecho, algunos programas de hoja de cálculo tienen procedimientos para efectuar este tipo de análisis en unos cuantos pasos. El gráfico de los resultados aparece en la figura 2-5 (incluso algunas hojas de cálculo pueden generar gráficos como éste).

Antes de comentar los resultados de este análisis, hay que señalar que, por lo general, las inversiones en nueva capacidad se evaluarían en un periodo prolongado. Nosotros hemos restringido el modelo a un año para que sea sencillo y, por esto, se limitan las conclusiones que se presentan a continuación.

Observe, en la figura 2-5, que la decisión de añadir capacidad no afecta de manera considerable el beneficio anual mientras que la demanda real sea cercana al pronóstico. Es decir, las líneas de la figura 2-5 están bastante cerca cuando la demanda real está entre 100 y 110% del pronóstico. Si la dirección confía en el pronóstico de la demanda, entonces la decisión de ampliación de la capacidad no es crítica, ya que las alternativas tienen casi la misma calidad. El costo de la capacidad adicional es aproximadamente igual a los beneficios adicionales que crea dicha capacidad. Por otra parte, si la gerencia cree que la demanda real será

Figura 2-5 Efecto de los errores en las estimaciones de la demanda y de las adiciones en capacidad

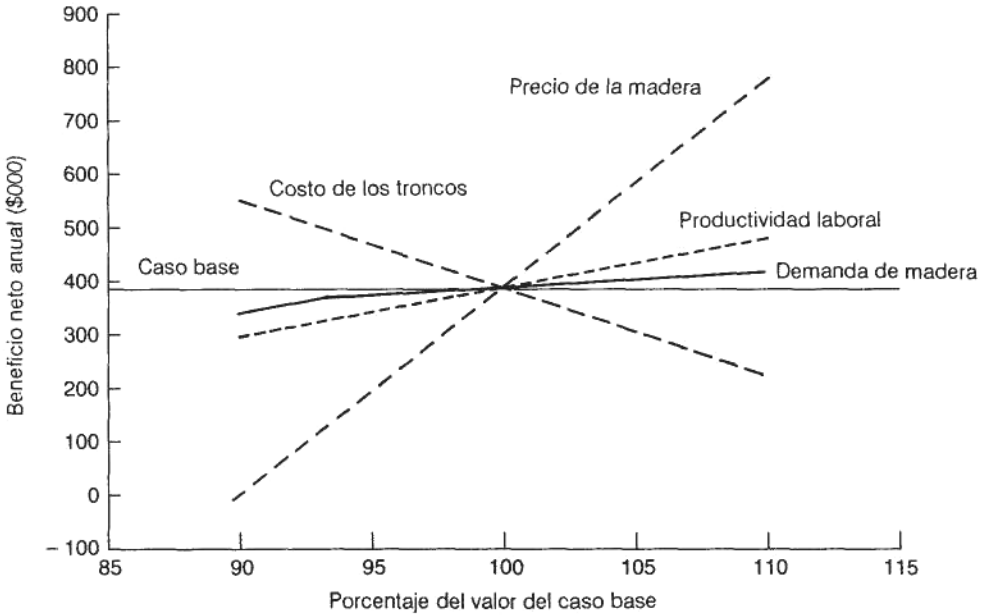


mucho mayor o mucho menor que el pronóstico, entonces la decisión de capacidad es crítica, pues hay grandes diferencias entre la mejor alternativa y la peor. Por ejemplo, en la figura 2-5, la diferencia entre la línea inferior y la superior, en los puntos del 70% y del 130%, es de más de 100 000 dólares.

El análisis no le dice a la dirección cuál es la decisión que hay que tomar, sólo indica si existe o no un problema. Si hay mucha incertidumbre acerca de la precisión de los pronósticos, la dirección puede usar técnicas de análisis de decisión como las que se describen en el capítulo 4.

Una de las ventajas principales de los programas de hoja de cálculo es que el director puede ver de inmediato la manera en que los cambios en los datos afectan a *todas* las variables que se incluyen en el modelo. Esto permite que el director, hasta cierto punto, se libere de la dependencia absoluta de una sola medida de rendimiento. En el análisis anterior se destacaron los beneficios; pero a la dirección le puede interesar el efecto de los planes que se consideran sobre otros factores: por ejemplo, cuántas horas de trabajo se requieren (y, por lo tanto, cuántos trabajadores hay que contratar) y cuánta materia prima se necesita (MPT).

Figura 2-6 Análisis de sensibilidad del modelo del aserradero (diagrama de araña)



Como se puede ver en las tablas 2-4 y 2-5, esta información está disponible y la dirección la puede considerar al tomar sus decisiones.

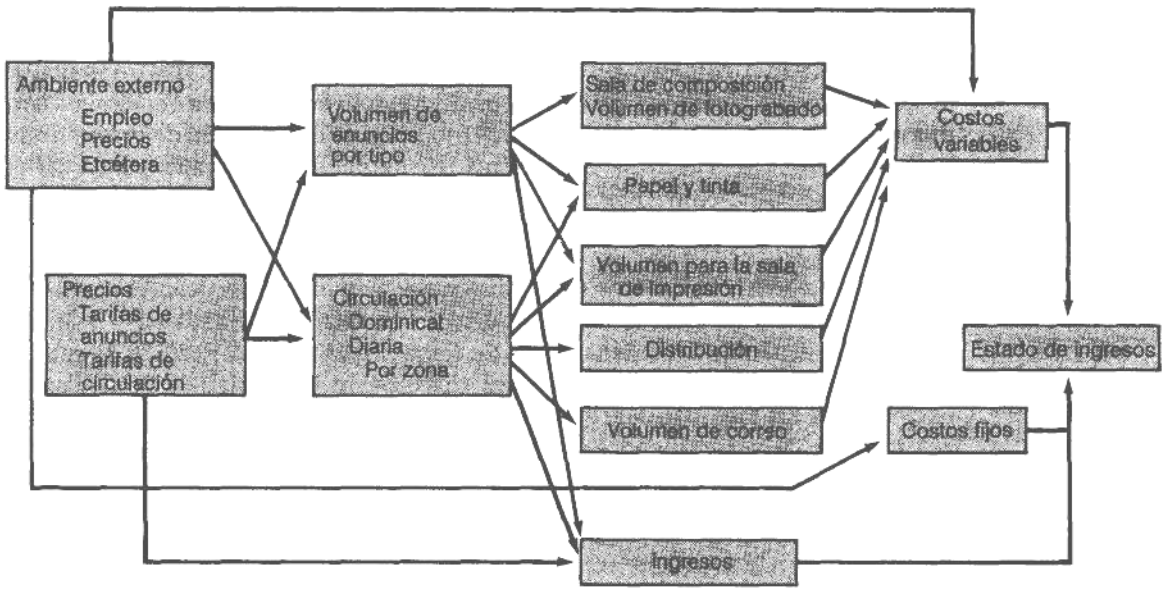
Análisis de sensibilidad

El análisis anterior es un ejemplo del análisis "qué pasa si..." o de sensibilidad. Este tipo de análisis indica lo que sucede si se hace un cambio a una de las variables exógenas o de decisión. El objetivo es ver el efecto en la medida de rendimiento (beneficio), o sea, la sensibilidad del beneficio ante los cambios. Este método permite que los directores comprendan mejor el problema al que se enfrentan. En vez de producir "la respuesta", sirven para apreciar mejor la situación.

Se puede desarrollar aún más el análisis si se contempla la sensibilidad del beneficio con respecto a cada una de las variables exógenas. Esto se hace considerando casos en los que cada una de las variables esté 10% por encima y 10% por debajo de los valores del caso base. Las variables se alteran una por una, con las demás en sus valores base. Los resultados se muestran en la figura 2-6, en lo que se denomina diagrama de araña por su parecido a una telaraña.

La inclinación de una línea en el diagrama de araña indica la sensibilidad del beneficio ante los cambios en la variable. Observe que la línea del precio de la

Figura 2-7 Modelo *New York Times*



madera es muy inclinada; esto significa que incluso los cambios pequeños en el precio tienen gran efecto en la rentabilidad. Por ejemplo, una reducción del 10% reduce a cero el beneficio. Por otra parte, es más modesto el efecto de los cambios en la demanda, en especial el de sus aumentos (en estos casos la producción está limitada por la capacidad). Una vez más, observe que son análisis uno por uno y que suponen que todos los demás factores están en los niveles del caso base. Se pueden usar cambios distintos al 10%, si se desea.

Ejemplo: Modelo *New York Times*

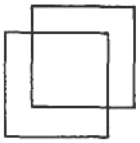
La figura 2-7 es un esquema del modelo que se desarrolló para el periódico *New York Times.*[4] Las variables exógenas, como el empleo, los precios y el producto nacional bruto, se usan para pronosticar los niveles de anuncios por tipo (por ejemplo, anuncios de automóviles, de tiendas de departamentos, etcétera) y la circulación de las ediciones diarias y dominicales por zona geográfica. Los volúmenes de anuncios y circulación se convierten en volúmenes para diversos departamentos operativos de la sala de composición y la sala de imprenta, y en necesidades de papel y tinta. Así mismo, se estiman los volúmenes de distribución

[4] Leonard Foreman," *The New York Times* Newspaper Planning Model", en *Corporate Planning Models,* Thomas H. Naylor, editor, Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing, 1979.

y correo. Las estimaciones de costos, que incluyen un margen para la inflación, se combinan con las estimaciones de volumen para producir estimaciones de los costos variables. También se incluyen los costos fijos y los ingresos, y se combinan para establecer un pronóstico de ingresos.

El modelo real contiene cerca de 400 ecuaciones y proporciona estimaciones detalladas de los ingresos y de los costos. El modelo ha estado en funcionamiento durante varios años y está integrado a los procesos de elaboración de presupuestos y planificación de *The New York Times.* El modelo se ha usado para analizar nuevos productos, como ediciones regionales especiales, y para planificar las operaciones generales.

RESUMEN



Un modelo es un conjunto de relaciones entre variables. Este capítulo presentó un tipo de modelo llamado modelo de caso. El método de análisis consiste en probar varios ejemplos o casos distintos. Específicamente, el análisis de sensibilidad examina el efecto que tienen los cambios de las variables de decisión y exógenas en las medidas del rendimiento (por ejemplo, el beneficio). El objetivo del análisis de sensibilidad es aumentar el conocimiento que tiene el decisor acerca del problema y del efecto de distintas hipótesis.

APÉNDICE Valor actual y futuro del dinero

Los modelos de caso del tipo que se describen en este capítulo con frecuencia comprenden flujos de efectivo durante varios años. Por ejemplo, la mayoría de las inversiones cuantiosas de capital generan flujos de efectivo que duran varios años. El periodo en que se recibe el dinero es un aspecto importante de su valor. Usted no debe ser indiferente ante la opción de recibir 1000 dólares ahora o mil dólares en cinco años; incluso si en este momento no necesita los mil dólares, los podría invertir y tener mucho más de mil dólares en cinco años.

Un método general para resolver los problemas que comprenden flujos de efectivo en el tiempo consiste en convertir todos los flujos en sus equivalentes de valor actual, por medio de una tasa de interés o de descuento, y de cálculos de interés compuesto.[5] El valor actual de 1000 dólares que se recibirán dentro de cinco años con tasa de descuento del 15% es:

$$\frac{1000}{(1 + 0.15)^5} = 497.18$$

Si depositan en el banco 497.18 dólares con tasa de interés del 15% (calculado anualmente), tendría mil dólares al término de cinco años. En términos generales, el valor actual de cualquier cantidad *A,* con tasa de descuento r, por recibirse en *n* años es:

$$\frac{A}{(1 + r)^n}$$

[5] Para conocer más acerca de estos procedimientos y otras técnicas para evaluar flujos de efectivo en el tiempo, véase H. Bierman y S. Smidt, *The Capital Budgetlng Decision,* séptima edición, Nueva York, Macmillan, 1980.

Si hay una serie de flujos de efectivo a lo largo de varios años, entonces el valor actual de la serie es la suma del valor actual de cada uno de los flujos. Así, el valor actual de 10 dólares que se reciben al final del año 1, más 20 dólares que se reciben al concluir el año 2, es:

$$\frac{10}{(1 + .15)^1} + \frac{20}{(1 + .15)^2} = 23.82$$

La mayoría de las hojas de cálculo tienen funciones para realizar los cálculos del valor actual. Por ejemplo, muchos programas usan para ello la función @NPV *(net present value,* valor neto actual).

Bibliografía

Bodily, S., *Modern Decision Making: A Guide to Modeling with Decision Support Systems,* Nueva York, McGraw-Hill, 1985.

Bonini, C, *Computer Models for Decision Analysis,* Palo Alto, Calif., Scientific Press, 1980.

Jackson, B. B., *Computer Models in Management,* Homewood, 111., Richard D. Irwin, 1979.

Naylor, T. H., *Corporate Planning Models,* Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing, 1979.

Plane, D. R., *Quantitative Tools for Decision Support Using IFPS,* Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing, 1986.

Problemas con respuestas

2-1. Usted acaba de fundar la compañía MÍA con el propósito de fabricar y vender su invento: KARMA, un computador personal para la gente activa. No obstante el soleado panorama que se presenta con respecto al futuro de su compañía, la gente del banco insiste en tener cifras; específicamente, quieren un documento que muestre el pronóstico de sus ingresos, de sus gastos y de los beneficios para el primer año.

Los detalles de las operaciones que usted piensa llevar a cabo son: una decisión tentativa es fijar el precio de venta de cada KARMA en 1600 dólares. Espera que los costos de manufactura sean de 300 dólares por unidad más 80 000 dólares de gastos fijos al año, y que los costos de ventas sean del 10% del importe de las ventas más 10 000 de costos fijos. Su estimación preliminar es vender 100 unidades en el primer año.

a. Identifique las variables de decisión, las variables exógenas, la medida del rendimiento, las variables intermedias y las políticas o restricciones para este problema.

b. Defina las relaciones entre las variables que identificó en (*a*).

c. Si tiene acceso a un computador con un programa de hoja de cálculo, desarrolle

```
VENTAS (UNIDADES)                    XXXXX
PRECIO                               XXXXX
COSTO VARIABLE/UNIDAD                XXXXX

          INGRESOS PROYECTADOS
            COMPAÑÍA MÍA, 1992
VENTAS (dólares)                     XXXXX
COSTO DE MANUFACTURA                 XXXXX
                                     ----
MARGEN BRUTO                         XXXXX
COSTO DE VENTAS                      XXXXX
                                     ----
BENEFICIO ANTES DE IMPUESTOS         XXXXX
                                     =====
```

allí el modelo. El formato del modelo se debe parecer al que se muestra en la página anterior; es necesario llenar los espacios *xxxxx* con números o fórmulas, según se requiera.

d. Utilice el modelo para responder las siguientes preguntas (puede responder esta parte incluso si no dispone de un computador, ya que los cálculos no son extensos). (1) ¿Cuántas unidades hay que vender para lograr el equilibrio? El punto de equilibrio es el número de unidades vendidas para el cual el beneficio es cero. Haga una estimación aproximada. (2) Suponga que puede bajar el precio a 1400 dólares y que con esta medida aumentará las ventas a 130 unidades; o que puede reducir el precio aún más, hasta 1200 dólares, y que las ventas llegarían a 150 unidades. ¿Cuál de las alternativas preferiría (de estas dos y la original)?

Problemas

2-2. Remítase al problema 2-1, la compañía MÍA. Suponga que quiere ampliar el modelo para que muestre el beneficio de cada uno de los próximos cinco años. El precio de venta inicial se establece en 1600 dólares y la estimación de ventas para el primer año es de 100 unidades, lo mismo que antes. Tampoco varían el costo de manufactura (300 dólares por unidad más costos fijos de 80 000 dólares anuales). Suponga que los costos de ventas son del 10% del importe (lo mismo que antes) pero que los costos fijos son de 70 000 dólares al año. Suponga además que las ventas de unidades aumentan un 50% cada año. En otras palabras, las ventas de 1993 son el 150% de las de 1992, las de 1994 son el 150% de las de 1993, etcétera.

a. Desarrolle un modelo para este problema.

b. Implante el modelo en un programa de hoja de cálculo.

c. Use el modelo para responder las siguientes preguntas:

(1) Con la estimación de ventas actual de 100 unidades en 1992 (con crecimiento del 50% al año), ¿cuánto tardará su compañía en mostrar beneficios positivos?

(2) Suponiendo que se mantiene la tasa de crecimiento del 50%, ¿cuántas unidades tendría que vender en el primer año para llegar al punto de equilibrio en el segundo? ¿Cuántas unidades tendría que vender en el primer año para alcanzar el punto de equilibrio en el mismo año?

(3) Suponga que puede diseñar el computador KARMA para que pueda extenderse con facilidad al surgir nuevos dispositivos. Esta acción aumentaría el costo de manufactura a 500 dólares por unidad. Sin embargo, la tasa de crecimiento en ventas sería del 100% al año (es decir, cada año se duplicaría el número de unidades vendidas). ¿Es preferible esta alternativa?

2-3. En el caso del problema 2-2, se añadirán algunas complicaciones. Suponga que un estudio de mercado ha estimado que la relación entre el precio del KARMA y las ventas del primer año es:

$$\text{Unidades vendidas} = 300 - 0.125 \cdot \text{Precio}$$

para los precios entre 500 y 2000 dólares. Usted puede establecer el precio, pero las ventas del primer año están determinadas por esta función. Como antes, las ventas de las unidades aumentarán 50% cada año a partir del primero.

Suponga también que si las ventas exceden 200 unidades, introducirá un equipo automatizado que reducirá el costo de manufactura de 500 a 250 dólares por unidad. Sin embargo, el costo fijo de manufactura ascenderá de

80 000 a 90 000 dólares anuales. Trate de incorporar esta situación al modelo para que se produzca automáticamente cuando las ventas sobrepasen las 200 unidades; para ello puede usar las funciones @IF y @MIN de la hoja de cálculo.

a. Incorpore los cambios a su modelo de ho ja de cálculo para la compañía MÍA.

b. Utilice el modelo para encontrar el precio que genere mayor el beneficio total (la su ma de los cinco años). Opcional: Si está familiarizado con el concepto de valor ne to actual, puede calcular el valor de los be neficios de los cinco años (utilice una tasa de descuento del 15%) y encontrar el pre cio que maximice este valor.

2-4. El alcalde de la ciudad de Suburbia evalúa distintos niveles de gastos para protección policiaca y detecta que el tiempo de respuesta promedio (en minutos) a las llamadas de emergencia se relaciona inversamente con el presupuesto anual del departamento de policía de Suburbia. La relación específica es:

$$R = \frac{50}{C}$$

donde R = tiempo de respuesta promedio en minutos y C = presupuesto anual de la policía en millones de dólares.

Los ciudadanos de Suburbia evalúan el beneficio de la respuesta policíaca ante emergencias de la siguiente manera:

$$B = \$100\text{-}\$10R$$

donde B = beneficio en dólares. De esta manera, un tiempo de respuesta de 10 minutos produce beneficio cero y un tiempo mayor generará beneficios negativos.

En Suburbia hay 500 000 llamadas de emergencia cada año.

a. Desarrolle un modelo de hoja de cálculo para este problema, suponiendo que la medida de rendimiento es el beneficio total menos el costo total. Evalúe alternativas presupuestarias para el departamento de policía, de 5, 10, 15 y 20 millones de dólares. ¿Cuál de éstas preferiría?

b. Suponga ahora que el criterio es la relación del beneficio total dividido entre el costo total. Con los mismos presupuestos, ¿cuál sería el mejor?

Problemas más difíciles

2-5. Usted piensa comprar un edificio de apartamentos que contiene 25 unidades y se vende en 300 000 dólares. Su idea es conservar el edificio durante tres años y luego venderlo.

Usted averigua que los impuestos sobre la propiedad son de 6000 dólares por año, y que la administración y el mantenimiento de los apartamentos costará cerca de 300 dólares por unidad. Se espera que los impuestos aumenten un 2% cada año y que los costos de mantenimiento lo hagan en un 15% cada año.

Aún no decide de cuánto será el alquiler. En este momento el alquiler es de 300 dólares mensuales por unidad, pero el índice de rotación es muy elevado y la tasa de ocupación es sólo del 75%. En otras palabras, en promedio, 75% de las unidades están alquiladas en cualquier instante. Usted estima que si redujera el alquiler a 220 dólares por unidad tendría el 100% de ocupación; una tarifa intermedia para el alquiler daría lugar a una tasa de ocupación intermedia (suponga una relación lineal: tasa de ocupación = 168.75 - 0.3125 • tarifa de alquiler). Por ejemplo, con una tarifa de alquiler de 260 dólares tendría una tasa de ocupación del 87.5%. Usted decide fijar la tarifa de alquiler en el primer año y aumentarla 10% en el segundo y el tercer años. La tasa de ocupación que exista en el primer año será la misma para los años 2 y 3. Por ejemplo, si opta por la tarifa de 220 dólares para el primer año, la ocupación será del 100% en los tres años.

Usted venderá el edificio de apartamentos al término del trienio. La cantidad que espera recibir será un múltiplo de los ingresos por al-

Costo de compra	xxxx
Tarifa de alquiler inicial	xxxx
Tasa de ocupación	xxxx
Costo de mantenimiento por unidad	xxxx
Impuestos	xxxx
Múltiplo de venta	xxxx

	Año 0	Año 1	Año 2	Año 3
Tarifa de alquiler		xxxx	xxxx	xxxx
Ingresos por alquiler		xxxx	xxxx	xxxx
Gastos:				
Mantenimiento		xxxx	xxxx	xxxx
Impuestos		xxxx	xxxx	xxxx
Total		xxxx	xxxx	xxxx
Flujo de efectivo operativo		xxxx	xxxx	xxxx
Costo de compra	xxxx			
Ingresos por venta				xxxx
Flujo de efectivo neto	xxxx	xxxx	xxxx	xxxx
Flujo de efectivo total				xxxx
(Valor actual)				[xxxx]

quiler (antes de gastos) que existan en ese momento. Su estimación es que el múltiplo será 5.0; es decir, si los ingresos por alquiler en el tercer año son de 75 000 dólares, entonces el precio de venta será de 375 000 dólares.

Su objetivo es obtener el mayor flujo total de efectivo en el periodo de tres años. El flujo de efectivo para un año es la diferencia entre los ingresos por alquiler y los gastos. El flujo de efectivo total incluye el de cada uno de los tres años, más el dinero que se obtenga de la venta de la propiedad, menos su precio de compra. Opcional: Utilice como objetivo el valor neto actual, con tasa de descuento del 15%. *Nota:* Para este ejercicio omita la depreciación y otros aspectos relacionados con impuestos.

a. Identifique las variables de decisión, las variables exógenas, la medida del rendimiento, las variables intermedias y las políticas y restricciones de este problema.

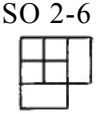
b. Construya un modelo a partir de la definición de las variables que identificó en *(a)*.

c. Implante el modelo en un programa de hoja de cálculo. Si lo desea, puede usar el formato que se propone arriba. Las x indican que en ese lugar existe un número o una fórmula. La última línea sólo es aplicable si utiliza como objetivo el valor neto actual.

d. Utilice el modelo para encontrar la tarifa de alquiler inicial que obtiene el mayor flujo de efectivo total (o el mayor valor neto actual).

e. Estudie la sensibilidad del flujo de efectivo total (o del valor actual) con respecto a las siguientes variables: costo de mantenimiento por unidad, impuestos anuales y múltiplo de venta. Hágalo desarrollando casos en los que varíe cada factor, uno por uno, el 10% más y el 10% menos que las cantidades del caso base que se proporcionaron en la descripción anterior. Para este análisis use la tarifa de alquiler que determinó en *(d)* y elabore un diagrama de araña para los resultados. ¿Para qué factor es más sensible el flujo de efectivo total (o el valor actual)?

CASO 2-6



Super Spuds, Inc. (SSI), compra patatas a los agricultores y las deshidrata para producir hojuelas que se venden a una empresa procesadora de alimentos. En

primavera la compañía se enfrenta a dos decisiones. La primera implica determinar qué cantidad de sus necesidades totales de patatas comprará a los agricultores que formalicen un contrato de pretemporada. Con base en este contrato, las patatas se compran antes de que se siembren y se garantiza un precio específico para el agricultor, que en este caso es de dos dólares por quintal. El resto de las patatas se compra en otoño, en el mercado libre, al precio vigente en ese momento.

La segunda decisión tiene que ver con el precio que se cobrará a la empresa procesadora que compra las hojuelas de patata de SSI. Esta decisión se toma en negociaciones con la procesadora y también implica la cantidad de hojuelas que la procesadora ordenará en el año. Durante la preparación para las negociaciones, SSI ha estimado que si ellos insisten en el precio del año anterior, 33 dólares por quintal de hojuelas, es probable que la procesadora pida 800 000 quintales. Se puede negociar un precio mayor o menor de los 33 dólares, pero el efecto será que la procesadora compre menos de 800 000 quintales (si el precio es mayor) o más (si es menor). Los directores de SSI han expresado su opinión con respecto a la relación entre el precio que se negocie y el volumen de hojuelas que se pediría, como sigue:

```
HOJUELAS PEDIDAS (miles de quintales) = 7400 - 200 * PRECIO
                                                DE LAS HOJUELAS
```

Se requieren seis kilogramos de patatas para producir un kilogramo de hojuelas. El costo variable de la deshidratación de las patatas es de 13 dólares por quintal de hojuelas, si el volumen es menor de 750 000 quintales, y de 16 dólares si es mayor de 750 000 quintales. Los costos fijos son de cuatro millones de dólares por año.

El costo de las materias primas (patatas de calidad para proceso) depende, por supuesto, de la decisión de cuánto comprar con los contratos de pretemporada. En años anteriores SSI ha comprado la mitad de sus necesidades con este tipo de contrato; sin embargo, la dirección de SSI pretende cambiar el proceso y comprar mayor o menor parte de sus necesidades con los contratos de pretemporada. El costo de compra de las patatas con los contratos de pretemporada es de dos dólares por quintal, mientras que se desconoce el costo de compra en el mercado libre. La dirección opina que el precio puede estar entre uno y tres dólares por quintal.

La cantidad de beneficios de SSI se obtiene restando, al ingreso por la venta de las hojuelas de patatas a la procesadora, los costos de deshidratación de las patatas, el costo de compra (pretemporada y mercado libre) y los costos fijos.

a. Desarrolle un modelo para ayudar a SSI a tomar las dos decisiones que se indican. Identifique las variables de decisión, las variables exógenas, las medidas del rendimiento, las variables intermedias y las políticas y restricciones. Luego defina las relaciones entre las variables.

b. Implante el modelo en un computador con un programa de hoja de cálculo.

c. Suponga que la dirección de SSI continuará con su política de contratos de pretemporada por la mitad de sus requisitos de patatas, y que el pronóstico del precio de las patatas en el mercado libre es de dos dólares por quintal (el mismo precio que en el contrato de pretemporada). Calcule el beneficio de SSI

para una serie de casos en los cuales el precio de las hojuelas varíe entre 31 y 34 dólares, con incrementos de 50 centavos (es decir, 31 dólares, 31.50, 32, 32.50, etcétera). ¿Con qué precio se obtienen mayores beneficios? ¿Qué sensibilidad presenta el beneficio frente a diferencias de precios entre 32 y 33 dólares?

d. Suponga que el precio de las hojuelas de patata es de 33 dólares por quintal. Considere la tabla que se presenta a continuación y complétela ensayando una serie de casos y calculando el beneficio con los distintos valores del precio de las patatas en el mercado libre y las diferentes políticas acerca de la porción de las necesidades de patatas que se compran con contrato de pretemporada. ¿Cuál de las alternativas es la más "conservadora". *Nota:* Dejaremos para el capítulo 4 el análisis de la forma en que los directores deben escoger la acción indicada en un problema de este tipo.

Porcentaje de patatas que se obtienen con contrato de pretemporada	*Precio de las patatas en el mercado libre*		
	$1/quintal	*$2/quintal*	*$3/quintal*
25%	xxxx	xxxx	xxxx
50	xxxx	xxxx	xxxx
75	xxxx	xxxx	xxxx

CASO 2-7[6]



Chase Manufacturing fabrica pequeños aparatos eléctricos y artículos para el hogar. Tiene una planta en Decatur, Indiana, y oficinas de ventas en Chicago. Los productos se venden con distintas marcas a través de los representantes del fabricante, que atienden a distribuidores de artículos eléctricos, ferreterías y tiendas especializadas en artículos para el hogar.

El departamento de investigaciones de Chase ha desarrollado un producto nuevo: un descorchador de botellas de vino con características especiales. Se espera que el producto resulte atractivo como regalo barato, especialmente en la temporada navideña.

El comité ejecutivo de Chase se reúne para considerar el nuevo producto. Jane Boxer, gerente de mercadotecnia, inicia la discusión.

Boxer: Creo que este descorchador será un éxito. Aunque hay infinidad de modelos en el mercado, el nuestro tiene las características exclusivas que le permitirán ser un éxito en el mercado navideño. Es el regalo ideal para quien lo tiene todo.

Nuestro plan es venderlo a través de nuestros canales normales y darle mucho empuje este año, ya que el año entrante habrá pasado la novedad y es probable que lo descartemos de la línea de productos.

[6] Fuente: Reimpreso con autorización de Stanford University Graduate School of Business, © 1985 Board of Trustees of the Leland Stanford Junior University.

Mi idea es asignar un precio inicial de ocho dólares al descorchador e invertir alrededor de 50 000 dólares en anuncios y publicidad para informar a los clientes acerca del producto y venderlo. Como ustedes ya saben, nuestros clientes son particularmente los que compran en las cadenas de tiendas, en tiendas especializadas y en ferreterías. Hacia ellos se dirige todo nuestro esfuerzo de ventas. Estimamos que el potencial total del mercado es de 104 000 unidades a ocho dólares cada una; con los 50 000 dólares para publicidad y promoción, podemos alcanzar el 65% de penetración [o sea, vender 65% de las 104 000 unidades, cerca de 68 000].

Obtuve estimaciones de los departamentos de contabilidad y manufactura y preparé el estado de proyección de ingresos que está frente a ustedes [véase Tabla 2-7].

Jack Croxton, el controlador, prosiguió:

Croxton: Las estimaciones que ha utilizado me parecen bastante razonables, excepto por los costos generales y administrativos. ¿De dónde obtuvieron el cálculo del 15% de las ventas? La mayor parte de nuestros costos administrativos y generales son salarios y otros costos fijos, por lo que considero que, como máximo, este proyecto representa 40 000 dólares adicionales.

Tabla 2-7 Compañía Chase Manufacturing

Nuevo descorchador de vinos
*Análisis pro forma (miles de dólares)**

Ventas	$540.8
Costos de manufactura	282.8
Costos de mercadotecnia	104.1
Costos administrativos y generales	81.1
Costos totales	468.0
Beneficios antes de impuestos	72.8

* Hipótesis:

Precio de venta, neto con descuentos: 8 dólares por unidad.
Potencial total de mercado: 104 000 unidades.
Penetración en el mercado: 65%.
Ventas de unidades (65% de 104 000): 67 600 unidades.
Costos de manufactura: 80 000 dólares más tres dólares por unidad.
Costos de mercadotecnia: 10% de las ventas (comisiones por ventas)
más 50 000 dólares para publicidad y promoción.
Costos administrativos y generales: 15% de las ventas.

Boxer: El total de los costos generales y administrativos de la corporación fue del 15% de las ventas el año pasado y yo utilicé el mismo porcentaje. Tendremos que agregar un gerente de proyecto e incurrir en algunos otros costos administrativos, los cuales, estoy de acuerdo, no ascenderán probablemente a más de 40 000 dólares. Sin embargo, ¿no deberíamos usar el mismo porcentaje que el total corporativo de gastos administrativos y generales?

El señor J. L. Chase, presidente de la compañía, interrumpió:

Chase: A primera vista el proyecto me parece favorable. Pero, ¿por qué eligieron el precio de ocho dólares y los 50 000 para publicidad y promoción? ¿Por qué no bajar el precio a cinco dólares? Creo que el potencial de mercado a ese precio sería de 200 000 unidades y quizás debamos invertir más de 50 000 dólares en publicidad y promoción para asegurar la captación de buena parte de ese potencial.

Croxton: Lo que me preocupa, J. L., es que si reducimos el precio, el margen será demasiado pequeño y no obtendremos beneficios.

Manuel Olivera, gerente de producción, agregó:

Olivera: Además, nuestra capacidad de producción es limitada. Para producir más de 75 000 unidades tendríamos que usar tiempo extra y efectuar algunas subcontrataciones. Con esto los costos variables subirían a cuatro dólares por cada unidad adicional a las 75 000. Así mismo, si el volumen es superior a 75 000 necesitaríamos maquinaria adicional, lo que sumaría 10 000 dólares a los 80 000 del presupuesto de Jane.

Croxton: Si hay que hacer algo, yo opino que deberá ser aumentar el precio, digamos a 10 dólares por unidad. Sé que con esta medida bajaría el potencial de mercado, pero el margen sería muy saludable para las unidades que sí se vendan.

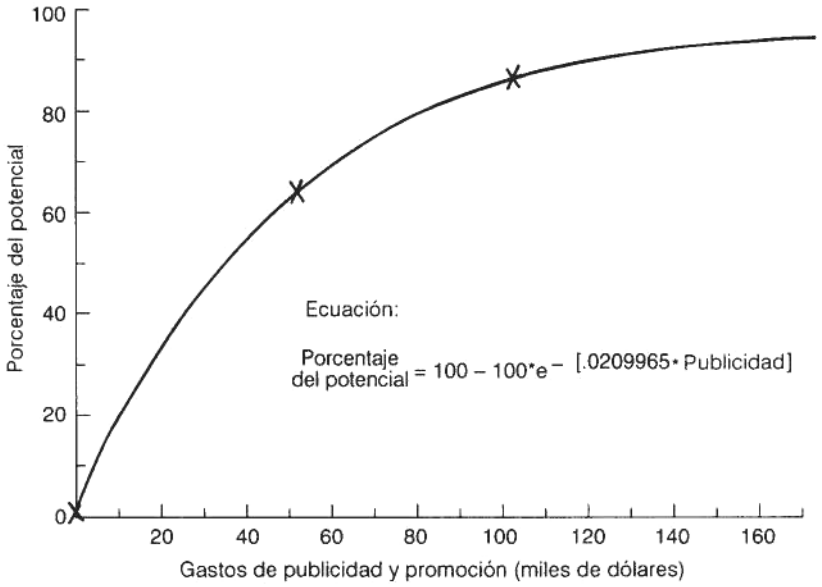
Boxer: Considero que el potencial de mercado sería de sólo 40 000 unidades si el precio es de 10 dólares.

La discusión continuó durante varios minutos, sin lograr el consenso acerca del precio.

Chase: Jane, no comprendo los aspectos acerca del potencial del mercado y de qué manera los 50 000 dólares para publicidad nos permitirán capturar el 65% del potencial del mercado. ¿Podría explicarlo un poco más?

Boxer: Bueno, J. L., usted recordará el proyecto de investigación que llevamos a cabo con nuestra agencia de publicidad. Ahora se presenta la primera oportunidad para aplicar los resultados. Con base en las entrevistas con una muestra de clientes, pudimos evaluar la efectividad de nuestra publicidad en el pasado. En la figura 2-8 se muestra la proyección del resultado para este producto. Estimamos la penetración en el potencial total del

Figura 2-8 Relación entre gastos de publicidad y penetración en el mercado para Chase Manufacturing



mercado con tres niveles de publicidad. Es obvio que si no invertimos nada en publicidad y promoción, los clientes ni siquiera conocerían el producto y, por lo tanto, no lo comprarían. Éste es el punto que se muestra en el origen de la figura 2-8. Después consideramos con cuidado cómo gastaríamos un presupuesto de 50 000 dólares (los anuncios que se utilizarían, ofertas especiales, etcétera) y calculamos que alcanzaríamos el 65% del potencial del mercado. Es decir, llegaríamos al 65% de las personas dispuestas a comprar el producto. De manera parecida, estimamos una penetración cercana al 88% si el gasto fuera de 100 000 dólares. Uno de mis asistentes ajustó a los tres puntos la función matemática que se muestra. Esta curva tiene sentido para nosotros.

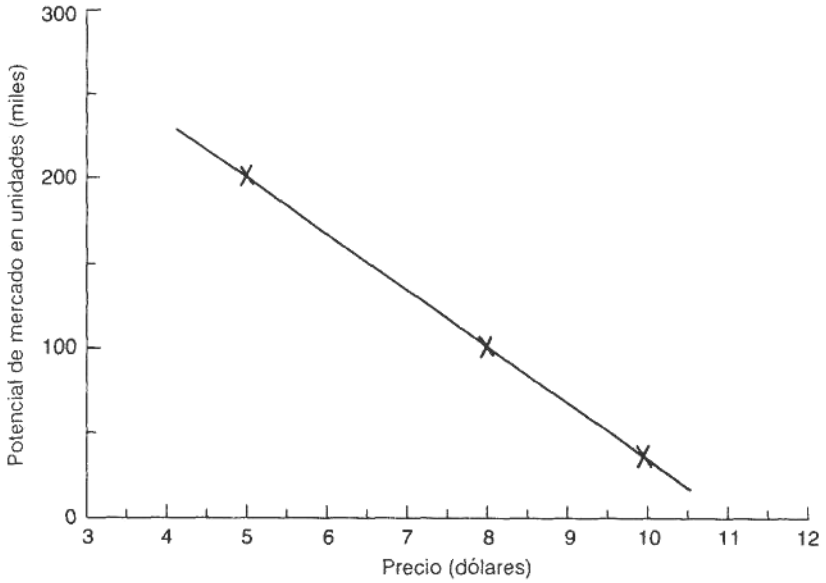
Chase: Pero, ¿cómo acordaron 50 000 dólares para publicidad y promoción?

Boxer: En realidad es algo tentativo. Pensamos llevar a cabo un análisis más detallado de los gastos óptimos.

a. Elabore un modelo que ayude al comité ejecutivo de Chase a decidir acerca del precio y la publicidad del nuevo descorchador de botellas de vino.

Considere la figura 2-9 como auxiliar en el proceso. El gráfico muestra tres puntos que relacionan el precio con el potencial total de mercado. El punto correspondiente al precio de ocho dólares y al potencial de mercado de 104 000 unidades es el que se menciona en el plan de Boxer de la tabla 2-7. El punto

Figura 2-9 Relación entre potencial de mercado y precio para Chase



con precio de cinco dólares y con potencial de mercado de 200 000 unidades es el que propuso Chase. Boxer también proporcionó el punto donde el precio es de 10 dólares y el potencial de mercado es de 40 000 unidades.

Suponga que es razonable unir estos tres puntos con una línea recta, como se ilustra en la figura 2-9. Los economistas lo llaman función de demanda. La ecuación de una recta es:

$$\text{Potencial de mercado} = m \bullet \text{Precio} + b$$

donde m y b son constantes que se determinarán. A la constante m se le llama pendiente de la recta. Vea si puede determinar los valores de m y b por tanteo; si, después de cierto tiempo, no lo logra, consulte el pie de página 7.[7]

b. Defina las otras relaciones del modelo de Chase.

c. Por último, use su modelo para calcular el beneficio del siguiente caso:[8]

Precio = 7 dólares por unidad
Publicidad = 100 000 dólares

[7] La ecuación es: Potencial de mercado (miles de unidades) = 360 - 32 · Precio

[8] Si no tiene una calculadora que obtenga potencias de *e,* el valor de $e^{-(0.0209965)(100)} = 0.122$

d. Implante su modelo con un programa de hoja de cálculo. Después, por tanteo, encuentre los valores para el precio y la publicidad que generen el mayor beneficio.

e. Determine los valores de los beneficios si la publicidad asciende a 70 000 dólares y los precios varían entre siete y nueve dólares (con intervalos de 10 centavos). Grafique los resultados como una curva que muestre la relación entre el precio y el beneficio. Repita el procedimiento con 90 000 dólares para publicidad y dibuje la curva en el mismo gráfico. Haga lo anterior una vez más, con 100 000, 110 000 y 130 000 dólares para publicidad (todo esto se puede hacer en unos cuantos pasos con algunos programas de hoja de cálculo).

Con base en esta curva, ¿qué puede decir acerca del mejor precio y la mejor publicidad?

CASO 2-8[9]



El comité ejecutivo del periódico *Gotham City Tunes* se reúne para considerar propuestas del departamento de promoción y del director de operaciones. A usted, como asistente del editor, se le ha pedido que estudie los aspectos financieros de estas propuestas.

Operaciones del Times. La mayoría de los periódicos como el *Times* obtienen ingresos de dos fuentes: (1) la circulación, o sea, la venta de los periódicos al público lector, y (2) las ventas de espacio publicitario. Los costos se relacionan con (1) el sistema de distribución (que el periódico llegue a los clientes); (2) la cobertura editorial y de noticias; (3) la composición, es decir, la tipografía, el formato para fotograbado y el trabajo artístico; (4) la impresión, o sea, operar las imprentas para producir el periódico; y (5) el papel y la tinta.

Para el *Tunes,* la circulación y la publicidad son factores relacionados. Si la circulación es mayor deben aumentar los ingresos por publicidad, ya que ésta llegaría a más personas, algo que favorece a los anunciantes. Así mismo, muchas personas compran el periódico por los anuncios.

Ingresos y costos. A efectos de planificación se considera un mes como una unidad y se utilizan promedios mensuales de circulación, publicidad y noticias. El promedio actual de la circulación diaria es de un millón (30 millones al mes). Los ingresos medios son de 15 centavos por periódico al día.

La publicidad se mide en pulgadas columna. Actualmente, el periódico contiene 225 000 pulgadas columna de publicidad por mes, lo que genera ingresos de 20 dólares por pulgada columna. Los artículos editoriales y las noticias ocupan el resto del periódico y en la actualidad representan 135 000 pulgadas columna por mes. No se contempla ningún cambio al espacio asignado a esta categoría. Una página del *Times* contiene 200 pulgadas columna.

Los costos variables de composición se muestran en la tabla 2-8, mientras que en la tabla 2-9 se indican los costos variables de impresión. Un pliego es una copia

[9] Fuente: Reimpreso con autorización de Stanford University School of Business, © 1981 Board of Trustees of the Leland Stanford Junior University.

Tabla 2-8 Costo de composición

Tipo de material	*Costo variable (por pulgada columna)*
Material publicitario	$4
Material de noticias, editorial y especial	$6

Tabla 2-9 Costos y capacidad de impresión

	Costo variable (por millón de pliegos impresos)	*Capacidad (en millones de pliegos mensuales)*
Tiempo normal	$800	1500
Tiempo extra	$1200	Sin límite

Tabla 2-10 Costos fijos

Departamento	*Costo fijo (miles de dólares por mes)*
Editorial, noticias y especiales	$1000
Composición	90
Impresión	300
Distribución	700
	$2090

de la página del periódico. Por ejemplo, si una edición contiene 50 páginas y la circulación del *Times* es de 50 millones de ejemplares, esto da como resultado 50 millones de pliegos para ese día. Observe que la capacidad de la imprenta, en tiempo normal, es de 1500 millones de pliegos por mes.

Los costos de distribución variables dependen de la circulación y del tamaño de la edición, y promedian 40 dólares por tonelada de periódico que se entrega. Los costos fijos de los departamentos editorial, de composición, de impresión y de distribución se exhiben en la tabla 2-10. El costo del papel es de 120 dólares por tonelada y es completamente variable. Una tonelada de papel alcanza para imprimir 90 000 pliegos. Puesto que hay huelgas en algunas fábricas de papel, ninguno de los proveedores regulares suministrará más de 20 000 toneladas de papel al *Times* en un mes. Si se requiere más de esta cantidad, sólo se puede obtener a 160 dólares por tonelada.

Propuestas. El departamento de promoción considera varias alternativas para aumentar la circulación (por ejemplo, suscripciones a prueba con precio reducido). En la tabla 2-11, se muestran dos de las propuestas, como alternativas B y C,

Tabla 2-11 Alternativas de promoción y efecto sobre la circulación con distintas tasas de publicidad

Alternativa	*Circulación (promedio diario)*	*Costo de obtener circulación adicional (miles de dólares)*	*Volumen de publicidad (miles de pulgadas columna) con tarifa de $20*	*Volumen de publicidad (miles de pulgadas columna) con tarifa de $22*
A	1 000 000*	0	225*	200
B (+10%)	1 100 000	400	235	225
C (+20%)	1 200 000	800	240	230

*Niveles actuales.

donde se indican el aumento en circulación y el costo para obtener el aumento. El costo se paga en el primer mes y el aumento en circulación por lo general dura alrededor de tres meses.

En la tabla 2-11 también se muestran los volúmenes de publicidad con la tarifa actual de 20 dólares por pulgada columna, así como el volumen si la tarifa aumentara a 22 dólares por pulgada columna. De esta manera se pueden evaluar las propuestas de cambios en la tarifa con distintos niveles de circulación. También existen variaciones por temporada, tanto por encima como por debajo de los niveles normales que se mencionan en la tabla 2-11. Concretamente, el próximo mes deberá ser normal, el siguiente 15% arriba de lo normal y el tercero 10% debajo.

El director de operaciones quiere además subcontratar la impresión de varias secciones de la edición dominical, con el objetivo de reducir el tiempo extra de impresión. *(Nota:* Varias de las secciones dominicales se imprimen durante la semana, por lo que la impresión externa tendría efecto uniforme en el programa de actividades del área de impresión.) El director de operaciones tiene una oferta de una imprenta de la localidad para efectuar el trabajo de impresión *y* proporcionar el papel, con un costo de 2600 de dólares por millón de pliegos. Sin embargo, la imprenta insiste en un contrato de tres meses con la misma cantidad de trabajo en cada uno.

a. Indique los objetivos generales del modelo y las medidas de rendimiento específicas que usaría.
b. Indique en términos generales cuáles son las decisiones que hay que tomar y luego defina las variables de decisión específicas que se usarán.
c. Identifique otras variables importantes (exógenas e intermedias) que requiere el modelo. Sea específico y defina las variables que deben usarse y sus unidades de medida.
d. Indique cuáles son las políticas que limitan o restringen las decisiones.
e. Indique las relaciones que hay que identificar al construir el modelo. Sea específico; en otras palabras, muestre las ecuaciones.

Considere como caso base el que sigue, con los valores que se indican para las variables de decisión:

Circulación inicial = 1 millón por día Precio de publicidad = 20 dólares por pulgada Cantidad inicial de publicidad = 225 000 pulgadas Pliegos impresos externamente = 0

f. Estudie la propuesta para imprimir los pliegos externamente, como sugiere el director de operaciones. ¿Hay que hacerlo? Si es así, ¿por cuántos millones de pliegos al mes debe ser el contrato?

g. Si pudiera aumentar la circulación inicial en 1% y todo lo demás permaneciera igual, ¿cuál sería el efecto sobre el beneficio total del trimestre?

h. ¿Cuál debe ser el nivel de circulación para que el beneficio trimestral sea de un millón de dólares?

i. ¿Cuánto tendría que disminuir la cantidad inicial de publicidad para que el beneficio trimestral fuera negativo?

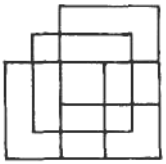
j. En algunas ciudades los periódicos han aumentado el precio de venta. Suponga que el *Gotham City Tunes* aumenta su precio (lo demás permanece sin cambios). ¿Cuál sería el efecto sobre la rentabilidad?

k. En la tabla 2-11 se describen seis combinaciones posibles, las alternativas A, B y C, cada una con tarifa de publicidad de 20 y 22 dólares. En cada una de estas combinaciones hay variaciones que dependen de la cantidad de pliegos que se impriman externamente. Escoja dos o tres planes que puedan presentarse a la dirección superior para considerarse con mayor detenimiento.

l. Considere los cinco parámetros que se presentan en la siguiente tabla. Cada parámetro se presenta con el intervalo dentro del cual puede variar. ¿Cuál es la sensibilidad del beneficio total con respecto a estas variaciones? ¿Con cuál parámetro es más sensible el beneficio? Dibuje un diagrama de araña.

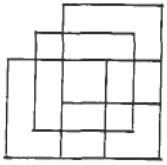
	Intervalo		
Parámetro	*Bajo*	*Caso base*	*Alto*
Precio de venta	0.14	0.15	0.18
Capacidad de impresión	1400	1500	1700
Cantidad de material editorial	120	135	150
Cantidad inicial de publicidad	200	225	240
Costo de compra de papel (por encima de 20 000 toneladas)	120	160	180

PARTE II



Análisis de decisiones

CAPÍTULO 3



Conceptos básicos de probabilidad

Si fuera posible tomar todas las decisiones empresariales en condiciones de certidumbre, la única justificación válida para una mala decisión sería no considerar todos los hechos pertinentes. Si hay *certidumbre,* se puede hacer un pronóstico *perfecto.* Por desgracia, es casi imposible que un director actúe en un mundo de certidumbre, ya que por lo general se ve obligado a tomar decisiones en las que hay incertidumbre acerca de lo que sucederá después de tomarlas. En esta situación existe una herramienta, la teoría matemática de la probabilidad, que puede ser de gran utilidad para el decisor.

En este capítulo se presentará una parte de la notación y de las relaciones básicas de la teoría de la probabilidad que el lector aplicará en capítulos posteriores. Aunque los aspectos matemáticos de la probabilidad están bien definidos, la persona que trate de aplicar los modelos del libro se percatará de que existe mucha incertidumbre con respecto a las entradas de información que se requieren. Además, muchos de los modelos hacen abstracciones de las complejidades de la realidad.

Probabilidades objetivas y subjetivas

Casi todos conocemos las leyes del azar relacionadas con el lanzamiento de una moneda. Si alguna persona nos pregunta cuál es la probabilidad de que caiga cara al lanzar una moneda, la respuesta será "la mitad", o 0.50. La respuesta se basa en la experiencia común que se tiene con las monedas y se supone que se trata de una moneda *legítima* que se lanza de manera "legítima". Lo anterior es un ejemplo

de **probabilidad objetiva.** Hay dos interpretaciones de la probabilidad objetiva. La primera se basa en la **simetría de resultados** e implica que los resultados idénticos en los aspectos esenciales deben tener la misma probabilidad. Una moneda *legítima* se define como una que está equilibrada correctamente y tiene dos lados idénticos (exceptuando las pequeñas diferencias en las imágenes). Entonces, cada lado debe tener la probabilidad de 50% (si se omite la posibilidad de que la moneda caiga sobre el canto). Si la moneda estuviera doblada o cargada, o tuviera dos lados iguales, la respuesta sería diferente. Otro ejemplo: suponga que hay una caja que contiene tres bolas rojas y siete negras (todas del mismo tamaño, iguales al tacto e idénticas en todos los demás aspectos, excepto en el color) y que todas están bien mezcladas. La interpretación de la simetría de resultados asignaría una probabilidad de 0.10 a cada bola y, por lo tanto, habría una probabilidad de 0.30 de extraer una bola roja.

La interpretación como **frecuencia relativa** de la probabilidad objetiva se basa en la experiencia histórica en situaciones idénticas. Así, si se ha lanzado una moneda 10 000 veces y en 4998 ocasiones cayó cara, se llegaría a la conclusión de que la probabilidad de que cayera cara la siguiente vez que se lanzara la moneda de igual manera sería de 0.50 (es decir, 4998/10 000, redondeado).

La **interpretación subjetiva** de la probabilidad muchas veces es útil para la toma de decisiones empresariales. En el caso de la probabilidad objetiva, la base es la información histórica definitiva, la experiencia común (evidencia objetiva) o el análisis riguroso. En el caso de la interpretación subjetiva es posible que no exista información histórica y, en vez de la evidencia objetiva, la base para la asignación de probabilidades sería la experiencia personal. Muchas veces se requiere la interpretación subjetiva para la toma de decisiones empresariales, ya que no se dispone de evidencia objetiva confiable.

Suponga que un director trata de decidir si debe comprar o no una nueva fábrica y que el éxito de la fábrica depende en gran medida de que se presente una recesión en los próximos cinco años. Una probabilidad asignada a la ocurrencia de una recesión, sería un peso subjetivo. No existe una historia larga y común que pueda proyectarse con confianza hacia el futuro, como sucedió en los ejemplos de la moneda y de las bolas. Sin embargo, puede ser apropiado, de hecho necesario, considerar el suceso "ocurrencia de una recesión" y después de obtener pruebas y utilizar el juicio empresarial, el director podrá asignar una probabilidad al suceso y usarla para la toma de decisiones. Definitivamente no habrá tanto consenso con respecto a esta probabilidad como la que existe con la probabilidad de extraer una bola roja o de que caiga cara al lanzar una moneda. Este libro se centra en las decisiones empresariales, por lo cual se asignarán con frecuencia probabilidades subjetivas a los sucesos que tengan efectos importantes en la decisión. Con esto se pretende asegurar la consistencia entre el juicio que tiene el decisor acerca de los estados posibles y la decisión que se tome.

Un objetivo importante del proceso de decisión que se propone es permitir que el decisor piense en función de los sucesos que pueden ocurrir después de tomar una decisión, en las consecuencias de dichos sucesos y en la probabilidad de los sucesos y consecuencias, en vez de que el director pase directamente a evaluar si la decisión es deseable o no.

Enunciados básicos de la probabilidad

Dos enunciados básicos de las probabilidades son:

1. La suma de las probabilidades de todos los resultados posibles de un ensayo debe ser igual a uno.
2. Las probabilidades siempre son mayores o iguales a cero (es decir, las probabilidades nunca son negativas) y son menores o iguales a uno. Cuanto menor es la probabilidad menos posible es el suceso.

El primer enunciado indica que si A y B son los únicos candidatos para un puesto, la probabilidad de que gane A más la probabilidad de que gane B deberán sumar uno (suponiendo que no es posible un empate).

El segundo enunciado da como resultado las siguientes interpretaciones. Si un suceso tiene probabilidad positiva, puede ocurrir; el suceso puede ser imposible y entonces la probabilidad será cero; o es seguro que ocurra el suceso y en este caso la probabilidad será igual a uno. Sin importar si las probabilidades se interpretan como probabilidades objetivas o pesos subjetivos, es práctico pensar en función de una escala de ponderación que va de cero a uno. Si alguien lanza 500 veces una moneda de características desconocidas para obtener una estimación de las probabilidades objetivas y los resultados son 225 caras y 275 cruces, se puede convertir el intervalo de resultados posibles a una escala de cero a uno dividiéndolo entre 500. Los resultados reales son 225/500 = 0.45 caras y 275/500 = 0.55 cruces. Entonces, si se desea obtener las probabilidades, los datos se manipulan para que se ajusten a la escala de cero a uno. Los valores de 0.45 y 0.55 se pueden usar como estimaciones de las probabilidades verdaderas de obtener cara o cruz (se desconocen las probabilidades verdaderas).

Sucesos mutuamente excluyentes

Dos sucesos o más son **mutuamente excluyentes** si sólo puede ocurrir uno de ellos en un ensayo. Se pueden sumar las probabilidades de los sucesos mutuamente excluyentes para obtener la probabilidad de que ocurra uno de los sucesos de un conjunto dado de sucesos.

Ejemplo Las probabilidades de la tabla 3-1 indican la estimación subjetiva del editor de un periódico con respecto a la posibilidad relativa de cuatro candidatos para ocupar un cargo público (suponga que no se permiten empates).

Estos sucesos son mutuamente excluyentes, ya que en una elección (un ensayo) sólo puede ocurrir un suceso; por lo tanto, las probabilidades son aditivas. La probabilidad de una victoria demócrata es de 0.60; para la victoria republicana es 0.40; de que gane C o D, 0.68. La probabilidad de que ganen tanto B como C es cero, ya que en cualquier ensayo sólo puede ocurrir uno de los sucesos mutuamente excluyentes.

Tabla 3-1

Suceso: Elección	*Probabilidad*
Candidato demócrata A	0.18
Candidato demócrata B	0.42
Candidato republicano C	0.26
Candidato republicano D	0.14
	1.00

Sucesos independientes

Los sucesos pueden ser dependientes o independientes. Si dos sucesos son **independientes** (estadísticamente), la ocurrencia de un suceso no afectará la probabilidad de que ocurra el segundo.[1]

Cuando dos sucesos o más son independientes, la probabilidad de que ocurran los dos (o más de dos) es igual al producto de las probabilidades de los sucesos individuales. Es decir:

$$P(A \text{ y } B) = P(A) \cdot P(B) \quad si\ A,B \text{ son independientes} \tag{3-1}$$

donde:

$P(A \text{ y } B)$ = Probabilidad de que ocurran los sucesos A y B
$P(A)$ = Probabilidad del suceso A
$P(B)$ = Probabilidad del suceso B

La ecuación 3-1 indica que la probabilidad de que ocurran A y B es igual a la probabilidad de A multiplicada por la probabilidad de B, si A y B son independientes. Si A es la probabilidad de que caiga cara la primera vez que se lanza una moneda y B es la probabilidad de que caiga cara en el segundo lanzamiento, entonces:

$P(A) = ½$
$P(B) = ½$
$P(A \text{ y } B) = ½ \cdot ½ = ¼$

La probabilidad de que ocurra A y luego B (dos caras) es un cuarto. $P(A \text{ y } B)$ es la **probabilidad conjunta** de los sucesos A y B. Si es apropiado, la palabra *y* se

[1] Hay que distinguir la dependencia o independencia estadística de la dependencia o independencia causal. Que dos sucesos dependan entre sí estadísticamente no quiere decir que uno sea la causa del otro. Cuando se utilice el término *dependencia* o *independencia* en este libro, se hará referencia a la dependencia o independencia estadística.

puede omitir para que la notación sea más sencilla y escribir la probabilidad conjunta como *P(AB).*

Para definir la independencia en forma matemática se requiere el símbolo P(B|A), que se lee como "la probabilidad del suceso *B,* dado que ya ocurrió el suceso *A". P(B|A)* es la **probabilidad condicional** del suceso *B* si ya tuvo lugar el suceso *A.* Observe que *P(B|A)* no significa la probabilidad del suceso *B* dividida entre *A;* la raya vertical seguida por .4 significa "dado que ya ocurrió el suceso *A*".

Con sucesos independientes:

$$\boldsymbol{P(B|A)} = P(B) \quad \text{si } A, B \text{ son independientes} \tag{3-2}$$

Es decir, la probabilidad del suceso *B,* supuesto que ya ocurrió el suceso *A,* es igual a la probabilidad de *B* si los dos sucesos son independientes. En el caso de dos sucesos independientes, la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de ocurrencia del segundo [de manera similar, *P(A\B) = P(A)].* Las ecuaciones 3-1 y 3-2 son las definiciones básicas de la independencia entre dos sucesos.

Sucesos dependientes

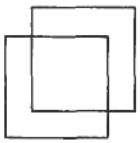
Dos sucesos son **dependientes** si la ocurrencia de uno de ellos afecta la probabilidad de ocurrencia del segundo.

Ejemplo: Sucesos dependientes

Lance una moneda legítima y determine si el resultado es cara o cruz. Si es cara, arroje de nuevo la moneda; si es cruz, lance una moneda que no sea legítima, con probabilidad de tres cuartos de que caiga cara y con probabilidad de un cuarto de que sea cruz. ¿Afecta de alguna manera el resultado del primer lanzamiento a la probabilidad de que caiga cara en el segundo? La respuesta es "sí", ya que el resultado del primer lanzamiento determina cuál será la moneda (legítima o ilegítima) que se lance la segunda vez.

Otro ejemplo de sucesos dependientes comprende sucesos mutuamente excluyentes. Si los sucesos *A y B* son mutuamente excluyentes, entonces son dependientes. Puesto que ya ocurrió el suceso *A,* la probabilidad condicional de que ocurra *B* debe ser cero, ya que son sucesos mutuamente excluyentes. Es decir, *P(B\A)* = 0 si los sucesos *A* y *B* son mutuamente excluyentes.

RESUMEN



Una probabilidad es un número entre cero y uno, que representa la posibilidad de ocurrencia de un suceso. Las probabilidades pueden ser objetivas, si se basan en simetría o en mucha experiencia; o subjetivas, si se apoyan en el juicio del decisor. La probabilidad de ocurrencia de uno de dos o más sucesos mutuamente excluyentes es la suma de las probabilidades de los sucesos. Dos sucesos ,son independientes si la ocurrencia de uno no afecta la probabilidad de ocurrencia del otro.

Probabilidades condicional, marginal y conjunta

Ahora se presenta una relación de probabilidad muy importante:

$$P(B|A) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(A)} \quad \text{si } P(A) \neq 0 \qquad \textbf{(3-3)}$$

La probabilidad condicional del suceso *B,* dada la ocurrencia del suceso *A,* es igual a la probabilidad conjunta de *A y B,* dividida entre la probabilidad del suceso *A.*

Se pueden multiplicar ambos lados de la ecuación por *P(A)* y reescribir la ecuación 3-3 como sigue:

$$\boldsymbol{P(A \text{ y } B) = P(B|A) \cdot P(A)} \qquad \textbf{(3-4)}$$

En otras palabras, la probabilidad conjunta de *A y B* es igual a la probabilidad condicional de *B* dado *A,* multiplicada por la probabilidad de *A.*

Veamos estas fórmulas suponiendo que son sucesos independientes. De la ecuación 3-3:

$$P(B|A) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(A)}$$

Pero de la ecuación 3-1:

$$\boldsymbol{P(A \text{ y} B) = P(A) \cdot P(B)}$$

para sucesos independientes. Al sustituir $P(A) \cdot P(B)$ por *P(A y B)* en la ecuación 3-3, se obtiene:

$$P(B|A) = \frac{P(A) \cdot P(B)}{P(A)} = P(B) \qquad \textbf{(3-2)}$$

Ésta es la definición matemática de la independencia que se presentó antes en la ecuación 3-2.

Ahora se usarán dos ejemplos para ilustrar lo siguiente:

1. Probabilidades incondicionales (marginales). El término **marginal** se refiere al hecho de que las probabilidades se encuentran en lo márgenes de una tabla de probabilidades conjuntas (véase Tabla 3-3); suman uno. Una probabilidad marginal se refiere a la probabilidad de ocurrencia de un suceso que no está condicionado por la ocurrencia de otro. *P(A) y P(B)* son ejemplos de probabi lidades incondicionales o marginales.
2. Probabilidades condicionales, como *P(A\B) y P(B\A).*
3. Probabilidades conjuntas, como *P(A* y *B)* o *P(AB).*

Ejemplo 1 Suponga que hay tres cajas que contienen bolas rojas y negras, de la siguiente manera:

Caja 1: 3 rojas y 7 negras
Caja 2: 6 rojas y 4 negras
Caja 3: 8 rojas y 2 negras

Figura 3-1

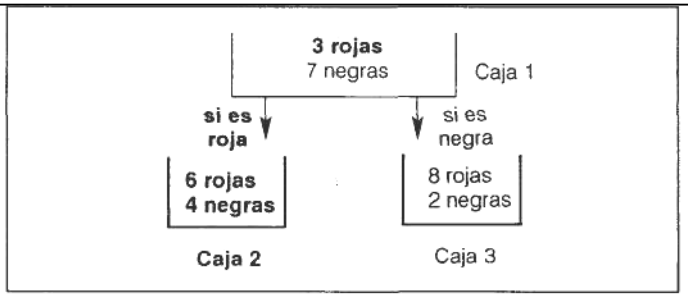


Tabla 3-2

	Marginal	·	*Condicional*	=	*Conjunta*
Suceso	*P(A)*	·	*P(B\A)*	=	*P(A y B)*
RR	*P(R)* = 0.30		*P(R|R)* = 0.60		*P(RR)* = 0.18
RN	*P(R)* = 0.30		*P(N|R)* = 0.40		*P(/RN)* = 0.12
NR	*P(N)* = 0.70		*P(R|N)* = 0.80		*P(NR)* = 0.56
NN	*P(N)* = 0.70		*P(N|N)* = 0.20		*P(NN)* = 0.14

Suponga que se extrae una bola de la caja 1; si es roja, se extrae una bola de la caja 2. Si la bola extraída de la caja 1 es negra, entonces se extrae una de la caja 3. El diagrama de la figura 3-1 ilustra el juego. Considere las siguientes preguntas relacionadas con las probabilidades en este juego:

1. ¿Cuál es la probabilidad de extraer una bola roja de la caja 1? Esta probabilidad es *incondicional* o *marginal* e igual a 0.30 (la probabilidad marginal de sacar una negra es 0.70).
2. Suponga que se extrae una bola de la caja 1 y es roja; ¿cuál es la probabilidad de sacar otra bola roja de la caja 2 en la segunda extracción? La respuesta es 0.60. Éste es un ejemplo de una *probabilidad condicional;* es decir, la probabilidad de extraer una bola roja la segunda vez si se saca una bola roja de la caja 1 es una probabilidad condicional.
3. Suponga que la primera bola que se sacó es negra; ¿cuál es la probabilidad *condicional* de que la segunda bola (esta vez de la caja 3) sea roja? La probabilidad es 0.80. La extracción de la caja 1 (el suceso que condiciona o condicionante) es muy importante para determinar las probabilidades de una bola roja (o negra) en la segunda extracción.
4. Suponga que antes de extraer bolas se plantea la pregunta: ¿Cuál es la probabilidad de sacar dos bolas rojas? Aquí sería una probabilidad *conjunta;* el

suceso sería una bola roja en ambas extracciones. El cálculo de la probabilidad conjunta es un poco más complicado que en las preguntas anteriores, por lo que será útil un poco de análisis. Los cálculos son:

$$P(A \text{ y } B) = P(B\backslash A) \cdot P(A) \tag{3-4}$$

La tabla 3-2 y la figura 3-2 indican que la probabilidad de sacar dos bolas rojas es 0.18 [es decir, *P(R y R)* o, de manera más sencilla, *P(RR),* la rama superior del árbol]: Las probabilidades conjuntas se pueden resumir como sigue:

Dos bolas rojas	*P(RR)*	= 0.18
Una bola roja en la primera extracción y y una negra en la segunda	*P(RN)*	= 0.12
Una bola negra en la primera extracción y una roja en la segunda	*P(NR)*	= 0.56
Dos bolas negras	*P(NN)*	= 0.14
		1.00

La figura 3-2 es lo que se denomina **diagrama de árbol.** Es un medio muy útil para ilustrar situaciones de incertidumbre. La primera bifurcación indica que se puede extraer una bola roja o negra, así como las probabilidades de estos sucesos. Si se extrae una bola roja, se pasa a la caja 2, de la cual también se puede sacar una bola negra o una roja, pero con probabilidades determinadas por el hecho de que la extracción se hace de la caja 2. En el segundo nivel de bifurcaciones hay probabilidades condicionales (las probabilidades dependen de que se haya extraído una bola negra o una roja en la primera extracción). Al final de cada ruta están las probabilidades conjuntas correspondientes a la ruta. Estas probabilidades se obtienen al multiplicar las probabilidades marginales (incondicionales) de la primera rama por las probabilidades condicionales de la segunda.

La tabla 3-3 presenta estos resultados en una tabla de probabilidad conjunta; las intersecciones de las filas y de las columnas son probabilidades *conjuntas.* La columna de la derecha presenta las probabilidades incondicionales *(marginales)* del resultado de la primera extracción; la fila inferior contiene las probabilidades *incondicionales o marginales* de los resultados de la segunda extracción. La tabla 3-3 es un resumen del diagrama de árbol.

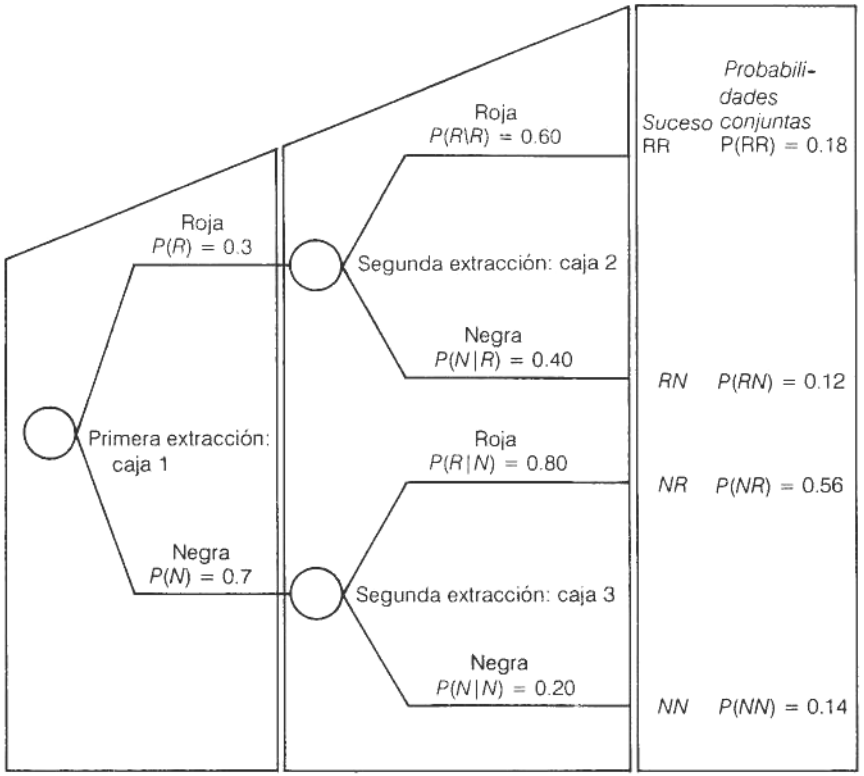
Calculemos ahora otras probabilidades:

1. Probabilidad de una bola roja y una negra, sin importar el orden = 0.56 + 0.12 = 0.68
2. Probabilidad de una bola negra en la segunda extracción: = 0.26

   Explicación del cálculo:

Probabilidad roja-negra	=0.12
Probabilidad negra-negra	= 0.14
Probabilidad de negra en la segunda extracción	= 0.26

Figura 3-2 Diagrama de árbol



3. Probabilidad de que la segunda extracción sea roja SÍ la primera también es roja: = 0.60

   Si la primera extracción es roja, corresponde a la fila *R* de la tabla 3-3, que contiene 0.30. La pregunta es cuál será la proporción de 0.18 con respecto a 0.30. La respuesta es 0.60; o, de acuerdo con la fórmula:

$$P(R_2|R_1) = \frac{P(R_2 \text{ y } R_1)}{P(R_1)} = \frac{0.18}{0.30} = 0.60$$

Ejemplo 2 Suponga que se lanza dos veces una moneda y se piden las siguientes probabilidades:

1. Probabilidad de dos caras.
2. Probabilidad de una cara y una cruz en dos lanzamientos.
3. Probabilidad de que el segundo lanzamiento dé cara.

Tabla 3-3 Tabla de probabilidad conjunta

Primera extracción \ *Segunda extracción*	*R*	*N*	*Probabilidad marginal del resultado en la primera extraçción*
R	*P(RR)* 0.18	*P(RN)* 0.12	0.30
N	*P(NR)* 0.56	*P(NN)* 0.14	0.70
Probabilidad marginal del resultado en la segunda extracción	0.74	0.26	1.00

4. Probabilidad de que el segundo lanzamiento dé cara supuesto que el primero fue cruz.

La tabla 3-4 presenta todos los resultados posibles para dos lanzamientos (H = cara, T = cruz) y sus probabilidades. Ahora, con la tabla, se pueden determinar las cuatro probabilidades requeridas:

1. $P(HH) = 1/4$
2. $P(HT + TH) = 1/2$
3. $P(HH + TH) = 1/2$
4. $P(H|T) = \dfrac{P(TH)}{P(T)} = \dfrac{1/4}{1/2} = 1/2$

Una característica importante del ejemplo anterior es que ilustra la *independencia.* Observe que son iguales las dos últimas probabilidades que se calculan; la probabilidad de cara en el segundo lanzamiento es $^{l}/z$, sin importar el resultado del primer lanzamiento. Se dice que ambos sucesos son *independientes* ya que la probabilidad de que en el segundo lanzamiento resulte cara no se ve afectada por el resultado del primer lanzamiento. Esto no sucedió en el ejemplo 1, donde la probabilidad de una bola roja en la segunda extracción era afectada por el resultado de la primera extracción. Para hacer un resumen de este resultado:

Dependencia (ejemplo 1)

$$\text{Probabilidad condicional de una bola roja en la segunda extracción, dada una roja en la primera} = \frac{\text{Probabilidad conjunta de } RR \text{ (0.18)}}{\text{Probabilidad marginal de una roja en la primera extracción (0.30)}} = 0.60$$

Tabla 3-4

Suceso	*Probabilidad*	*Fórmula*
HH	$P(HH) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$P(H) \cdot P(H)$
HT	$P(HT) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$P(H) \cdot P(T)$
TH	$P(TH) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$P(T) \cdot P(H)$
TT	$P(TT) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{2} = \frac{1}{4}$	$P(T) \cdot P(T)$

Fórmula general:

$$P(B|A) = \frac{P(A \text{ y } B)}{P(A)} \qquad (3\text{-}3)$$

Independencia (ejemplo 2)

Probabilidad condicional de cara en el segundo lanzamiento, si cae cruz en el primero $= \dfrac{\text{Probabilidad conjunta de } TH(\frac{1}{4})}{\text{Probabilidad marginal de cara en el primer lanzamiento } (\frac{1}{2})} =$ 0.50, probabilidad marginal de que resulte cara

Fórmula general:

$$P(B|A) = P(B) \qquad (3\text{-}2)$$

si *B* es independiente de *A*.

Ejemplo 3 A continuación se presenta otro ejemplo de las definiciones básicas de las probabilidades. Se lleva a cabo una encuesta a 100 familias y se obtiene información acerca de los ingresos familiares y de la compra de un producto alimenticio especial en la familia. Los resultados se muestran en la tabla 3-5. Suponga que se seleccionará al azar una familia de este grupo.

1. ¿Cuál es la probabilidad de que la familia seleccionada sea compradora del producto? 38 familias los compran; entonces, la probabilidad es 0.38. Observe que es una probabilidad *marginal* o *incondicional.*
2. ¿Cuál es la probabilidad de que la familia seleccionada sea un comprador con ingresos elevados? Ahora se trata de una probabilidad conjunta, donde *P*(Comprador e Ingresos altos) = 20/100 = 0.20.
3. Suponga que se selecciona al azar una familia y que se le informa que tiene ingresos altos. ¿Cuál es la probabilidad de que la familia también sea un comprador del producto? Observe que aquí se pide la probabilidad *condicional P*(Comprador|Ingresos altos). Del total de 40 familias con ingresos altos, 20 son compradores; entonces, la probabilidad es 20/40 = 0.50.

Tabla 3-5 Estudio de 100 familias, clasificadas por nivel de ingresos y por comportamiento en compras

	Ingresos bajos (ingresos familiares inferiores a $30 000)	*Ingresos altos (ingresos familiares superiores a $30 000)*	*Número total de familias*
La familia:			
Compra productos alimenticios especiales	18	20	38
No los compra	42	20	62
Número total de familias	60	40	100

4. ¿Son independientes los sucesos Comprador e Ingresos altos en este grupo de familias? Observe a partir de la pregunta 1 que *P*(Comprador) = 0.38; de la pregunta 3, *P*(Comprador|Ingresos altos) = 0.50. No son iguales; por lo tanto, los dos sucesos son *dependientes*. Si se sabe que la familia tiene ingresos altos se afecta la probabilidad de que sea un comprador. Otra forma de expresar esta dependencia es decir que el porcentaje de compradores no es igual entre las familias con ingresos bajos que entre las de ingresos elevados.

Modificación de probabilidades

Después de analizar la probabilidades conjuntas y las condicionales, pasemos a estudiar cómo se modifican las probabilidades para incorporar información nueva.

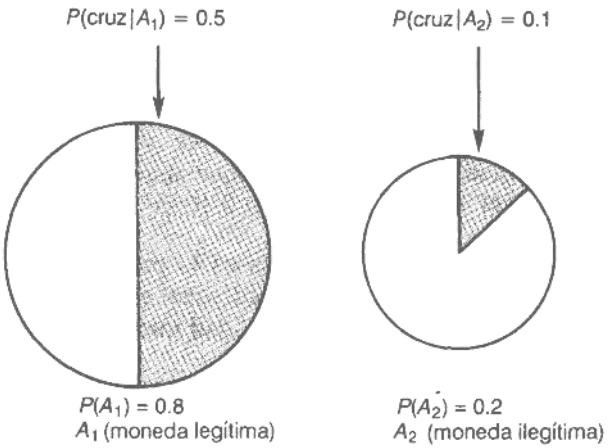
Suponga que no sabemos si una moneda es legítima. Si lo es, la probabilidad de que caiga cruz es 0.50; si la moneda no es legítima, la probabilidad de que caiga cruz es 0.10. Suponga que se asigna una probabilidad a priori de 0.80 de que la moneda sea legítima y una de 0.20 de que no lo sea. Al suceso "moneda legítima" se le designará A_1, mientras que A_2 corresponde al suceso "moneda ilegítima". La moneda se lanza una vez y digamos que el resultado es cruz. ¿Cuál es la probabilidad de que la moneda sea legítima?

La figura 3-3 muestra que la probabilidad condicional de una cruz es 0.50, si la moneda es legítima; es decir, $P(cruz\backslash A_1) = 0.50$. Si la moneda no es legítima, la probabilidad de que caiga cruz es 0.10; $P(cruz\backslash A_2) = 0.10$.

Calculemos la probabilidad conjunta P(cruz y A_1). Existe una probabilidad inicial de 0.80 de que A_1 sea el estado verdadero; si A_1 es el estado verdadero, hay una probabilidad condicional de 0.50 de que caiga cruz. La probabilidad conjunta de que el estado A_1 sea verdadero y de que se obtenga cruz es $(0.80 \cdot 0.50) = 0.40$. Así:

$$P(cruz \text{ y } A_1) = P(A_1) \cdot \quad P(\text{cruz}\backslash A_1) = 0.80 \cdot 0.50 = 0.40$$

Figura 3-3



La probabilidad conjunta de cruz *y* A_2 es igual a:

$$\text{P(cruz y } A_2) = P(A_2) \cdot P(cruz \backslash A_2) = 0.20 \cdot 0.10 = 0.02$$

La cruz puede ocurrir en combinación con el estado "moneda legítima" o con el estado "moneda ilegítima". La probabilidad de la primera combinación es 0.40; para la segunda en 0.02. La suma de las probabilidades equivale a la probabilidad incondicional de que el primer lanzamiento resulte cruz; es decir, *P*(cruz) = 0.40 + 0.02 = 0.42:

$$\begin{aligned} P(\text{cruz y } A_2) &= 0.02 \\ P(\text{cruz y } A_1) &= \underline{0.40} \\ P(\text{cruz}) &= 0.42 \end{aligned}$$

Si cae cruz y no se conoce el estado verdadero, la probabilidad condicional de que el estado A_x sea el verdadero, con base en la ecuación 3-3, es:

$$P(A_1|\text{cruz}) = \frac{P(\text{cruz y } A_1)}{P(\text{cruz})} = \frac{0.40}{0.42} = 0.95$$

Entonces, 0.95 es la **probabilidad modificada** o **a posteriori!** de-dj supuesto que ha caído cruz en el primer lanzamiento. Análogamente:

$$P(A_2|\text{cruz}) = \frac{P(\text{cruz y } A_2)}{P(\text{cruz})} = \frac{0.02}{0.42} = 0.05$$

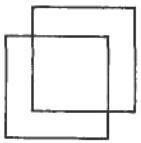
Utilizando símbolos más generales:

$$P(A_i|B) = \frac{P(A_i \text{ y } B)}{P(B)}$$

A la probabilidad condicional expresada en esta forma se le conoce como **teorema de Bayes.** Este teorema tiene muchas aplicaciones importantes en la evaluación del valor de la información adicional (véase Cap. 4).

En este ejemplo, las *probabilidades modificadas* para la moneda son 0.95 de que sea legítima y 0.05 de que no lo sea (las probabilidades iniciales eran 0.80 y 0.20). Estas probabilidades modificadas existen después de un lanzamiento cuyo resultado fue cruz. Es razonable que haya disminuido la probabilidad de que la moneda sea ilegítima, ya que apareció una cruz en el primer lanzamiento y la moneda ilegítima sólo tiene 0.10 de probabilidad de que caiga cruz.

RESUMEN



Una probabilidad conjunta es la probabilidad de ocurrencia de dos sucesos o más. Una probabilidad condicional es la probabilidad de ocurrencia de un suceso si ocurre otro. Una probabilidad marginal es la probabilidad incondicional de la ocurrencia de un suceso.

Se puede modificar la probabilidad de ocurrencia de un suceso por medio de la aplicación del teorema de Bayes para producir una probabilidad modificada o a posteriori.

Variables aleatorias

Una **función de probabilidad** es una regla que asigna probabilidades a cada elemento de un conjunto de sucesos que pueden ocurrir. Si se puede asignar un valor numérico específico a cada elemento del conjunto de sucesos, a la función que asigna estos valores numéricos se le llama **variable aleatoria. El valor** de la variable aleatoria es el resultado general de un experimento aleatorio (o de probabilidad). Es conveniente establecer la diferencia entre la variable aleatoria y los valores que puede asumir. El valor de una variable aleatoria se desconoce hasta que ocurre el suceso (es decir, hasta que se lleva a cabo el experimento aleatorio). Sin embargo, se conoce anticipadamente la probabilidad de que la variable aleatoria sea un valor específico. La probabilidad de cada valor de una variable aleatoria es igual a la suma de las probabilidades de los sucesos asignados a dicho valor de la variable aleatoria. En la tabla 3-6 se muestran algunos ejemplos de variables aleatorias.

Tabla 3-6

Variable aleatoria (representada con una letra mayúscula)	*Descripción de los valores de la variable aleatoria*	*Valores de la variable aleatoria*
U	Resultados posibles al lanzar un par de dados	2, 3, . . . , 12
X	Número posible de caras al lanzar cinco veces una moneda	0, 1, 2, 3, 4, 5
Y	Ventas posibles de un periódico, donde S representa el inventario.	0, 1, 2, . . . , *S*

Por ejemplo, suponga que se define la variable aleatoria Z como el número de caras en dos lanzamientos de una moneda legítima. Entonces, los valores posibles de Z y las probabilidades correspondientes son:

Valores posibles de Z	*Probabilidad de cada valor*
0	1/4
1	1/2
2	1/4

Las variables aleatorias se pueden agrupar en **distribuciones de probabilidad.** La tabla anterior es un ejemplo de una distribución **discreta** de probabilidad, en la cual la variable Z sólo puede tener valores específicos (0, 1 y 2 en este ejemplo). Observe que la suma de las probabilidades en una distribución debe ser igual a uno.

Valor esperado de una variable aleatoria

El **valor esperado o expectativa** de una variable aleatoria es la suma de los valores de la variable, ponderados por la probabilidad de que la variable aleatoria asuma ese valor. Entonces, el valor esperado es la media o valor promedio ponderado. Considere el ejemplo de la tabla 3-7.

En este caso la demanda *media o esperada* es de 28.10, lo que se escribe:

$$E(X) = 28.10$$

El valor esperado se calcula, como en la tabla 3-7, ponderando cada valor de la variable por su probabilidad y luego sumando. La definición matemática simbólica de la media es:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{n} X_i P(X_i) \qquad (3\text{–}5)$$

X_i es el iésimo valor de la variable aleatoria; $P(X_i)$ es la probabilidad del iésimo valor; y $\sum_{i=1}^{n}$ l símbolo que representa la suma de todos los elementos desde $i = 1$ hasta $i = n$. El símbolo Σ se lee "sigma". En el ejemplo, $n = 6$, ya que hay seis valores posibles para la variable aleatoria. Entonces:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} X_i P(X_i) = X_1 P(X_1) + X_2 P(X_2) + \cdots + X_6 P(X_6)$$

Tabla 3-7 Cálculo del valor esperado

Valores de la variable aleatoria X (demanda de mañana)	*Probabilidad De X_i $P(X_i)$*	*Demanda ponderada por la probabilidad, $X_i\ P(X_i)$*
X_1 = 25 unidades	$P(X_1)$ = 0.05	1.25
X_2 = 26 unidades	$P(X_2)$ = 0.10	2.60
X_3 = 27 unidades	$P(X_3)$ = 0.15	4.05
X_4 = 28 unidades	$P(X_4)$ = 0.30	8.40
X_5 = 29 unidades	$P(X_5)$ = 0.20	5.80
X_6 = 30 unidades	$P(X_6)$ = 0.20	6.00
	1.00	$E(X)$ = 28.10

Al sustituir los valores específicos:

$$E(X) = \sum_{i=1}^{6} X_i P(X_i) = 25(0.05) + 26(0.10) + 27(0.15) + 28(0.30) + 29(0.20) + 30(0.20)$$
$$= 28.10$$

Sumas de variables aleatorias

El valor esperado de la suma de variables aleatorias es la suma de los valores esperados de dichas variables. Así, la media de la variable aleatoria *(X + Y + Z)* es:

$$E(X+Y+Z) = E(X) + E(Y) + E(Z) \quad \textbf{(3-6)}$$

Constante multiplicada por una variable aleatoria

El valor esperado de una constante multiplicada por una variable aleatoria es igual a la constante multiplicada por el valor esperado de la variable:

$$E(cX) = cE(X) \quad \textbf{(3-7)}$$

Varianza y desviación estándar de una variable aleatoria

Con frecuencia es necesario saber la forma en que los valores de la variable aleatoria se dispersan con respecto a la media. La varianza y la desviación estándar son medidas de esta dispersión.

La **varianza** se define como la suma de los *cuadrados* de las desviaciones de los valores de la variable aleatoria con respecto a la media, ponderados por la probabilidad de la desviación. El enunciado matemático es el siguiente:

$$\mathbf{Var}(X) = \sum_{i=1}^{n} [X_i - E(X)]^2 P(X_i) \qquad \textbf{(3-8)}$$

$E(X)$ es la media; X_i, el *i*ésimo valor de la variable aleatoria; y $P(X_i)$ es su probabilidad. Observe que al aumentar la dispersión de todas las X, de $i = 1$ hasta $i = n$, es mayor el valor de $[X_i - E(X)]^2$ y aumenta la varianza.

La varianza de una constante multiplicada por una variable aleatoria es igual al cuadrado de la constante multiplicado por la varianza de la variable aleatoria. Es decir:

$$\mathbf{Var}(cX) = c^2\mathbf{Var}(X) \qquad \textbf{(3-9)}$$

La varianza de la suma de variables aleatorias *independientes* es igual a la suma de las varianzas. Así:

$$\mathbf{Var}(X+Y+Z) = \mathbf{Var}(X) + \mathbf{Var}(Y) + \mathbf{Var}(Z) \qquad \textbf{(3-10)}$$

si X, Y, Z son independientes

En la tabla 3-8 se calcula con la ecuación 3-8 la varianza de la variable aleatoria, demanda, del ejemplo anterior.

Si el valor de la variable aleatoria X es una constante, la media es el valor constante. Entonces, $[X_i - E(X)]$ sería cero para toda X_i y la varianza también sería cero, lo que indica que no hay dispersión con respecto a la media.

La **desviación estándar** es la raíz cuadrada de la varianza; en el ejemplo, la desviación estándar es $\sqrt{1.99}$, alrededor de 1.41. Por lo general, se usa σ (sigma minúscula) para representar la desviación estándar y σ^2 para la varianza.

Ejemplo

Este ejemplo muestra cómo se obtiene información acerca de una variable aleatoria con las reglas de probabilidad que se obtuvieron antes. Suponga que tiene un producto que trata de vender a dos clientes. En el caso de Tiendas Grandes, usted determina que hay 20% de probabilidad de vender 200 cajas, 40% de vender 100 cajas y 40% de que no venda nada. Para Mercados Pequeños, usted opina que las probabilidades son 40% para un pedido de 100 cajas y 60% de que no haya pedido. Usted considera también que las ventas a ambos mercados son dependientes. Si Tiendas Grandes compra 200 cajas, la probabilidad de que Mercados Pequeños compre 100 cajas sería del 50% (y 50% de probabilidad de no vender nada). Si Tiendas Grandes no compra nada, la probabilidad de que Mercados Pequeños no compre nada sería del 50%.

Suponga que le interesa la variable aleatoria X, las ventas totales a ambos clientes. Obtengamos la distribución de probabilidad para esta variable aleatoria. El primer paso es elaborar la figura 3-4, la tabla de probabilidades conjuntas, e incluir la información que tenemos.

Tabla 3-8 Cálculo de la varianza

Valor de la variable aleatoria, X_i	*Probabilidad,* $P(X_i)$	*Desviación cuadrada con respecto a la media de 28.1* $[X_i - E(X)]^2$	*Desviación cuadrada ponderada por la probabilidad* $[X_i - E(X)]^2 P(X_i)$
$X_1 = 25$	0.05	$(25 - 28.1)^2 = 9.61$	0.4805
$X_2 = 26$	0.10	$(26 - 28.1)^2 = 4.41$	0.4410
$X_3 = 27$	0.15	$(27 - 28.1)^2 = 1.21$	0.1815
$X_4 = 28$	0.30	$(28 - 28.1)^2 = 0.01$	0.0030
$X_5 = 29$	0.20	$(29 - 28.1)^2 = 0.81$	0.1620
$X_6 = 30$	0.20	$(30 - 28.1)^2 = 3.61$	0.7220
	1.00		1.9900

$$\text{Var}(X) = \left[\sum_{i=1}^{6} (X_i - 28.1)^2 P(X)_i\right] = 1.9900$$

Observe que en el margen inferior de la figura 3-4 se muestran las probabilidades globales de vender 200, 100 y 0 cajas a Tiendas Grandes. Así mismo, en la columna de la derecha se presentan las probabilidades marginales de ventas a Mercados Pequeños. Sabemos además que P(ventas Mercados Pequeños = 100|ventas Tiendas Grandes = 200) = 0.5; esta probabilidad condicional se incluye en la esquina superior del cuadro de la parte superior izquierda. Sabemos también que P(ventas Mercados Pequeños = 0|ventas Tiendas Grandes = 0) = 0.5, lo que se muestra en la esquina superior del cuadro de la parte inferior derecha de la figura 3-4.

Utilizando:

$$P(AB) = P(A\backslash B)P(B)$$

se puede calcular la probabilidad conjunta:

$$P(\text{Mercados} = 100 \text{ y Tiendas} = 200) = P\text{Mercados} = 100|\text{Tiendas} = 200) \bullet P$$

$$(\text{Tiendas} = 200) = (0.5)(0.2) = 0.1$$

Análogamente:

$$P(\text{Mercados} = 0 \text{ y Tiendas} = 0) = P(\text{Mercados} = 0|\text{Tiendas} = 0)\ P(\text{Tiendas} = 0)$$
$$= (0.5)(0.4) = 0.2$$

Estas probabilidades conjuntas se muestran en los cuadros respectivos de la figura 3-4.

Ahora se puede llenar el resto de la figura 3-4, a partir del hecho de que el total de las probabilidades conjuntas de cualquier fila o columna debe ser igual a las probabilidades marginales. En la figura 3-5 se presenta la tabla completa.

Figura 3-4

Ventas a Mercados Pequeños (cajas)	*Ventas a tiendas Grandes (cajas)*			*Probabilidad marginal*
	200	*100*	*0*	
100	0.5 / 0.1			0.4
0			0.5 / 0.2	0.6
Probabilidad marginal	0.2	0.4	0.4	1.0

Figura 3-5

Las esquinas de la parte inferior derecha de los cuadros de la figura 3-5 contienen los valores de la variable aleatoria *X,* ventas totales, que es igual a la suma de las ventas a Tiendas Grandes y a Mercados Pequeños. La distribución de probabilidad de *X* se indica en las columnas 1 y 2 de la tabla 3-9.

Ventas a Mercados Pequeños (cajas)	*Ventas a tiendas Grandes (cajas)*			*Probabilidad marginal*
	200	*100*	*0*	
100	0.1 / 300	0.1 / 200	0.2 / 100	0.4
0	0.1 / 200	0.3 / 100	0.2 / 0	0.6
Probabilidad marginal	0.2	0.4	0.4	1.0

El cálculo del valor esperado de esta distribución se muestra en la columna 3 de la tabla 3-9; es decir, $E(X) = 120$ cajas. También se podría determinar el valor esperado de las ventas totales si se hubiera aplicado la ecuación 3-6 para las sumas de las variables aleatorias. Si la variable aleatoria B representa las ventas a Tiendas Grandes y L corresponde a las ventas a Mercados Pequeños, entonces $E(B) = (0.2)(200) + (0.4)(100) + (0.4)(0) = 80$ y $E(L) = (0.4)(100) + (0.6)(0) = 40$. Observe que $X = B + L$. Usando la ecuación 3-6:

$$E(X) = E(B) + E(L) = 80 + 40 = 120$$

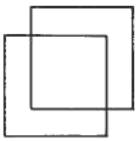
Tabla 3-9 Distribución de probabilidad para las ventas totales

(1) *Ventas en cajas* X_i	(2) *Probabilidad* $P(X_i)$	(3) $X_i \cdot P(X_i)$	(4) *Desviación cuadrada con respecto a la media de 120* $[X_i - E(X)]^2$	(5) *Desviación cuadrada ponderada por la probabilidad* $[X_i - E(X)]^2 P(X_i)$
0	0.2	0	$(0 - 120)^2 = 14{,}400$	2 880
100	0.5	50	$(100 - 120)^2 = 400$	200
200	0.2	40	$(200 - 120)^2 = 6{,}400$	1 280
300	0.1	30	$(300 - 120)^2 = 32{,}400$	3 240
	1.0	$E(X) = 120$		$\text{Var}(X) = 7\ 600$

Si lo único que nos interesara fuera el nivel de las ventas totales esperadas, éste se podría obtener fácilmente de las ventas esperadas para cada cliente. Sin embargo, la obtención de las figuras 3-4 y 3-5 fue necesaria para obtener toda la distribución de probabilidad.

En la tabla 3-9 también se calcula la varianza de las ventas totales; véanse las columnas (4) y (5).

RESUMEN



Una variable aleatoria asigna un valor numérico a resultados diversos de un proceso aleatorio. Las probabilidades de las variables aleatorias se pueden presentar en una distribución de probabilidad. El valor esperado es el promedio ponderado de los valores de una variable aleatoria, en el cual los pesos son las probabilidades de ocurrencia. La varianza y la desviación estándar son medidas de la dispersión de una variable aleatoria.

El valor esperado de la suma de variables aleatorias es igual a la suma de los valores esperados de cada una. La varianza de la suma de variables aleatorias independientes es igual a la suma de las varianzas.

Proceso de Bernoulli y distribución binomial

Se puede describir un **proceso de Bernoulli** de la siguiente manera:

1. Los resultados de cada ensayo del proceso se caracterizan por corresponder a uno de *dos tipos* de resultados posibles, como son:
   a. Éxito, fracaso.
   b. Sí, no.
   c. Cara, cruz.
   d. Cero, uno.
2. La probabilidad del resultado en cualquier ensayo es "estable" y no varía durante el proceso. Por ejemplo, la probabilidad de que caiga cara, con una

moneda legítima, es de 0.50 y no cambia, no importa cuántas veces se lance la moneda.

3. El resultado de cualquier ensayo es *independiente* del resultado de los ensayos anteriores. En otras palabras, la historia anterior del proceso no cambia la probabilidad asignada al siguiente ensayo. En el ejemplo de la moneda se asignaría una probabilidad de 0.50 a que el resultado del siguiente lanzamiento fuera cara, incluso si se hubiera registrado cara en los últimos 10 ensayos (se supone que la moneda es legítima).
4. El número de ensayos es discreto y se puede representar con un número entero como 1, 2, 3, etcétera.

Dado un proceso, se puede saber que es de Bernoulli, pero puede haber incertidumbre acerca de la probabilidad estable, característica del proceso. En el caso de una moneda legítima, podríamos saber que el proceso es de Bernoulli, con probabilidad de éxito de 0.50 (por ejemplo, cara) y 0.50 de probabilidad de fracaso (digamos, cruz). Sin embargo, si se nos entrega una moneda y se nos informa que no es legítima, el proceso (lanzar la moneda) podría ser de tipo Bernoulli, aunque no se conoce la característica de probabilidad. Por lo tanto, se puede tener un proceso de Bernoulli con característica de probabilidad conocida o desconocida.

Para fines de análisis, se pueden caracterizar muchos procesos empresariales como de Bernoulli, aun cuando no sean realmente de Bernoulli en todos los aspectos. Si el "ajuste" es bastante aproximado, se puede suponer que el proceso de Bernoulli es una caracterización razonable. Veamos algunos ejemplos.

Ejemplo 1

Suponga que nos interesa un proceso de producción en el cual se produce determinada parte (o producto) en una máquina. El punto focal del interés puede ser clasificar las partes como "buenas" o "defectuosas"; en este caso el proceso puede ser de Bernoulli. Si la máquina no se desgasta con rapidez, es decir, si la situación permanece igual para un gran número de partes, la probabilidad de producir partes buenas puede ser lo suficientemente estable para que el proceso se pueda considerar de Bernoulli. Si, por otra parte, ocurren más defectos al final de la sesión, el proceso no es de Bernoulli. En varios de los procesos de este tipo, la producción de partes buenas y defectuosas tiene la estabilidad suficiente (no se observa ningún patrón con respecto al tiempo) para considerarla como un proceso de Bernoulli. La probabilidad de partes buenas y defectuosas puede ser estable en una sesión de producción, pero puede variar de una sesión a otra (por ejemplo, debido a la configuración de la máquina). En este caso se puede considerar como un proceso de Bernoulli, pero la probabilidad de éxito (o fracaso) cambiará de una sesión a otra.

Ejemplo 2

Un ejemplo distinto de un proceso de Bernoulli es una encuesta para determinar si los consumidores prefieren jabón líquido o en polvo. El resultado de una encuesta podría caracterizarse como respuesta "sí" (éxito) o "no" (fracaso) a la pregunta. Si la muestra de los consumidores tuviera la aleatoriedad suficiente (no existe ningún patrón con respecto a la manera en que ocurren las respuestas

afirmativas y negativas), se podría describir al proceso como de tipo Bernoulli (con probabilidad desconocida).

Observe que si la probabilidad de éxito en un proceso de Bernoulli es de 0.50, la probabilidad de fracaso también será de 0.50 (ya que las probabilidades de que ocurra el suceso y de que no ocurra suman uno). Si la probabilidad de éxito es *p,* la probabilidad de fracaso es (1 - *p).*

Distribución de probabilidad binomial

Para responder las preguntas sobre probabilidades relacionadas con un proceso de Bernoulli, hay que saber cuál es el parámetro de probabilidad del proceso, como 0.50 en el ejemplo de la moneda legítima. También hay que conocer el número de ensayos que se usarán. Entonces, para analizar un proceso de Bernoulli, hay que saber (1) la característica de probabilidad del proceso,/?, y (2) el número de ensayos, *n.*

Los símbolos y las relaciones que se presentan en la tabla 3-10 son de utilidad.

Relación o símbolo	*Interpretación*
$P(R = r\|p, n)$	Probabilidad de que un número desconocido de éxitos, R (la variable aleatoria) sea *igual* que un número específico, *r* (digamos 10), dado un número de ensayos específico, *n* (por ejemplo, 20) y una probabilidad específica, *p,* de éxito en cada ensayo.
$P(R \geq r\|p, n)$	Probabilidad de que el número de éxitos sea *mayor o igual* que un número específico, r, dados valores para *p* y *n.* A esto se le conoce como probabilidad *acumulada.* La tabla C (en el apéndice al final del libro) contiene los valores de las probabilidades acumuladas.
$P(R > r\|p, n)$	Probabilidad de que el número de éxitos sea *mayor que* un número específico. Esta desigualdad es exclusiva; es decir: $P(R > 10)$ excluye a 10 e incluye a los números 11 y mayores.
$P(R \leq r\|p, n)$	Probabilidad de que el número de éxitos sea *menor o igual* que un número específico (por ejemplo, 10).
$P(R < r\|p, n)$	Probabilidad de que el número de éxitos sea *menor que* un número específico.
$P(R = 10) = P(R \geq 10) - P(R \geq 11)$	La probabilidad de que ocurran exactamente 10 éxitos puede obtenerse del apéndice C restando dos probabilidades acumuladas. Si se resta $P(R > 11)$ a $P(R 10)$, el resultado es la probabilidad de que ocurran *precisamente* 10.
$P(R < 10) = 1 - P(R \geq 10)$	Como las probabilidades suman 1, si se resta a 1 la probabilidad de obtener 10 éxitos o más, el resultado es la probabilidad de que ocurran menos de 10 éxitos.

Tabla **3-10** (continuación)

Relación o símbolo	*Interpretación*
$P(R \leq 10) = 1 - P(R \geq 11)$	Puesto que *menor o igual* que 10 incluye a 10, reste a 1 la probabilidad de 11 éxitos o más.
$P(R > 10) = P(R \geq 11)$	Para leer una desigualdad estricta de la tabla C del apéndice, sume 1 al número deseado. La relación $P(R > 10)$ excluye a 10, por lo que esta probabilidad es igual a $P(R > 11)$, que incluye a 11 pero excluye a 10.

Función de probabilidad binomial

Si se cumplen las hipótesis del proceso de Bernoulli, y la probabilidad de éxito en un ensayo es *p,* entonces la distribución de probabilidad de un número de **éxitos,** *R,* en *n* ensayos, es una **distribución binomial.** La función de distribución de probabilidad binomial es:

$$P(R|n, p) = \frac{n!}{R!(n - R)!} p^R(1 - p)^{n - R} \qquad \textbf{(3-11)}$$

donde *n!* (llamado factorial de *n)* equivale a $n(n - 1)\ (n - 2)...(2)(1)$ y 0! se define como igual a 1.

Los cálculos de la ecuación 3-11 pueden ser tediosos si el número de ensayos es grande. Por esta razón se presentan las tablas de la distribución binomial acumulada al final del libro, en el apéndice C. La tabla 3-10 muestra una gama de definiciones de probabilidad e indica cómo utilizar la tabla C del apéndice.

Ejemplo 1 Suponga que una moneda legítima se lanzará tres vez y que se desea calcular las siguientes probabilidades:

a. La probabilidad de tres caras en tres lanzamientos.
b. La probabilidad de dos o más caras en tres lanzamientos.
c. La probabilidad de menos de dos caras en tres lanzamientos.

En este ejemplo, la *p* del proceso de Bernoulli es 0.50 y se considera un éxito cuando caiga cara. El número de ensayos *(n)* es tres.

La primera probabilidad es de obtener tres caras (éxitos) en tres lanzamientos (tres ensayos), con probabilidad de 0.50 de que caiga cara en cualquier lanzamiento. La probabilidad deseada se puede representar de la siguiente manera:

$$P(R = 3 | p = 0.50, n = 3) = ?$$

donde P = probabilidad, R = número de éxitos, n = número de ensayos y p = probabilidad de éxito en un ensayo. El lado izquierdo de la ecuación debe leerse

"la probabilidad de tres éxitos, si la probabilidad del proceso es 0.50 y hay tres ensayos".

Antes de responder las preguntas acerca de las probabilidades, presentemos todos los resultados posibles de los tres ensayos y calculemos las probabilidades (véase Tabla 3-11; *H* = cara, *T*= cruz).

Probabilidades	*Interpretación*
a. $P(R = 3 \mid p = 0.50, n = 3) = 1/8$	La probabilidad de tres caras en tres ensayos es un octavo. Ésta es la probabilidad de *HHH;* véase Tabla 3-11.
b. $P(R \geq 2 \mid p = 0.50, n = 3) = 4/8$	La probabilidad de dos caras o más es de cuatro octavos. Ésta es la probabilidad de dos caras más la probabilidad de tres y se calcula sumando las probabilidades de las siguientes combinaciones: *HHH, HHT, HTH, THH.*
c. $P(R < 2 \mid p = 0.50, n = 3) = 4/8$	La probabilidad de que ocurran menos de dos caras es la probabilidad de cero o una cara y se calcula sumando las probabilidades de las siguientes combinaciones: *TTH*, *THT, HTT, TTT.*

Las probabilidades también pueden calcularse con la ecuación 3-11, como se presenta en el siguiente ejemplo correspondiente al problema *a*.

$$P(R = 3 \mid p = 0.5, n = 3) = \frac{3!}{3!(0!)} (0.5)^3 (0.5)^0 = 0.1250$$

Tabla 3-11

Resultados posibles	*Probabilidad de cada resultado*
HHH	1/8
HHT	1/8
HTH	1/8
THH	1/8
TTH	1/8
THT	1/8
HTT	1/8
TTT	1/8
	1

Por último, las probabilidades también se pueden obtener de la tabla C del apéndice.

Cálculos	*Explicación*
a. $P(R = 3 \mid p = 0.50, n = 3) = 0.1250$	Consulte la tabla C del apéndice bajo $n = 3, p = 0.50$; busque en la columna $P(R \geq 3) = 0.1250$ y luego reste a esto: $P(R \geq 4) = 0$
b. $P(R \geq 2 \mid p = 0.50, n = 3) = 0.5000$	(es imposible que ocurran cuatro éxitos en tres ensayos). La respuesta es 0.1250, o un octavo. En la tabla C busque bajo $n = 3, p = 0.50$ y lea el valor para $R > 2$; la respuesta es 0.50. Si deseara obtener $P(R = 2)$, se calcularía de la siguiente manera: $P(R \geq 2 \mid 0.50, 3) = 0.5000$ Menos: $P(R \geq 3 \mid 0.50, 3) = 0.1250$ $P(R = 2 \mid 0.50, 3) = 0.3750$
c. $P(R < 2 \mid p = 0.50, n = 3) = 0.5000$	Esta probabilidad es igual a $1 - P(R \geq 2) = 1 - 0.50 = 0.50$

Ejemplo 2 Se tomará una muestra de un lote de bienes de manufactura para revisar su calidad.[2] Suponga que se considera que el 10% de los elementos del lote son defectuosos y que se toma una muestra de 20 elementos del lote. ¿Cuáles son las siguientes probabilidades?

1. Probabilidad de que no existan defectuosos en la muestra.
2. Probabilidad de más de un defectuoso en la muestra.
3. Probabilidad de menos de dos defectuosos en la muestra.

La respuesta se puede obtener como sigue. Sea $p = 0.10$ y $n = 20$. Entonces:

$$a.\quad P(R = 0 \mid p = 0.10, n = 20) = P(R \geq 0) - P(R \geq 1)$$
$$= 1.0 - 0.8784 = 0.1216$$

La probabilidad de que existan cero defectuosos o más es 1.0 y $P(R \geq 1)$ se lee directamente de la tabla C.

[2] De manera estricta, el lote es de tamaño finito, los elementos de la muestra no son independientes y por consiguiente las hipótesis de Bernoulli no se satisfacen exactamente; en este caso debería emplearse otro tipo de distribución, la *distribución hipergeométrica.* Sin embargo, si el tamaño del lote es grande con respecto a la muestra, es pequeño el error que introduce la aplicación de la hipótesis de Bernoulli.

b. $P(R > 1) = P(R \geq 2) = 0.6083$, de la tabla C.
c. $P(R < 2) = 1.0 - P(R \geq 2) = 1.0 - 0.6083 = 0.3917$

RESUMEN

Un proceso de Bernoulli supone un número específico de ensayos, cada uno de los cuales tiene dos resultados posibles; la probabilidad de cada resultado no cambia y los ensayos son independientes.

La distribución de probabilidad binomial da las probabilidades de cada número posible de sucesos en cierta cantidad de ensayos de un proceso de Bernoulli. Las probabilidades binomiales se pueden determinar con la tabla C del apéndice.

Bibliografía

Blake, I. R, *An Introduction to Applied Probability,* Nueva York, John Wiley & Sons, 1979

Ewart, P. J., J. S. Ford y C. Y. Lin, *Probability for Statistical Decision Making,* Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1974.

Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications,* vol. 1, tercera edición, Nueva York, John Wiley & Sons, 1968.

Hodges, J. L., Jr., y E. L. Lehmann, *Elements ofFinite Probability,* segunda edición, San Francisco, Holden-Day, 1970.

Kemeny, J. G., A. Schleifer, Jr., J. L. Snell y G. L. Thompson, *Finite Mathematics with Business Applications,* segunda edición, Englewood Cliffs, Prentice Hall, 1972.

Mosteller, F., R. E. K. Rourke y G. B. Thomas, Jr., *Probability with Statistical Applications,* segunda edición, Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing, 1970.

Ross, S., *A First Course in Probability,* Nueva York, Macmillan, 1976.

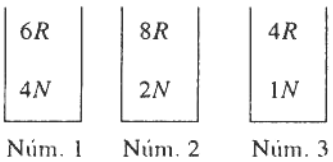
Samson, D. *Managerial Decision Analysis,* Homewood, 111., Richard D. Irwin, 1988.

Spurr, W. A. y C. P. Bonini, *Statistical Analysis for Business Decisions,* edición revisada, Homewood, 111., Richard D. Irwin, 1973.

Problemas con respuestas

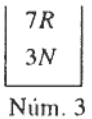
3-1. Calcule las siguientes probabilidades que se relacionan con tres lanzamientos de una moneda legítima:
a.P (tres caras).
b.P (dos o más caras en tres lanzamientos).
c.P (una cruz o más en tres lanzamientos).
d.P (último lanzamiento igual a cara).

3-2. Hay tres urnas:



Saque una bola de la número 1; si es roja, pase a la número 2; si es negra, vaya a la número 3.

a. ¿Cuál es *P* (roja en la segunda extracción, si es roja en la primera)?
b. ¿Cuál es *P* (negra en la segunda extracción, si es roja en la primera)?
c. ¿Cuál es *P* (roja en la segunda extracción, si es negra en la primera)?
d. ¿Cuál es *P* (negra en la segunda extracción, si es negra en la primera)?
e. ¿Cuál es *P* (negra en la segunda extracción)?
f. Responda las preguntas (a)-(e) si la urna número 3 fuera la siguiente:



3-3. Suponga que tiene una moneda con probabilidad de 0.60 de que caiga cruz y 0.40 de que caiga cara.

Determine lo siguiente:

a. En dos lanzamientos, la probabilidad de:
(1) Dos caras.
(2) Dos cruces.
(3) Una cara.
(4) Una o más caras.
(5) Una o más cruces.
(6) Una cruz o menos.

b. En tres lanzamientos, la probabilidad de:
(1) Tres caras.
(2) Dos caras.
(3) Una cara.
(4) Una cara o más.

3-4. Se clasifican 35 directores ejecutivos por edad y puesto funcional anterior, como se indica en la siguiente tabla:

Puesto funcional anterior	*Edad*		
	Menos de 55	*Más de 55*	*Total*
Finanzas	4	14	18
Mercadotecnia	1	5	6
Otro	4	2	6
Total	9	21	30

Suponga que se selecciona al azar un ejecutivo de este grupo.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que el ejecutivo tenga menos de 55 años? ¿Qué tipo de probabilidad es (marginal, condicional, conjunta)?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que el ejecutivo que se escoge al azar tenga más de 55 años y su puesto funcional anterior haya sido en mercadotecnia? ¿Qué tipo de pro babilidad es?

c. Suponga que se selecciona un ejecutivo y se le informa a usted que su puesto anterior fue en finanzas. ¿Cuál es la pro babilidad de que el ejecutivo tenga menos de 55 años? ¿Qué tipo de probabilidad es?

d. ¿Son factores independientes la edad y el puesto funcional anterior en este grupo de ejecutivos?

3-5. A los valores posibles de la proporción de defectuosos de un proceso de manufactura se le asignan las probabilidades siguientes. Calcule el valor esperado, la varianza y la desviación estándar de la variable aleatoria, la proporción de defectuosos.

Suceso	*Probabilidad del suceso*
0.01 de defectuosos	0.10
0.02 de defectuosos	0.15
0.03 de defectuosos	0.20
0.04 de defectuosos	0.30
0.05 de defectuosos	0.20
0.10 de defectuosos	0.03
0.15 de defectuosos	0.02
	1.00

3-6. Use las tablas binomiales para obtener las siguientes probabilidades:

a. $P(R = 4|0.50,10)$
b. $P\{R > 4|0.50,10)$
c. $P(R > 4|0.40, 8)$
d. $P(R < 4|0.20,10)$
e. $P(R = 0|0.30,10)$
f. $P(R > 5|0.60,10)$

Para (*f*), consulte la nota al pie de la primera página de la tabla C del apéndice.

3-7. Suponga que la probabilidad de que un ven dedor efectúe una venta en una casa seleccionada al azar es de 0.1. Si el vendedor realiza 20 visitas al día, determine lo siguiente:

a. La probabilidad de que no venda nada.
b. La probabilidad de una venta.
c. La probabilidad de cuatro ventas o más.
d. La probabilidad de más de cuatro ventas.
e. La probabilidad de cuatro ventas.

3-8. Remítase al ejemplo del capítulo que se relaciona con la figura 3-3. Suponga que el primer lanzamiento resulta cara. Calcule las probabilidades modificadas (a posteriori) para la moneda legítima y la ilegítima.

Problemas

3-9. ¿Cuál de las siguiente distribuciones de frecuencia serían "objetivas" y cuáles serían "subjetivas"?

a. Número de caras en 100 000 lanzamientos de una moneda.
b. Número de caras en los próximos 100 000 lanzamientos de una moneda que no ha si do probada.
c. Número de años "prósperos" en la próxima década.
d. Los beneficios de Ford Motor Company en los próximos cinco años (años "renta bles" y años de "pérdidas").
e. La probabilidad de extraer al azar el nombre de un varón del directorio de estudian tes de Cornell University.

3-10. Discuta los siguientes enunciados:

a. "Hay una probabilidad de 1.5 de que el siguiente presidente sea _____."
b. "La probabilidad de que el sol no salga mañana es de - 1.0."
c. "Hay 0.40 de probabilidad de que apruebe el examen y 0.70 de que lo suspenda."

3-11. Analice si los siguientes sucesos son dependientes o independientes.

a. (1) Que los Gigantes de San Francisco ganen la Serie Mundial de béisbol.
(2) Que los Gigantes de San Francisco ganen el título de la Liga Nacional de béisbol.
b. (1) Los ahorros que se obtienen al usar una máquina en el año 2.
(2) Los ahorros derivados de usar la misma máquina en el año 1.
c. (1) La venta exitosa de un automóvil de alto precio después de
(2) La venta exitosa de una línea de ropa de bajo costo.

3-12. Considere dos urnas:

	Urna 1	*Urna 2*
Bolas rojas	7	4
Bolas negras	3	6

$P(R_1)$ = *P* de una bola roja en la primera extracción.
$P(R_2)$ = *P* de una bola roja en la segunda extracción.
$P(N_1)$ = *P* de una bola negra en la primera extracción.
$P(N_2)$ = *P* de una bola negra en la segunda extracción.

a. Tome una bola de la urna 1, vuelva a colocarla y tome una segunda bola. Cuál es la probabilidad de:
(1) Extraer dos bolas rojas.
(2) Una bola roja en la segunda extracción si extrajo una roja en el primero.
(3) Una roja en el segunda extracción si sacó una negra en el primero.
b. Saque una bola de la urna 1 y colóquela de nuevo. Tome una bola de la urna 2 si la primera bola fue negra; de lo contrario, saque una bola de la urna 1. Cuál es la probabilidad de:
(1) Sacar dos bolas rojas.
(2) Una bola roja en el segundo ensayo si sacó una roja en el primero.
(3) Una roja en el segundo ensayo si extrajo una negra en el primero.

3-13. Elabore un diagrama de árbol para el problema 3-12a.

3-14. Elabore un diagrama de árbol para el problema *3-l2b*.

3-15. Prepare una tabla de probabilidades conjuntas para el problema 3-12*a*.

3-16. Prepare una tabla de probabilidades conjuntas para el problema 3-12*b*.

3-17. *a.* ¿Cuál es la probabilidad de obtener ocho caras en ocho lanzamientos de una moneda legítima?
b. Suponga que una moneda legítima se lanza siete veces y cae siempre cara. ¿Cuál es la probabilidad de que el octavo lanzamiento sea cara? Explique su respuesta.

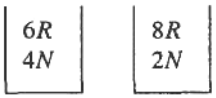
3-18. Suponga que hay una caja que contiene seis bolas rojas y cuatro negras. Se extraen dos bolas, una por una, sin reemplazar la primera bola. Haga lo siguiente para este experimento:

a. Elabore un diagrama de árbol que muestre el proceso.
b. Prepare una tabla de probabilidades con juntas.
c. Calcule las siguiente probabilidades:

$$P(N_2|N_1)$$
$$P(R_2|N_1)$$
$$P(R_2|R_1)$$

3-19. Suponga que hay dos urnas:

Existe la misma probabilidad de escoger cualquiera de las urnas. Usted toma una urna,



Núm. 1 Núm. 2

saca una bola y ve que es roja. Usted quiere saber cuál es la urna que tiene. No puede mirar dentro de la urna.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que haya extraído una bola de la urna 1? y, ¿de la urna 2?
b. Si la bola fuera negra, ¿cuál es la probabilidad de que provenga de la urna 1 ?

3-20. Se llevó a cabo un estudio entre los lectores de una revista. Los resultados indicaron que el 60% de los lectores eran dueños de sus casas y tenían ingresos superiores a 25 000 dólares por año; el 20% eran dueños de sus casas pero sus ingresos eran menores de 25 000 dólares; el 10% tenían ingresos mayores de 25 000 dólares pero no eran dueños de sus casas; y el 10% restante no eran dueños de sus casas ni tenían ingresos mayores de 20 000 dólares.

a. Suponga que se selecciona al azar un lector de esta revista y a usted se le informa que la persona es dueña de su casa. ¿Cuál es la probabilidad de que la persona tenga ingresos superiores a 25 000 dólares?
b. ¿Son factores independientes la propiedad de la casa y los ingresos (medidos sólo como mayores o menores que 25 000 dólares) para este grupo?

3-21. Se realizó una encuesta de familias en una zona urbana y en el área suburbana circundante. Las familias se clasificaron de acuerdo con sus hábitos de ver o no dos programas de televisión. Los datos se muestran al final de la página como porcentajes con respecto al total.

a. Si se selecciona al azar una familia de este grupo, ¿cuál es la probabilidad de que vea ambos programas?
b. Si la familia seleccionada ve el programa A, ¿cuál es la probabilidad de que también vea el programa B?
c. ¿Son independientes los sucesos "ve el programa A" y "ve el programa B"?
d. El suceso "ve el programa B", ¿es independiente del suceso "urbano"?
e. Considere el suceso "ve cualquiera de los programas o ambos". ¿Es independiente del suceso "urbano"?

3-22. Un director de ventas elabora la siguiente lista de probabilidades de distintos niveles de ventas de un producto nuevo:

Probabilidad	*Ventas (en unidades)*
0.10	50
0.30	100
0.30	150
0.15	200
0.10	250
0.05	300

	Ve el programa A				
	Sí		*No*		
Ve el programa B	*Urbano*	*Suburbano*	*Urbano*	*Suburbano*	*Total*
Sí	10%	14%	5%	1%	30%
No	15%	21%	20%	14%	70%
Total	25%	35%	25%	15%	100%

Calcule la media, la varianza y la desviación estándar para la variable aleatoria "ventas" *(Recomendación:* Para que los cálculos sean más sencillos, considere los bloques de 50 como una unidad. Así, 200 equivale a cuatro, 250 es cinco, etcétera).

3-23. Un gerente elabora el plan de su división para el año próximo. Los beneficios (5) se consideran como una función lineal de las ventas (X) y los costos fijos *(Y),* como sigue:

$$B - \$20X - Y$$

Suponga que el gerente no está seguro de las ventas ni de los costos fijos, pero está dispuesto a representarlos como variables aleatorias independientes cuyos valores esperados y desviaciones estándar sean:

$E(X) =$ 10 000 unidades $\sigma_X =$ 2000 unidades
$E(Y) =$ 150 000 dólares $\sigma_Y =$ 50 000 dólares

¿Cuál es el valor esperado y la desviación estándar de la variable aleatoria B?

3-24. Remítase al ejemplo que se relaciona con las figuras 3-4 y 3-5, de este capítulo. Suponga que las probabilidades marginales de Tiendas Grandes y Mercados Pequeños son las que se presentan en la figura 3-4, pero que las ventas a ambos clientes son independientes. Determine la distribución de probabilidades de la variable aleatoria "ventas totales".

3-25. Especifique cuáles de los siguientes procesos son de Bernoulli:

a. Un vendedor que hace visitas a domicilio.
b. Colocar monedas en una máquina tragamonedas que sólo tiene dos resultados: premio o nada.
c. La compra de acciones en el mercado bursátil.
d. La inspección de rollos de alambre duran te su manufactura para encontrar defectos.
e. La inspección de moldes al salir de la línea de producción.

Proporcione una explicación breve para cada una de sus respuestas.

3-26. Use la tabla de la distribución binomial y encuentre las siguientes probabilidades:

a. $P(R = 6|0.28, 12)$
b. $P(R \leq 2|0.45, 8)$
c. $P(R \geq 5|0.65, 15)$
d. $P(R \leq 10|0.85, 20)$
e. $P(R \geq 4|0.25, 14)$
f. $P(R \geq 10|0.75, 18)$

Para las partes (*c*), *(d)* y (*f*), véase la nota al pie de la primera página de la tabla C del apéndice.

3-27. Una línea aérea tiene en operaciones un avión de 14 plazas y permite que se acepten hasta 16 reservas confirmadas para un vuelo. Los datos históricos indican que hay 30% de probabilidad de que cada pasajero no se presente. ¿Cuál es la probabilidad de que se impida el acceso a una o más personas si se confirman 16 reservas para el vuelo?

3-28. Bruce Jones ha solicitado el ingreso a cinco escuelas que en enero indican al solicitante una de tres clasificaciones: "seguro", "posible" y "poco posible". Bruce ha recibido la notificación de que es "posible" en las cinco escuelas. Los resultados anteriores indican las siguiente probabilidades para cada escuela:

Seguro: 0.98 de probabilidad de aceptación
Posible: 0.30 de probabilidad de aceptación
Poco posible: 0.005 de probabilidad de aceptación

a. ¿Cuál es la probabilidad de que Bruce sea aceptado por una escuela o más? (Suponga independencia.)
b. ¿Cuál es la probabilidad de que las cinco escuelas acepten a Bruce?

3-29. Un contador va a efectuar la auditoría de 24 cuentas de una empresa. Dieciséis de estas cuentas corresponden a clientes de alto volumen. Si el contador selecciona al azar cuatro cuentas, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos una sea de alto volumen?

Recomendación: Encuentre primero la probabilidad de que ninguna de las cuentas sea de alto volumen.

3-30. Dos equipos de béisbol se han enfrentado 10 veces y el equipo rojo ha ganado en seis encuentros. Se considera que los resultados anteriores son indicativos de los resultados futuros. Ahora los dos equipos se enfrentarán en un torneo de eliminación. Suponga que el resultado de cada uno de los juegos es independiente de los demás.

a. Si los equipos se enfrentan en un juego, ¿cuál es la probabilidad de que gane el equipo rojo?

b. Si los equipos juegan en una serie para ganar dos de tres partidos, ¿cuál es la probabilidad de que gane el equipo rojo?
c. Si los equipos juegan para ganar cuatro de siete encuentros, ¿cuál es la probabilidad de que gane el equipo rojo?

3-31. El presidente de un compañía de energía eléctrica tiene que decidir si compra un generador grande o cuatro pequeños para obtener cierta capacidad de generación de energía eléctrica. Durante el verano, la probabilidad de que un generador esté en servicio en un día cualquiera es de 0.95 (todos los generadores tienen la misma fiabilidad) La probabilidad de una avería es de 0.05.
a. ¿Cuál es la probabilidad de que el genera dor grande esté fuera de servicio en un día cualquiera?
b. ¿Cuál es la probabilidad de que ninguno o uno de los generadores pequeños esté fue ra de servicio?
c. Si se compran cinco generadores pequeños, ¿cuál es la probabilidad de que funcionen por los menos cuatro?
d. Si se compran seis generadores pequeños, ¿cuál es la probabilidad de que por lo menos cuatro funcionen?

3-32. Suponga que lanza una moneda hasta obtener cuatro caras. ¿Cuál es la probabilidad de que esto ocurra en exactamente siete lanzamientos?

Recomendación: El séptimo lanzamiento tiene que dar cara, por lo que tres de los primeros seis lanzamientos deberán ser cara para que se cumpla la condición.

3-33. Usted está a cargo del departamento de planificación a largo plazo de una compañía británica de construcción. Existe la posibilidad de realizar dos proyectos de gran magnitud en el periodo que se considera: un túnel bajo el Canal de la Mancha, hasta Francia, y una base de misiles en Inglaterra para la Fuerza Aérea de Estados Unidos. Los dos proyectos requerirán, hasta cierto punto, distinto equipo y diversas habilidades de ingeniería. La compañía que haya adquirido parte de estos factores especializados tendrá ventaja en la negociación del contrato. Su empresa no tiene los recursos necesarios para hacerse cargo de ambos proyectos, por lo cual el presidente le ha dado instrucciones de elegir uno de ellos. Después de consultar con varios miembros del Parlamento, usted llega a la conclusión de que la circunstancia decisiva que afecta el proyecto del túnel es la respuesta que tendrá la solicitud que Inglaterra hizo con el fin de obtener concesiones comerciales con el Mercado Común. Los expertos opinan que si Inglaterra obtiene las concesiones, la probabilidad de construir el túnel es de 0.8. Si Inglaterra no obtiene las concesiones, los expertos opinan que la probabilidad se reduciría a 0.1. Usted piensa que la probabilidad de que Inglaterra obtenga las concesiones es de 0.3 para el periodo en cuestión. Después usted viaja a Washington para efectuar un análisis similar de las probabilidades de la base de misiles y se sorprende al averiguar que los planificadores militares estadounidenses están preocupados por las noticias con respecto al túnel. Si el túnel se construye, sólo hay una posibilidad en 10 de que la Fuerza Aérea autorice el sistema de misiles; la probabilidad sería de 0.50 si no se construyera. Si usted acepta las evaluaciones subjetivas de las probabilidades que le brindan sus informantes, ¿qué acción propondría para que su empresa maximice la probabilidad de éxito? 3-34. Los artículos de los diarios muchas veces señalan que un pequeño número de conductores (digamos, un 10%) es responsable de todos los accidentes de automóviles en cada año. Con frecuencia se llega a la conclusión de que si se identificaran estos conductores propensos a los accidentes y se les retirara de las carreteras, el número de accidentes se podría reducir considerablemente. Usted averigua que de 100 000 conductores que tuvieron accidentes en un año, 11 000 tuvieron por lo menos un accidente en el año siguiente.
a. Con base en esta información, complete la siguiente tabla de probabilidades con juntas.
b. ¿Opina usted que la búsqueda de conductores propensos a tener accidentes es una manera efectiva de reducir los accidentes de automóviles? ¿Por qué?

Primer año \ *Segundo año*	*Accidente*	*Sin accidente*	*Probabilidad marginal del suceso en el primer año*
Accidente			0.10
Sin accidente			0.90
Probabilidad marginal del suceso en el segundo año	0.10	0.90	1.00

Problemas más difíciles

3-35. El comisionado de seguridad de una ciudad realizó un estudio de las muertes de peatones en cruces de carreteras. Observó que sólo seis de las 19 muertes correspondían a peatones que cruzaban con la luz roja (es decir, desobedeciendo el reglamento), mientras que las otras 13 personas habían cruzado con la luz *verde.* Esta situación extrañó al comisionado, ya que las cifras parecían indicar que era dos veces más seguro para el peatón cruzar con la luz roja que con la verde. ¿Puede usted explicar al comisionado esta contradicción aparente?

3-36. Suponga que existe una nueva prueba para detectar la adicción a las drogas. La prueba tiene precisión del 95%, en ambos sentidos; es decir, si la persona *es* adicta, hay 95% de posibilidad de que la prueba indique "sí"; si la persona *no* es adicta, la prueba indicará "no" en el 95% de las veces. Se sabe que en poblaciones urbanas la incidencia de adicción a las drogas es aproximadamente de una persona en 10 000. Si la prueba genera un resultado positivo (sí), ¿cuál es la probabilidad de que sea adicta la persona a la que se aplicó la prueba/

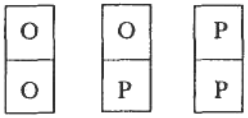
3-37. Se lanza un satélite para recopilar datos sobre las condiciones atmosféricas de un planeta lejano. El satélite contiene dos celdas de energía, cada una de las cuales tiene 90% de probabilidad de funcionar correctamente. Las celdas están ubicadas en lugares distintos del satélite, por lo cual es casi imposible que la avería de una celda esté relacionada con la otra (es decir, son independientes). El satélite contiene también dos instrumentos de medición: el principal y el de respaldo. Los dos están juntos, por lo que no se considera que sea independiente la fiabilidad de los instrumentos. Las probabilidades de éxito y fracaso son:

Instrumento principal \ *Instrumento de respaldo*	*Bueno*	*Avería*
Bueno	0.6	0.2
Avería	0.1	0.1

El instrumento principal sólo requiere una celda de energía para operar, pero el de respaldo necesita las dos celdas. La misión del satélite será un éxito si funciona cualquiera de los instrumentos. ¿Cuál es la probabilidad de éxito de la misión?

3-38. El siguiente es un problema de probabilidad clásico. Pruebe su intuición antes de resolverlo en forma sistemática.

Suponga que hay tres cajas y que cada una tiene dos cajones. En cada uno de los cajones hay una moneda de oro o de plata. Una caja tiene dos monedas de oro, otra tiene una de oro y una de plata, y la tercera tiene dos de plata. Se escoge al azar una de las cajas y al abrir uno de los cajones se observa una moneda de oro.



¿Cuál es la probabilidad de abrir el segundo cajón de la caja y observar una moneda de oro?

3-39. Suponga que puede elegir entre dos apuestas diferentes. En una sabe que hay 50 bolas rojas y 50 negras en un frasco, que se sacará totalmente al azar una de las bolas y recibirá un premio si adivina el color de la bola. En la segunda apuesta hay un número desconocido de bolas rojas y negras en un frasco y recibirá un premio si adivina el color de la bola que se saque.

¿En cuál apuesta preferiría participar? ¿Por qué?

3-40. Un restaurante tiene capacidad para 100 personas. Hace poco, el dueño decidió regalar un pastel de cumpleaños a cualquier persona que cumpliera años el día que cenara en el restaurante. Suponiendo que $p = 1/365 = 0.003$ y $n = 100$, el dueño encontró el siguiente dato en una tabla binomial:

$$P(R \geq 6 | n = 100, p = 0.01) = 0.0005$$

El dueño pensó que, como la p era menor que 0.01, esta probabilidad debería ser un límite superior de la probabilidad de regalar seis o más pasteles de cumpleaños cada noche. Por lo tanto, pidió cinco pasteles cada noche. Después de 10 noches, en tres le habían faltado pasteles. ¿Qué supone que estuvo mal en el análisis?

3-41. La compañía Acmé tiene dos almacenes en ciudades distintas. La demanda del producto es independiente en el distrito de cada almacén. Sin embargo, los dos almacenes tienen distribuciones de probabilidad idénticas para la demanda, como se presenta a continuación:

Demanda (unidades)	*Probabilidad*
0	0.10
1	0.50
2	0.30
3	0.10
	1.00

Suponga que los dos almacenes tienen normalmente dos unidades en existencia.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que uno u otro de los almacenes tenga más demanda que existencias?

b. ¿Cuál es la probabilidad de que ambos almacenes queden sin existencias?

3-42. Remítase al problema 3-41. Suponga que la compañía Acmé consolida los dos almacenes en uno solo que surte a las dos ciudades. El almacén consolidado tendrá cuatro unidades en existencias.

a. Determine la distribución de probabilidad de la demanda para el almacén consolidado.

b. ¿Cuál es la probabilidad de que falte una unidad en las existencias del almacén consolidado? ¿Dos unidades? Compare los resultados con las respuestas que se obtuvieron en el problema 3-41.

3-43. El profesor Smullyan describe una isla en la cual todos los habitantes son caballeros o bribones.[3] Los caballeros nunca mienten y los bribones nunca dicen la verdad. Suponga el 80% de los habitantes (tanto caballeros como bribones) están a favor de elegir al profesor Smullyan como rey de la isla. La isla está poblada por caballeros en un 60% y por bribones en un 40%, pero no se puede saber quién es quién. Suponga que toma una muestra aleatoria de 10 habitantes y les pregunta "¿Está a favor de que Smullyan sea el rey?"

[3] Raymond Smullyan, *What is the Name of This Book,* Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1978.

¿Cuál es la probabilidad de que reciba seis o más respuestas "sí"?

3-44. Han descubierto que un desperfecto en un sistema eléctrico, se puede deber a las siguientes partes, con las probabilidades que se indican:

Parte	*Probabilidad de causar el desperfecto*
A	0.40
B	0.10
C	0.30
D	0.20
	1.00

a. Suponiendo que las partes se pueden revisar con la misma rapidez, ¿en qué orden propondría que se revisaran las partes? ¿Por qué?

b. Suponga ahora que el tiempo necesario para revisar las partes es el que sigue (suponga que hay que revisar las partes una por una):

Parte	*Tiempo para revisión (horas)*
A	2
B	1
C	¾
D	⅓

En estas condiciones, ¿qué orden propondría para la revisión de partes si hay que detectar una descompostura en el menor tiempo promedio posible? ¿Por qué?

3-45. A usted le interesa saber cuál será el precio de las patatas en el próximo año. Hay tres factores que afectan este precio: la superficie sembrada de trigo invernal, la superficie sembrada con patatas y las condiciones climáticas. La combinación de una gran superficie sembrada de patatas y de condiciones climáticas favorables darán como resultado un precio de dos dólares por quintal (45.36 kilogramos). Si las condiciones climáticas son favorables pero la superficie que se siembra de patatas es mediana, el precio será de cuatro dólares por quintal. Con una superficie pequeña y un clima favorable, el precio ascenderá a seis dólares por quintal. Si el clima no es bueno, el precio, en cada uno de los casos, aumentará dos dólares por quintal. Usted determina que hay una probabilidad de 0.8 de clima favorable y 0.2 de clima desfavorable. El clima es independiente de la superficie que se siembre.

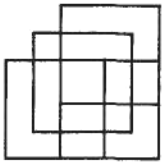
La superficie que se siembra con patatas varía en cierta medida de acuerdo con la superficie que se siembra con trigo invernal. Con base en su experiencia previa, calcula que hay un 30% de posibilidad de que se siembre gran cantidad de trigo invernal y un 30% de que se siembre poco. Si la siembra de trigo invernal es cuantiosa, la probabilidad de siembra de una superficie grande de patatas es de cero; la de que sea una superficie mediana, ⅔; y la de que sea una superficie pequeña, ⅓. Si es poca la siembra de trigo invernal, las probabilidades de que la superficie para patatas sea grande, mediana o pequeña son de ⅔, ⅓ y ⅔, respectivamente. Considere el precio de las patatas como variable aleatoria y determine la distribución de probabilidad para ella. ¿Cuál es el precio esperado?

3-46. John McEnroe es famoso por sus arrebatos de ira durante los partidos de tenis. Un experto en estadística observó que John ganaba más puntos que los que perdía inmediatamente después de enojarse. A partir de lo anterior llegó a la conclusión de que John se beneficiaba de sus arrebatos. Evalúe la conclusión.

3-47[4]**.** Hay 15 taxis azules y 85 verdes. Un testigo informó que un taxi azul ocasionó un accidente y huyó. Sin embargo, hay pruebas de que los testigos se equivocan el 20% de las veces (y están en lo cierto el 80% de las veces). ¿Cuál es la probabilidad de que el taxi no haya sido azul?

[4] Esta pregunta se basa en S. C. Salop, "Evaluzting Uncertain Evidence with Sir Thomas Bayes: A Note for Teachers", *The Journal of Economics Perspectives,* págs. 155-159, verano de 1987.

CAPÍTULO 4



Toma de decisiones en condiciones de incertidumbre: Modificación de probabilidades

En este capítulo se considera la aplicación de los conceptos de probabilidad a las decisiones empresariales que deben tomarse en condiciones de incertidumbre. Se desarrollará un medio para tomar decisiones consistentes y para estimar el costo de la incertidumbre. En un principio se propondrá el valor monetario esperado como criterio adecuado para tomar decisiones; más adelante se describirán las limitaciones del valor monetario esperado y se propondrán modificaciones en el análisis.

También se presentará la oportunidad de experimentar, es decir, de recopilar información adicional y modificar las probabilidades antes de tomar la decisión.

Valor condicional

Suponga que un tendero se enfrenta al problema de determinar cuántas cajas de leche debe tener en existencia para satisfacer las demandas del día siguiente. Suponga que la leche que no se venda en el día representará una pérdida total para el tendero. Además, la demanda insatisfecha no tiene mayor costo que la venta perdida; pero el cliente insatisfecho regresará. Este ejemplo es muy simple pero sirve para ilustrar los principios básicos del valor esperado y del valor condicional. En el análisis del problema del tendero, sería útil saber algo acerca de las ventas en el pasado, partiendo de la hipótesis de que la experiencia puede servir como guía con respecto a lo que sucederá. Suponga que el tendero en cuestión ha llevado un registro, como el que se muestra en la tabla 4-1.

Tabla 4-1 Demanda histórica

Demanda total por día	*Número de días en los que se registró la demanda*	*Probabilidad de cada suceso*
25 cajas	20	0.10
26 cajas	60	0.30
27 cajas	100	0.50
28 cajas	_20	(H0
	200	1.00

Tabla 4-2 Valores condicionales

	Acciones posibles			
Suceso: Demanda	*Almacenar 25*	*Almacenar 26*	*Almacenar 27*	*Almacenar 28*
25 cajas	$50*	$42	$34	$26
26 cajas	50	52*	44	36
27 cajas	50	52	54*	46
28 cajas	50	52	54	56*

* Mejor acción para el suceso (mayor beneficio de cada fila).

La tabla de valores condicionales (Tabla 4-2), con precio de compra (costo variable) de ocho dólares por caja y precio de venta de 10 dólares por caja, es una descripción del problema que tiene el tendero. Las acciones posibles (número de cajas que se comprarán) que puede emprender el tendero aparecen en la parte superior de la tabla. Por supuesto, se pueden comprar 24 o 29 cajas, o más; pero si las ventas fueron de 25 a 28 cajas en los últimos 200 días, el tendero puede considerar que la probabilidad de que ocurrieran existencias mayores que 28 o menores que 25 sería cero. También haremos esta suposición. Los sucesos posibles (concebibles) —las ventas posibles en este ejemplo— se presentan en la columna del extremo izquierdo. Si el tendero está dispuesto a asignar probabilidades que correspondan a los datos históricos, entonces los sucesos (ventas) distintos de los que se incluyen tendrían probabilidad cero; se les considera sucesos imposibles.

Se puede considerar a la tabla 4-2 como una tabla de **valor condicional** o de beneficios condicionales. Para cada acción que emprenda el tendero y cada suceso que ocurra hay ciertos beneficios condicionales. Los beneficios son condicionales en el sentido de que dependen de cierta acción y de cierta demanda (suceso). La tabla 4-2 muestra todas las combinaciones posibles. Por ejemplo, si se almacenan 26 cajas y la demanda fuera de 25 cajas, el tendero tendría beneficios de 42 dólares (o sea, 25 ' 10 - 26 " 8). La mejor acción para cada suceso posible se indica con un asterisco.

Veamos los cálculos de cada una de las cantidades monetarias correspondientes a la columna de la acción "Almacenar 27", en la tabla 4-3. Hay que realizar cálculos similares para las acciones "Almacenar 25", "Almacenar 26" y "Almacenar 28".

Los cálculos de la tabla 4-3 reflejan el hecho de que si hay 27 cajas en existencia, sólo se pueden vender 27, incluso si la demanda es de 28 cajas. Por esto, el beneficio alcanza un máximo de 54 dólares para la venta de 27 unidades y se mantiene en ese nivel incluso si la demanda es de 28 cajas.

Tabla de pérdidas

Además de elaborar la tabla que muestra los beneficios condicionales (Tabla 4-2), también se puede construir una tabla que muestre las *pérdidas de oportunidad* condicionales (Tabla 4-4). Considere la acción "Almacenar 28"; si la demanda fuera de 28, el tendero tendría un beneficio de 56 dólares. Es lo mejor que puede obtener con una demanda de 28. Si la demanda fuera de 28 y el tendero sólo tuviera 27 cajas en almacén, el beneficio habría sido de 54 dólares; entonces, esta acción implicaría una *pérdida de oportunidad* de dos dólares en comparación con la *mejor* acción para una demanda de 28. Si la demanda fuera de 28 y el tendero tuviera 26 cajas en existencia, la pérdida de oportunidad condicional sería de cuatro dólares ($56 - $52). La **pérdida de oportunidad** se puede definir en términos generales como *los beneficios que se pierden por no escoger la mejor acción para cada suceso.* Con base en esta definición se puede elaborar la tabla de pérdida de oportunidades de la tabla 4-4.

Hay que hacer hincapié en que los beneficios (o pérdidas) condicionales se relacionan con los beneficios condicionados por dos cosas:

1. La ocurrencia de un suceso.
2. Una acción determinada.

No sabemos si va a ocurrir el suceso; entonces, hay incertidumbre y, por lo tanto, los beneficios condicionales de una decisión no corresponden a un número,

Tabla 4-3 Beneficios condicionales de la acción "Almacenar 27"

Suceso: Demanda	*Precio de venta*	*Ingresos totales*	*Costo de 27 cajas (27 • $8)*	*Beneficios condicionales de la acción "Almacenar 27"*
25 cajas	$10	$250	$216	$34
26 cajas	10	260	216	44
27 cajas	10	270	216	54
28 cajas	10	270	216	54

Tabla 4-4 Perdidas de oportunidad condicionales

	Acción			
Suceso: Demanda	*Almacenar 25*	*Almacenar 26*	*Almacenar27*	*Almacenar 28*
25 cajas	$0	$8	$16	$24
26 cajas	2	0	8	16
27 cajas	4	2	0	8
28 cajas	6	4 . 2		0

Cálculos de las pérdidas de oportunidad condicionales

Suceso: Demanda	*Acción óptima para cada suceso*	*Beneficios de la acción óptima*	*Diferencia entre el beneficio de la acción óptima y la acción de almacenamiento*			
			Almacenar 25	*Almacenar 26*	*Almacenar 27*	*Almacenar 28*
25	25	$50	$50 - $50 = $0	$50 - $42 = $8	$50 - $34 = $16	$50 - $26 = $24
26	26	52	52 - 50 = 2	52 - 52 = 0	52 - 44 = 8	52 - 36 = 16
27	27	54	54 - 50 = 4	54 - 52 = 2	54 - 54 = 0	54 - 46 = 8
28	28	56	56 - 50 = 6	56 - 52 = 4	56 - 54 = 2	56 - 56 = 0

sino a una tabla de beneficios (o pérdidas) asociados con los sucesos posibles. El beneficio sería de 44 dólares sólo si se almacenan 27 unidades y si la demanda real es de 26 unidades. Si la demanda no fuera de 26 unidades, el beneficio real no sería de 44 dólares.

Valor monetario esperado

Aunque las pérdidas y los valores condicionales ayudan a caracterizar el problema del tendero, aún no es posible presentar una solución óptima. El tendero podría elegir la mejor opción si supiera cuál será la demanda de mañana, pero en el ejemplo no se dispone de esta información. El problema del tendero es asignar probabilidades a los sucesos posibles y luego analizar las alternativas de acción. Las probabilidades serían las que se presentan en la tabla 4-5 si se basaran en la información histórica (véase Tabla 4-1). Si el tendero cree que, por alguna razón, la demanda de mañana variará con respecto al patrón observado, será necesario modificar la asignación de probabilidades.

El siguiente paso es incorporar al análisis las probabilidades asignadas. Esto se hace *ponderando los valores condicionales de cada suceso de la tabla de valores condicionales según la probabilidad de ocurrencia del suceso y luego sumando los productos.* El número que se obtiene es el **valor monetario esperado** para la acción; la acción óptima es aquella que presenta el mayor valor monetario esperado. En la tabla 4-6 se presentan los cálculos para las acciones de almacenar 26 y 27 unidades; los cálculos serían similares para 25 y 28 unidades.

Tabla 4-5

Suceso: Demanda	*Probabilidad del suceso*
25 cajas	0.10
26 cajas	0.30
27 cajas;	0.50
28 cajas	0.10
	1.00

Tabla 4-6 Cálculo de los valores monetarios esperados

		Acción: Almacenar 26		*Acción: Almacenar 27*	
Suceso: Demanda	*Probabilidad del suceso*	*Valor condicional (VC)*	*VC ponderado por la probabilidad del suceso*	*Valor condicional (VC)*	*VC ponderado por la probabilidad del suceso*
25 cajas	0.10	$42	$ 4.20	$34	$ 3.40
26 cajas	0.30	52	15.60	44	13.20
27 cajas	0.50	52	26.00	54	27.00
28 cajas	0.10	52	5.20	54	5.40
	1.00				
Valor monetario esperado			$51.00		$49.00

Tabla 4-7 Resumen de los valores monetarios esperados

Acción	*Valor monetario esperado*
Almacenar 25	$50
Almacenar 26	51 (acción óptima)
Almacenar 27	49
Almacenar 28	42

En la tabla 4-6, el valor monetario esperado (VME) se calcula multiplicando cada valor condicional por su probabilidad y después sumando los valores condicionales ponderados. La tabla 4-7 muestra los valores monetarios esperados para las cuatro acciones. Para la acción "almacenar 26", el tendero calcula un valor monetario esperado de 51 dólares, el más elevado. Entonces, con base en el valor monetario esperado, hay que almacenar 26 cajas.

Observe que el VME de 51 dólares no representa el beneficio de cualquier día; es el beneficio esperado o promedio. Si la decisión se repitiera durante varios días (con las mismas probabilidades) el tendero obtendría un promedio de 51 dólares

diarios si almacenara 26 cajas de leche. Incluso si no repite la decisión, la acción con mayor VME es la mejor alternativa disponible.

En resumen, el plan para resolver el problema del tendero es:

1. Elaborar una tabla de beneficios (valores condicionales) que muestre las acciones y los sucesos que se consideran como posibles e incluir los resultados para cada acción y suceso. Al presentar sucesos, asegure que sean mutuamente excluyentes (es decir, verifique que no puedan ocurrir dos sucesos o más al mismo tiempo) y que el conjunto de sucesos sea exhaustivo (es decir, que abarque todas las posibilidades). Esta tabla incluye los aspectos económicos del problema (costos, ingresos y beneficios): presenta un valor (o pérdida condicional) para cada combinación de acción y suceso.
2. Asignar probabilidades a los sucesos.
3. Calcular un VME para cada acción ponderando (multiplicando) los valores condicionales por las probabilidades asignadas y sumando los valores condicionales ponderados para obtener el VME de la acción.
4. Elegir la acción con mayor VME.

Pérdida de oportunidad esperada

El tendero también puede elegir la mejor acción por medio de la minimización de la **pérdida de oportunidad** esperada (POE). Este procedimiento es idéntico al descrito, con la excepción de que en vez de usar la tabla de beneficios (tabla de valores condicionales, tabla 4-2) y los beneficios condicionales, se usa la tabla de pérdidas de oportunidad condicional (Tabla 4-4) y las pérdidas de oportunidad condicionales. En la tabla 4-8 se muestran los cálculos de las acciones "Almacenar 26" y "Almacenar 27."

A partir de la tabla 4-9, se observa que el tendero deberá escoger la acción "Almacenar 26", que presenta pérdidas esperadas por 2.20 dólares, la cifra más baja de las cuatro pérdidas de oportunidad esperadas.

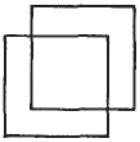
Tabla 4-8 Cálculo de perdidas de oportunidad esperadas

		Acción: Almacenar 26		*Acción: Almacenar 27*	
Suceso: Demanda	*Probabilidad del suceso*	*Pérdidas condicionales (PC)*	*PC ponderadas por la probabilidad del suceso*	*Pérdidas condicionales (PC)*	*PC ponderadas por la probabilidad del suceso*
25 cajas	0.10	$8	$0.80	$16	$1.60
26 cajas	0.30	0	0.00	8	2.40
27 cajas	0.50	2	1.00	0	0.00
28 cajas	0.10	4	0.40	2	0.20
	1.00				
Pérdida de oportunidad esperada			$2.20		$4.20

Tabla 4-9 Resumen de las pérdidas de oportunidad esperadas

Acción	*Pérdidas de oportunidad esperadas*		*Comparación de las pérdidas de oportunidad esperadas con lo óptimo*
Almacenar 25	$ 3.20		$1
Almacenar 26	2.20	(acción óptima)	0
Almacenar 27	4.20		2
Almacenar 28	11.20		9

RESUMEN



Hagamos un resumen de las diversas mediciones de la rentabilidad que se han presentado:

Valor condicional. Beneficio real que se obtendría de una acción, condicionado por la ocurrencia de un suceso.

Pérdida de oportunidad condicional. Pérdida relativa (es decir, los beneficios que no se obtienen) al emprender una acción, condicionada por la ocurrencia del suceso.

Valor monetario esperado. Valores condicionales ponderados por la probabilidad de ocurrencia de los sucesos y sumados para cada acción.

Pérdida de oportunidad esperada. Pérdidas de oportunidad esperadas, ponderadas por la probabilidad de ocurrencia de los sucesos y sumadas para cada acción.

La acción óptima es aquella con mayor valor monetario esperado y, por lo tanto, con la menor pérdida de oportunidad esperada.

Utilidad esperada

Aunque el valor monetario esperado es una buena guía para determinar la acción apropiada en varios casos, hay ocasiones en que no lo es. Esto no destruye el modelo del valor esperado; significa que se debe modificar el análisis cuando la situación lo requiera. Consideremos una de las mayores dificultades que surgen del uso del valor monetario esperado.

Suponga que un gerente tiene la oportunidad de invertir 500 000 dólares en un producto nuevo. Si el producto tiene éxito, el beneficio neto será de un millón de dólares; en cambio, si fracasa, se perderán los 500 000 dólares que se invirtieron en el desarrollo, en la producción y en la venta del producto. En la tabla 4-10 se presenta la tabla de valores condicionales del gerente.

Si, después de recoger pruebas, el gerente asigna una probabilidad subjetiva de 0.90 para el éxito, el VME de la acción "Invertir" sería de 850 000 dólares ($1 000 000 x 0.90 - $500 000 * 0.10 = $850 000), en comparación con un VME de cero para la acción "No invertir". Suponga ahora que la empresa se

Tabla 4-10 Valor condicional

	Acción	
Suceso	*Invertir*	*No invertir*
Éxito del producto	$1 000 000	0
Fracaso del producto	− 500 000	0

encuentra en una situación financiera muy difícil y que una pérdida de 500 000 dólares la llevaría a la bancarrota. En este caso el VME sería una guía deficiente para determinar la acción. El gerente no estaría dispuesto a aceptar una probabilidad de 0.10 de perder 500 000 dólares, sin importar la magnitud de los beneficios condicionales o el VME, debido a las consecuencias poco deseables de la pérdida. En este caso, al gerente le provocaría problemas la pérdida y hay que incorporar esta situación en el análisis.

Si se ignoraran los aspectos de la utilidad, o en el problema la utilidad del dinero fuera aproximadamente lineal (véase Cap. 5), el VME serviría como guía razonable para determinar la acción. Por ejemplo, si las pérdidas potenciales no son muy grandes y el margen de beneficio esperado es estrecho, por lo general no son significativas las consideraciones de utilidad. Esta situación es la que prevalece en el problema del tendero, por lo que el VME es adecuado.

Sin embargo, si se contemplan acciones que implican pérdidas potenciales de gran magnitud, puede ser conveniente alterar el análisis e incorporar los aspectos de la utilidad. Esto se logra calculando el valor de la utilidad esperada de las acciones posibles, en vez del valor monetario esperado; en el capítulo 5 se analizará la modificación del análisis. Por el momento supondremos que se trata de situaciones en la cuales los aspectos de utilidad no tienen importancia (es decir, el valor monetario esperado es una medida razonable de la utilidad esperada).

Beneficio esperado con pronósticos perfectos

Regresemos al problema del tendero y planteemos la siguiente pregunta: ¿Cuál es el beneficio que *esperaría* obtener el tendero si pudiera *pronosticar con certeza* la demanda de cada día, un día antes de que realmente ocurriera?" Para responder esta pregunta, construyamos una tabla de valores condicionales que muestre los beneficios condicionales de la *mejor* acción para cada suceso. La tabla 4-11 se construye escogiendo la mejor acción y el registro de los beneficios más altos para cada suceso (esta información se obtiene de la Tabla 4-2). Por ejemplo, si se sabe que la demanda de mañana será 27, se almacenarían 27 cajas y el beneficio sería de 54 dólares. Si se almacenaran 26 cajas, se perdería el beneficio de dos dólares correspondiente a una caja; si las existencias fueran de 28 cajas, sería necesario desechar una unidad, con pérdida de ocho dólares. La tabla 4.11 muestra los beneficios que se obtienen de la mejor acción para cada suceso posible.

Tabla 4-11 Tabla de valores condicionales para las decisiones óptimas con pronósticos perfectos

	Acción			
Suceso: Demanda	*Almacenar 25*	*Almacenar 26*	*Almacenar 27*	*Almacenar 28*
25 cajas	$50			
26 cajas		$52		
27 cajas			$54	
28 cajas				$56

Vamos ahora a convertir estas cifras de beneficios óptimos condicionales en valores esperados, ponderando los beneficios de cada suceso por la probabilidad de ocurrencia. Los cálculos se muestran en la tabla 4-12, donde los **beneficios esperados con pronósticos perfectos** (53.20 dólares) son los beneficios medios que podría recibir el tendero si pudiera predecir la demanda de cada día. En este caso se pediría la cantidad óptima cada día.

Antes de usar el pronóstico perfecto, el tendero tenía incertidumbre acerca del pronóstico, pues podía ocurrir uno de cuatro sucesos. Antes del pronóstico, los beneficios son *valores esperados,* ya que no se sabe cuál es el suceso que ocurrirá. Para que el tendero pueda decidir si usa el pronóstico, deberá asignar un valor al pronóstico perfecto y comparar este valor con el costo del otro pronóstico. Recuerde que antes de comprar la información no sabemos cuál será el pronóstico.

Valor esperado de la información perfecta

En muchos problemas de decisión el gerente se enfrenta a la duda de actuar de inmediato o posponer la acción y buscar más información. Lo más importante para el gerente es equilibrar el *costo* de la información adicional con el *valor* (beneficios adicionales) de la información. Por lo general es más fácil calcular la parte de costo de esta decisión (costo de obtener la información) que el valor de la información. Sin embargo, si se utiliza el modelo del valor esperado se cuenta con una manera de cuantificar el valor de la información adicional.

Tabla **4-12** Beneficios esperados con pronósticos perfectos

Suceso: Demanda	*Probabilidad del suceso*	*Beneficios condicionales (BC)*	*BC ponderados por la probabilidad del suceso*
25 cajas	0.10	$50	$ 5.00
26 cajas	0.30	52	15.60
27 cajas	0.50	54	27.00
28 cajas	0.10	56	5.60
Beneficios esperados con pronósticos perfectos			$53.20

En el ejemplo del tendero se mostró, en la tabla 4-12, que el beneficio esperado con pronósticos perfectos era de 53.20 dólares. Antes, en la tabla 4-7, se mostró que el VME de la mejor acción en una situación de incertidumbre, "Almacenar 26", era de 51 dólares. La diferencia,

$$\$53.20-\$51 = \$2.20$$

es el aumento en el beneficio esperado que se obtiene con una información gratuita de pronóstico perfecto. Entonces, 2.20 dólares es el **valor esperado de la información perfecta (VEIP).** En otras palabras:

VEIP = Beneficios esperados con pronósticos perfectos - VME (acción óptima)

Observe, en la tabla 4-9, que 2.20 dólares es también la *pérdida de oportunidad esperada* de la acción óptima. Este resultado se podría prever, ya que la predicción perfecta reduciría a cero la pérdida de oportunidad que existe en situaciones de incertidumbre. Entonces, la pérdida de oportunidad esperada de la acción óptima mide el VEIP. Con la identidad siguiente se revisan los cálculos efectuados:

VME (de cualquier acción) + POE (de la misma acción) _ Beneficios esperados con pronósticos perfectos

Este cálculo se exhibe en la tabla 4-13.

Es importante señalar que es la POE de la *acción óptima* la que es igual al VEIP. Si el tendero elige la acción "Almacenar 28", el VME será de 42 dólares, y la POE de 11.20 dólares. El VEIP *no* es de 11.20 dólares, ya que el tendero puede aumentar el VME a 51 dólares si elige otra acción ("Almacenar 26") y para esto *no* se requiere información adicional. El valor de la información adicional se mide a partir de la hipótesis de que elegirá la acción óptima con base en la información disponible.

Análisis de sensibilidad de las probabilidades subjetivas

La estimación de probabilidades es uno de los pasos más difíciles al aplicar el criterio de decisión del valor monetario esperado. En ocasiones se puede evitar

Tabla 4-13

	Acción			
	Almacenar 25	*Almacenar 26*	*Almacenar 27*	*Almacenar 28*
VME (con incertidumbre)	$50.00	$51.00	$49.00	$42.00
POE	3.20	2.20	4.20	11.20
Beneficios esperados (con pronósticos perfectos)	$53.20	$53.20	$53.20	$53.20

este paso si se deja hasta el final la estimación de probabilidades. Para cada acción se puede encontrar una gama de probabilidades dentro de la cual la acción es óptima. Luego, el decisor determina en qué intervalo están las probabilidades.

Ilustraremos esta situación con un ejemplo anterior. En la tabla 4-10 se presentaron valores condicionales para la decisión de un producto nuevo (un millón de dólares si el producto tenía éxito; 500 000 dólares si fracasaba; y cero si no se introducía). Sea p la probabilidad de éxito y, por lo tanto, $(1 - p)$ la probabilidad de fracaso del nuevo producto. Suponiendo que el decisor desea usar el criterio VME, el valor esperado de la introducción del producto es:

$$\begin{aligned} \text{VME} &= p(1\,000\,000) + (1 - p)(-500\,000) \\ &= -500\,000 + 1\,500\,000p \end{aligned}$$

Para introducir el producto, el VME debe ser mayor que cero. Es decir:

$$-500\,000 + 1\,500\,000 > 0$$

o

$$p > \frac{500\,000}{1\,500\,000} = \frac{1}{3}$$

Así, si el decisor considera que hay más de un tercio de probabilidad de éxito, hay que introducir el producto. Observe que para tomar la decisión no es necesario especificar un valor exacto para p.

Ejemplo Para que este concepto sea más claro, considere una vez más el ejemplo del tendero que decide cuántas cajas de leche debe almacenar. En la tabla 4-7 se determinó que la acción óptima era almacenar 26 cajas. Este resultado se obtuvo con las probabilidades de la primera columna de la tabla 4-14. Usted puede verificar que la acción "Almacenar 26" sigue siendo la óptima para todos los conjuntos de probabilidades posibles de la tabla 4-14. Entonces, el decisor puede ver que la decisión no es *sensible* a las variaciones en las probabilidades que se presentan en la tabla 4-14.' Sin embargo, hay otras probabilidades que podrían cambiar la

Tabla 4-14 Alternativas de conjuntos de probabilidades

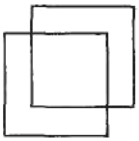
	Conjuntos de probabilidades			
Suceso: Demanda	*1*	2	*3*	*4*
25 cajas	0.1	0.2	0.05	0.1
26 cajas	0.3	0.3	0.15	0.1
27 cajas	0.5	0.4	0.40	0.3
28 cajas	0.1	0.1	0.40	0.5

[1] La acción "Almacenar 26" será la óptima mientras P(demanda - 25) < 0.20 y /"(demanda > 27) < 0.80. Este modelo se desarrolla detalladamente en el capítulo 17.

decisión. Por ejemplo, si la probabilidad del suceso "demanda de 25 cajas" fuera mayor que 0.20, entonces la decisión óptima cambia a "pedir 25 cajas".

El método general que propone este ejemplo es el *análisis de sensibilidad,* similar al que se presentó en el capítulo 2. El decisor establece un conjunto preliminar de estimaciones (de probabilidades o beneficios); después se aplican variaciones a estas estimaciones y, si las variaciones no cambian la decisión óptima, allí concluye el proceso. En cambio, si la decisión es sensible a los cambios, el gerente deberá afinar las estimaciones preliminares para tomar la decisión.

RESUMEN



Para el decisor, el valor esperado de la información perfecta es el valor de un pronóstico perfecto de un suceso incierto. El análisis de sensibilidad examina el grado en que una decisión depende de las hipótesis o estimaciones (sobre todo de las estimaciones de probabilidades), o es sensible a ellas.

Árboles de decisión

En las secciones anteriores de este capítulo se ha desarrollado el criterio de decisión del valor monetario esperado y se analizaron decisiones sencillas con tablas de valores condicionales. Esta sección describe un método general para tomar decisiones más complejas, que sirve para *estructurar* el problema de decisión y para encontrar una solución. El método utiliza un **árbol de decisión,** una herramienta gráfica para describir las acciones disponibles para el decisor, los sucesos que pueden ocurrir y la relación entre estas acciones y sucesos.

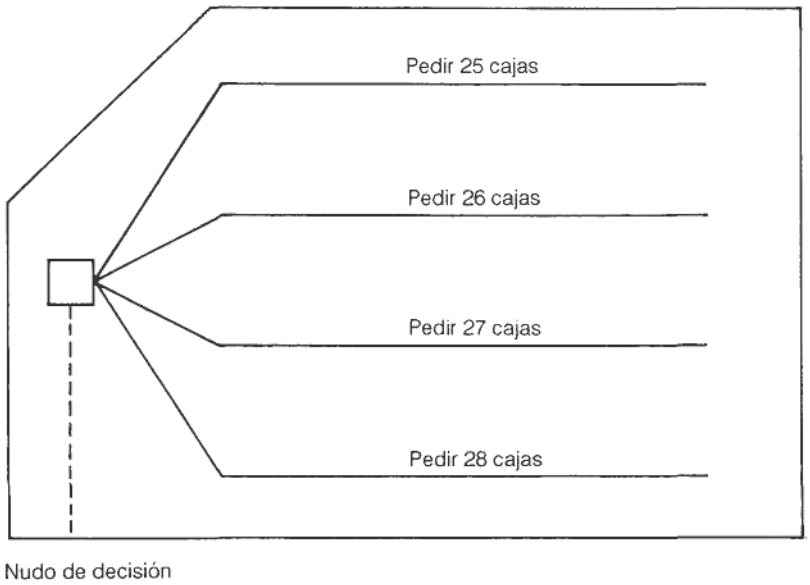
Árbol de decisión para el problema del tendero

Para ilustrar los conceptos básicos, desarrollemos el árbol de decisión para el problema del tendero, que se utilizó en la sección anterior. Recuerde que la decisión refiere a la cantidad de cajas de leche que debe pedir. El punto de decisión se representa con un *cuadrado* o *nudo de decisión* en la figura 4-1. Las alternativas se representan con *ramas* que parten el nudo de decisión.

Suponga que el tendero selecciona una alternativa, digamos el pedido de 28 cajas. Hay siete sucesos que pueden ocurrir, correspondientes al número de cajas de leche que pueden solicitar los clientes. Estos sucesos se muestran en la figura 4-2 como ramas que parten de un nudo circular (se utiliza convencionalmente un cuadrado para un nudo de decisión y un círculo para un nudo de incertidumbre o de sucesos). Observe que estas ramas representan sucesos inciertos que no puede controlar el decisor. Sin embargo, se pueden asignar probabilidades a cada suceso, las cuales están registradas entre paréntesis debajo de cada rama.

Al final de cada rama están los beneficios condicionales para la acción seleccionada y el suceso que se da (los mismos valores de la Tabla 4-2). Entonces, los benéficos condicionales representan los beneficios relacionados con las decisio-

Figura 4-1 Alternativas del tendero



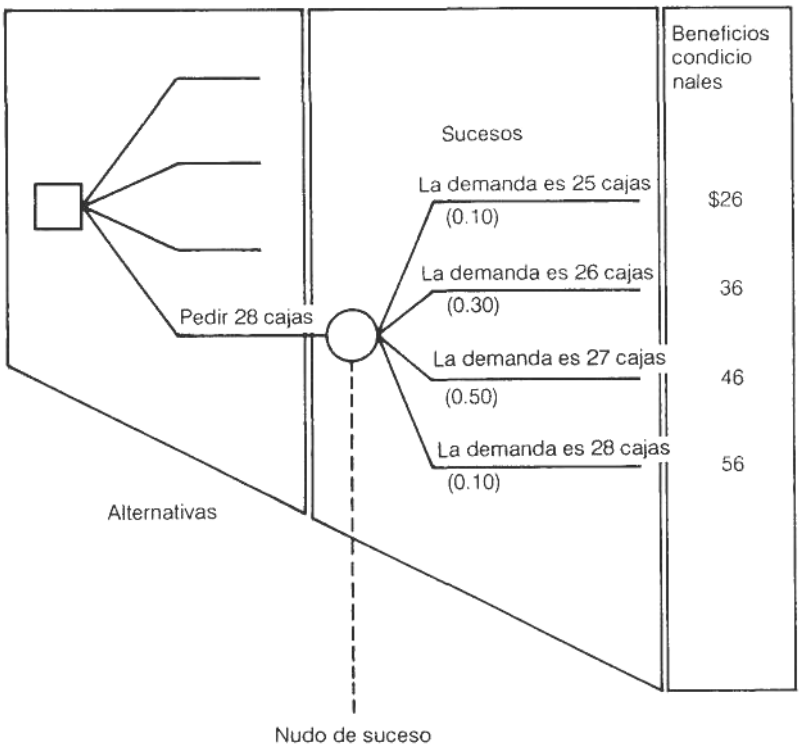
nes y los sucesos a lo largo de la ruta, desde la primera parte del árbol hasta el final. Por ejemplo, la cifra de 26 dólares de la figura 4-2 representa el beneficio que se relaciona con el pedido de 28 cajas de leche y demanda de 25 cajas.

El valor monetario esperado (VME) se calcula para cada nudo de suceso de la misma manera que en la sección anterior (véase Tabla 4-6). Es decir, se multiplican las probabilidades por los beneficios condicionales y se suman. El VME se coloca dentro del nudo de suceso para indicar que es el valor esperado que se calculó para todas las ramas que parten del nudo.

La figura 4-3 muestra el árbol de decisión completo para el problema del tendero. Observe que no es necesario incluir por separado cada suceso posible en todas las decisiones. Así, cuando se piden 26 cajas, sólo hay dos sucesos que producen beneficios condicionales diferentes: demanda de 25 cajas, con beneficio de 42 dólares, y demanda de 26 cajas o más (o sea, demanda igual a 26, 27 o 28 cajas), con beneficio de 52 dólares. Si el tendero pide 25 cajas sólo puede haber un resultado, específicamente, la venta de las 25 cajas con beneficios condicionales de 50 dólares.

En la figura 4-3 los valores monetarios esperados se muestran en los nudos de sucesos. El tendero deberá escoger la acción, y esto consiste en seleccionar la opción con mayor VME (26 cajas con VME = 51 dólares). Esto se indica en el árbol colocando 51 en el nudo de decisión (cuadrado) del inicio del árbol. Se dibuja además la marca || sobre las ramas de decisión que no son óptimas, para indicar'que no deben seguirse.

Figura 4-2 Sucesos para la alternativa "Pedir 28 cajas"

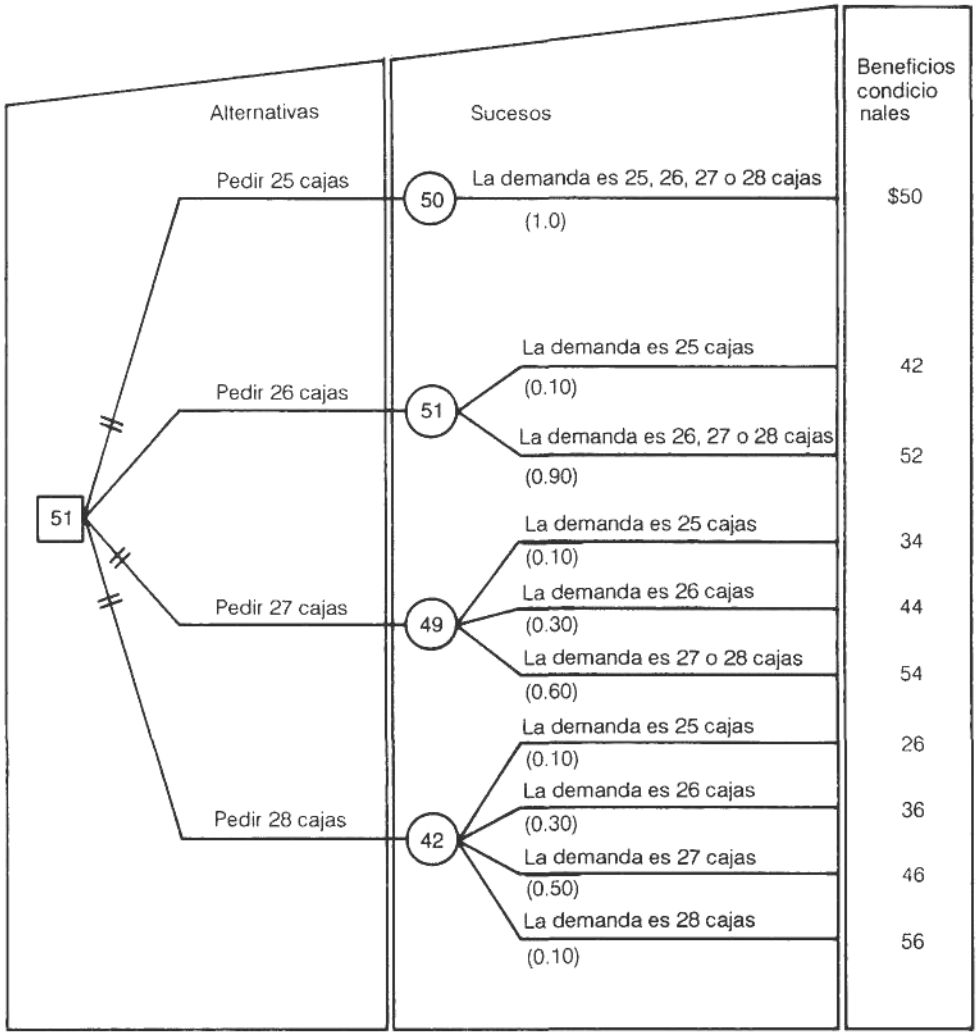


En resumen, el árbol de decisión utiliza la misma idea de maximizar el valor monetario esperado que se desarrolló en la sección anterior. En el ejemplo del tendero puede ser más fácil usar una tabla, como la tabla 4-2; sin embargo, si el problema de decisión es más complejo, el árbol de decisión es mucho más útil para organizar la información necesaria para tomar la decisión. Esto sucede sobre todo cuando el gerente tiene que tomar una *serie* de decisiones, en vez de una sola, como se verá en el siguiente ejemplo.

Ejemplo de árbol de decisión

Suponga que el gerente de mercadotecnia quiere decidir si pone a la venta un producto nuevo y cuál será el precio de venta. Los beneficios que se obtendrían dependen de que un competidor presente un producto similar y del precio que cobre. Observe que hay dos decisiones: (1) introducir o no el producto, y (2) el precio de venta. Por otra parte, hay dos sucesos: (1) la competencia introduce un producto competitivo (o no lo hace), y (2) el precio del competidor. El tiempo o la secuencia de estas decisiones y sucesos es muy importante en esta decisión. Si el gerente de mercadotecnia debe actuar antes de saber si el competidor lanzará al mercado un producto similar, el precio podría ser distinto del que sería en caso de saberlo. Un

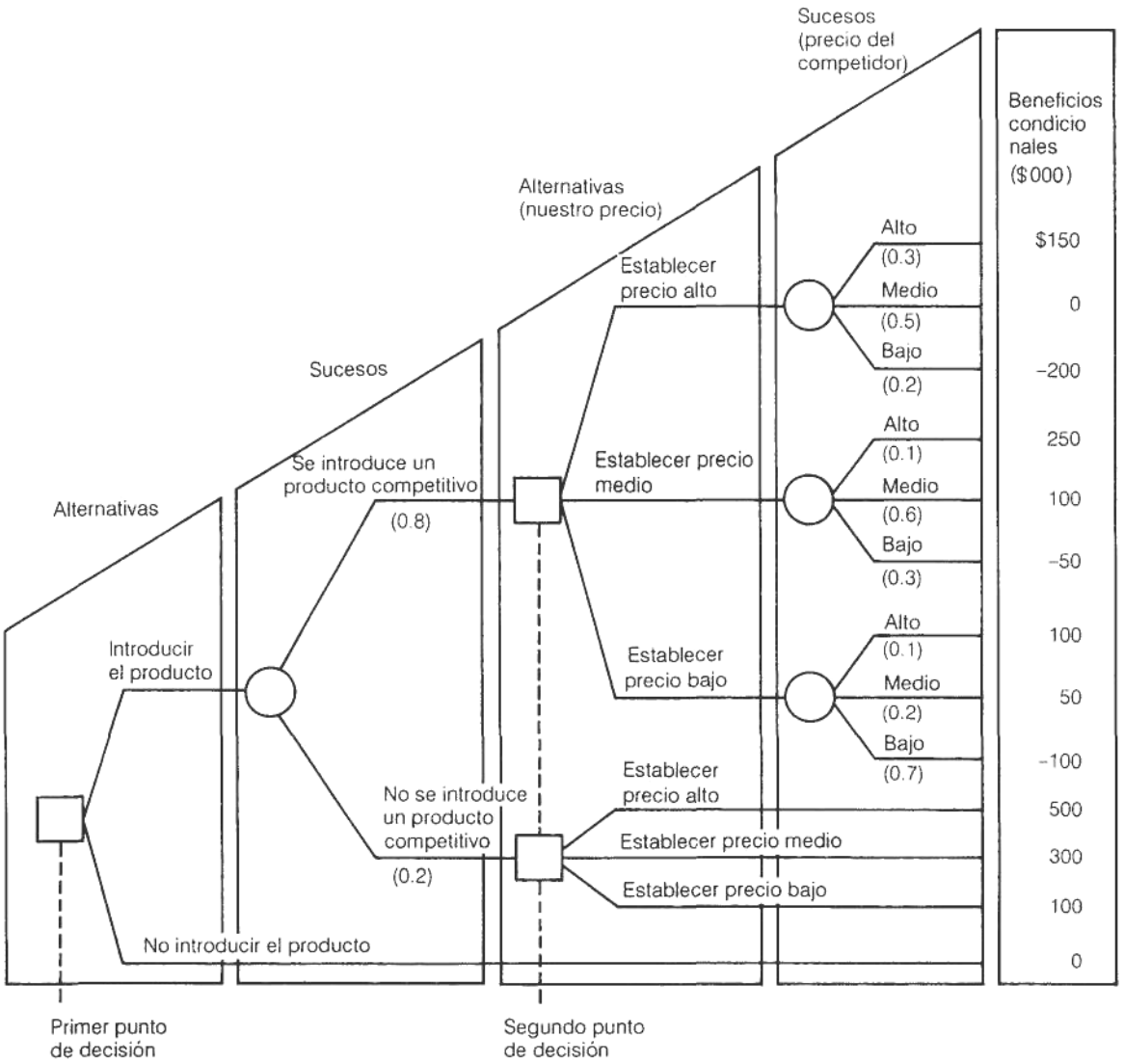
Figura 4-3 Árbol de decisión completo para el problema del tendero



árbol de decisión es útil en este tipo de situaciones, ya que presenta el orden en que se toman las decisiones y ocurren los sucesos.

Suponga que la empresa debe decidir pronto si introduce el nuevo producto o lo desecha; no obstante, la decisión acerca del precio puede venir después. Si el competidor va a actuar, presentará el nuevo producto en menos de un mes. Nuestra empresa establecerá y anunciará su precio en tres meses y más tarde anunciará su precio el competidor. Todo lo anterior se puede representar en el árbol de decisión de la figura 4-4. Observe que es un problema secuencial de decisiones. La empresa

Figura 4-4 Árbol de decisión para el ejemplo de introducción de producto



debe decidir *ahora* acerca de la introducción del producto y *posteriormente, después* de saber cuál fue la acción del competidor establecer el precio.

El árbol de decisión muestra la estructura del problema de decisión. Para que el análisis esté completo hay que estimar los beneficios condicionales para cada combinación de acciones y sucesos (es decir, para cada ruta a través del árbol). Suponga que el gerente de mercadotecnia ya efectuó este paso y los beneficios

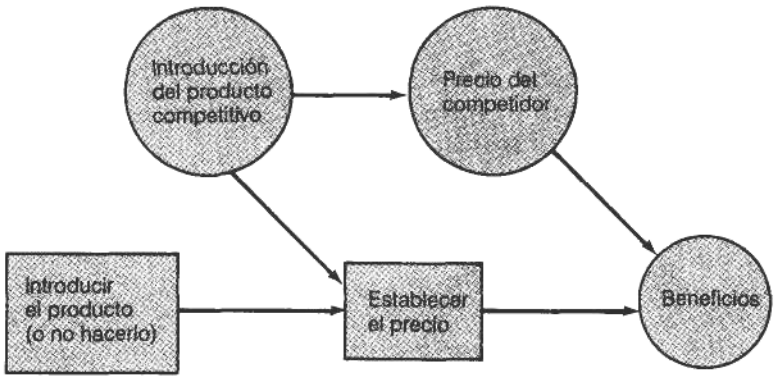
son los que se presentan en la figura 4-4, al final del árbol. Estos valores de beneficios incluyen el costo de introducción del producto y los beneficios que se obtienen de su venta. Los valores negativos indican que los costos de introducción exceden los beneficios de las ventas.

El decisor también tiene que evaluar las probabilidades de cada suceso; en el ejemplo se muestran debajo de las ramas de suceso de la figura 4-4. Observe que estas probabilidades pueden depender de acciones o sucesos anteriores. Por esto, las probabilidades del comportamiento del precio del competidor que se incluyen en la figura 4-4 son distintas cuando el precio es más alto o más bajo.

Diagrama de influencia

También podemos representar el problema del director con un *diagrama de influencia,* como se hizo en el capítulo 2 (véase la Figura 4-5). Este diagrama de influencia es bastante sencillo, por lo que puede parecer que no es muy útil para estructurar el problema de decisión y el árbol de decisión. Sin embargo, en situaciones más complejas, puede ser conveniente elaborar un diagrama de influencia antes de desarrollar el árbol de decisión detallado; el diagrama de influencia sería una forma excelente de estructurar las hipótesis acerca de los factores y de las relaciones importantes del modelo. En términos generales, recomendamos usar árboles de decisión para este tipo de problemas; sin embargo, en casos especializados, los prototipos de paquetes de *software* (DAVID, por ejemplo) son una nueva alternativa para la resolución de problemas de decisión directamente a partir del diagrama de influencia.[2]

Figura 4-5 Diagrama de influencia para el ejemplo de introducción de producto



[2] Véase R. Shachter, "DAVID: Influence Diagram Processing System for the Macintosh", en *Uncertainty in Artificial Intelligence,* vol. II, L. N. Kanal y J. Lemmer, editores, North-Holland, 1988.

Análisis del problema de decisión

Para analizar un árbol de decisión se comienza por el final del árbol y se trabaja hacia atrás. El VME de cada conjunto de ramas se calcula como se muestra, y se elige el conjunto de ramas con mayor VME (este paso se ilustra en la Figura 4-6, para nuestro ejemplo). Primero se calculan los VME de los nudos asociados con el precio del competidor. Por ejemplo, el VME de 5000 dólares del círculo superior de la derecha de la figura 4-6 representa la suma del producto de las probabilidades para los precios alto, medio y bajo y los beneficios condicionales respectivos:

$$VME = (0.3)(150) + (0.5)(0) + (0.2)(-200) = 5$$

Los demás valores se calculan en forma parecida.

Si ahora retrocedemos por el árbol de decisión hasta el segundo punto de decisión, nos enfrentamos a dos situaciones de decisión. La primera, cuando se introduce un producto competitivo, comprende el establecimiento de un precio alto, medio o bajo, con beneficios esperados de 5000, 70 000 y -50 000 dólares, respectivamente. Suponga que se escoge la opción con mayor utilidad esperada: el precio medio. Se coloca una marca || en las líneas que se relacionan con las otras alternativas, para indicar que no son óptimas, y los beneficios esperados de 70 000 dólares se incluyen en el cuadrado superior del segundo punto de decisión.

Si no se introduce un producto competitivo, la mejor opción es el precio alto, con beneficio de 500 000 dólares.

En el punto de suceso que está a la izquierda, el valor esperado de 156 000 dólares se calcula multiplicando los beneficios esperados si hay un producto competitivo (70 000 dólares) por su probabilidad (0.8) y luego sumando los beneficios si no hay un producto competitivo (500 000 dólares) multiplicados por su probabilidad (0.2). El VME, en miles, es:

$$VME = (0.8)(70) + (0.2)(500) = 156$$

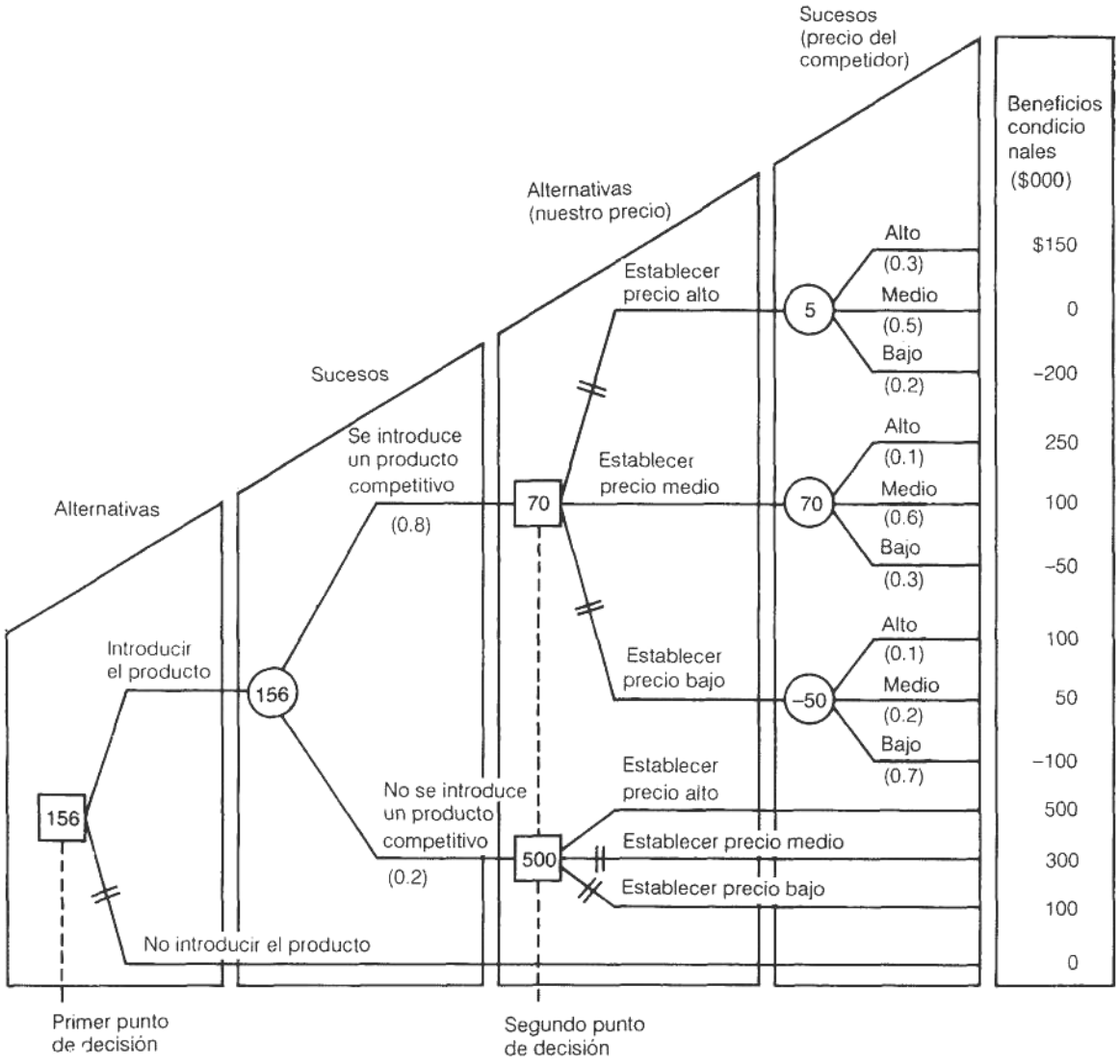
Por último, se toma la decisión de lanzar el producto al mercado, ya que el beneficio neto esperado de 156 000 dólares es mayor que el beneficio de cero si no se pone a la venta el producto.

Observe que la decisión que se obtiene del análisis del árbol de decisión no es una decisión fija, sino una *estrategia:* introducir el producto y cobrar un precio alto si no hay competencia, o cobrar un precio medio si hay un producto competitivo.

Desarrollo del árbol de decisión

El árbol de decisión es el modelo de una situación de decisión y, como todos los modelos, abstrae y simplifica el problema real. Sólo se incluyen las decisiones y

Figura 4-6 Árbol de decisión completo para el ejemplo de introducción de producto



los sucesos importantes; de lo contrario, el árbol sería demasiado "frondoso". También se requiere el juicio, no sólo para determinar lo que hay que incluir, sino también para la evaluación de probabilidades.

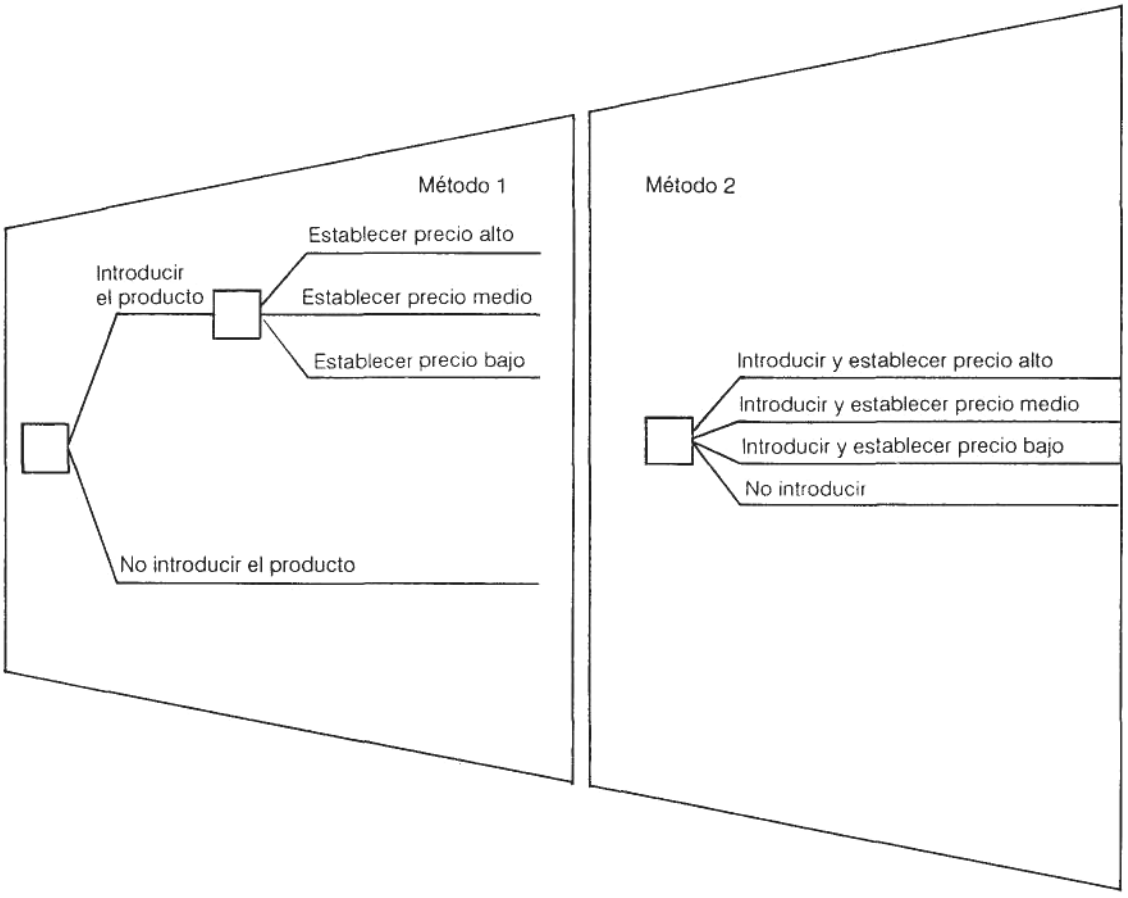
Al dibujar un árbol de decisión hay que observar ciertas reglas:

1. Las ramas que parten de un nudo deben ser del mismo tipo lógico, sean sucesos o alternativas, pero nunca una combinación.

2. Los sucesos relacionados con las ramas de un nudo de sucesos deben ser mutuamente excluyentes y deben incluirse todos los sucesos, de manera que la suma de la probabilidades sea 1.
3. Las alternativas asociadas con un nudo de decisión deben ser todas las que se consideren en ese punto.

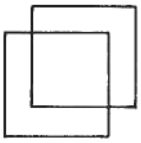
Por lo general es útil desarrollar el árbol de decisión en secuencia cronológica, para que se mantenga el orden adecuado de los sucesos y las decisiones. Sin embargo, varios aspectos de la elaboración del árbol son arbitrarios. Por ejemplo, en el caso anterior, suponga que la empresa debe anunciar su decisión con respecto al nuevo producto y establecer el precio antes de que se conozca la información acerca del competidor. La parte del árbol que se relaciona con estas decisiones podría dibujarse en dos formas equivalentes, que se exhiben en la figura 4-7.

Figura 4-7 Alternativas para elaborar el diagrama de decisión (ejemplo modificado)



Estarían disponibles exactamente las mismas opciones para elaborar el diagrama de los sucesos relacionados con la introducción del producto del competidor y su precio, si ocurrieran sin intervención de una decisión por parte de nuestra empresa. Recuerde que en el análisis previo acerca de la utilidad esperada se mencionó que el valor monetario esperado no es el criterio de decisión adecuada si los beneficios o las pérdidas condicionales son tan grandes que el decisor considera que las alternativas tienen consecuencias significativamente distintas. En estos casos se usan los valores de utilidad en el árbol de decisión, en vez de los beneficios condicionales. Este tema se considera con detalle en el capítulo 5.

RESUMEN



Un árbol de decisión es una herramienta gráfica para mostrar la secuencia de alternativas de decisión y de los sucesos que intervienen en la toma de decisiones en situaciones de incertidumbre. El análisis de un árbol de decisión se realiza calculando el valor esperado para cada nudo de suceso y eligiendo la alternativa que presente mayor beneficio para los nudos de decisión, comenzando por el final del árbol y retrocediendo por él hasta el origen.

Modificación de probabilidades

En esta sección se presenta la oportunidad de experimentar, es decir, recoger información adicional y modificar las probabilidades antes de tomar la decisión. Utilizaremos la más sencilla de las situaciones posibles, en la cual sólo hay un factor desconocido. Por ejemplo, la decisión puede depender de la demanda del producto en el próximo año. Suponga que se decidió experimentar y que la demanda es el único factor que se desconoce. En esta situación (que podría ser un problema de inventarios) el proceso de decisión es el que sigue:

1. Escoja el criterio de decisión; suponemos que será la regla de decisión del valor esperado.
2. Describa el conjunto de resultados y decisiones posibles.
3. Asigne probabilidades a los resultados posibles (estados).
4. Determine una función de beneficios (beneficios condicionales).
5. Lleve a caho un experimento.
6. Modifique las probabilidades asignadas.
7. Calcule los beneficios esperados para cada decisión.
8. Considere que la decisión óptima es la acción con mayores beneficios espe rados.

El proceso anterior supone que se ha determinado previamente que la experimentación es deseable. Ahora analizaremos esta cuestión.

Valor de la información imperfecta

Aquí presentaremos un método general para evaluar la posibilidad de obtener más información con respecto al problema de decisión. En los capítulos posteriores se ampliará este análisis.

El valor esperado de la información perfecta (VEIP), que se presentó antes, establece un límite superior para el valor de la información adicional en una situación de decisión. La mayor parte de la información que se puede obtener es **imperfecta,** en el sentido de que *no* nos dirá con precisión cuál es el suceso que ocurrirá. Incluso así, la información imperfecta puede ser valiosa si mejoran los beneficios esperados.

Aquí se pretende que el término *experimento* tenga un significado muy vasto. Un experimento puede ser un estudio realizado por economistas para pronosticar la actividad económica nacional; un estudio de clientes efectuado por una empresa de investigación de mercados; una encuesta de opinión efectuada para un candidato a un puesto político; una muestra de artículos de la línea de producción que realiza un ingeniero para verificar la calidad; o una prueba sísmica para proporcionar indicadores de la presencia de petróleo a una empresa perforadora de pozos.

En general, sólo se podrá evaluar la importancia de un experimento si se puede estimar la confiabilidad de la información resultante. Un estudio de mercado puede servir para decidir si se introduce o no un producto nuevo. Sin embargo, sólo se puede asignar un valor económico específico al experimento si el decisor puede definir, de antemano, cuál será la precisión del estudio de mercado para estimar las ventas potenciales.

Lo anterior quedará claro con un ejemplo. Suponga que el potencial de un producto nuevo será grande o pequeño (el producto será un éxito o un fracaso). En la tabla 4-15 se muestran los valores condicionales para esta decisión. El valor condicional de cuatro millones de dólares corresponde al beneficio neto (valor actual) si el potencial de ventas es grande. La cifra de -2 millones de dólares es el gasto en que se incurre si el producto no se vende bien.

Con base en el valor monetario esperado (VME) la acción adecuada es no introducir el producto. Sin embargo, el decisor no está dispuesto a renunciar a la probabilidad de 0.3 de ganar cuatro millones de dólares, por lo cual decide obtener más información antes de actuar. Como primer paso, calculemos el valor esperado de la información perfecta (VEIP). Recuerde que en este capítulo (pág. 94) se mencionó que:

VEIP = Beneficios esperados con pronóstico perfecto - VME (acción óptima)

Si hubiera un pronóstico perfecto, la compañía introduciría el producto si las ventas fueran altas, y no lo introduciría si fueran bajas, con lo que se obtiene un valor esperado de 0.3 x 4 + 0.7 x 0 = 1.2. El VME de la acción óptima (no introducir el producto) es cero. Entonces

$$VEIP = 1.2 - 0 = 1.2$$

También se puede calcular esta cifra a partir de las pérdidas de oportunidad esperadas (POE). Recuerde que:

VEIP = POE (acción óptima)

Tabla 4-15 Tabla de valores condicionales para la decisión acerca de la introducción de un producto nuevo (millones de dólares)

		Acciones	
Resultados	*Probabilidades*	*Introducir el producto*	*No introducir el producto*
Ventas altas	0.3	4.0 -	0
Ventas bajas	0.7	2.0	0
Valor monetario esperado		-0.2	0

La acción óptima es no introducir el producto. Si las ventas fuesen bajas no habría pérdida de oportunidad; pero si fuesen altas, habría una pérdida de oportunidad de cuatro millones de dólares, ya que la compañía podría obtener estos beneficios de haber introducido el producto. Por lo tanto, la POE es 0.3 * 4 + 0.7 x 0 = 1.2, lo mismo que antes.

Así, el valor esperado que puede obtenerse de la información perfecta es 1.2 millones de dólares. El valor de la información imperfecta será menor.

El decisor puede llevar a cabo un experimento en esta situación. Suponga que el experimento es un estudio de mercado que se realiza en dos ciudades representativas a un costo de 0.2 millones de dólares.

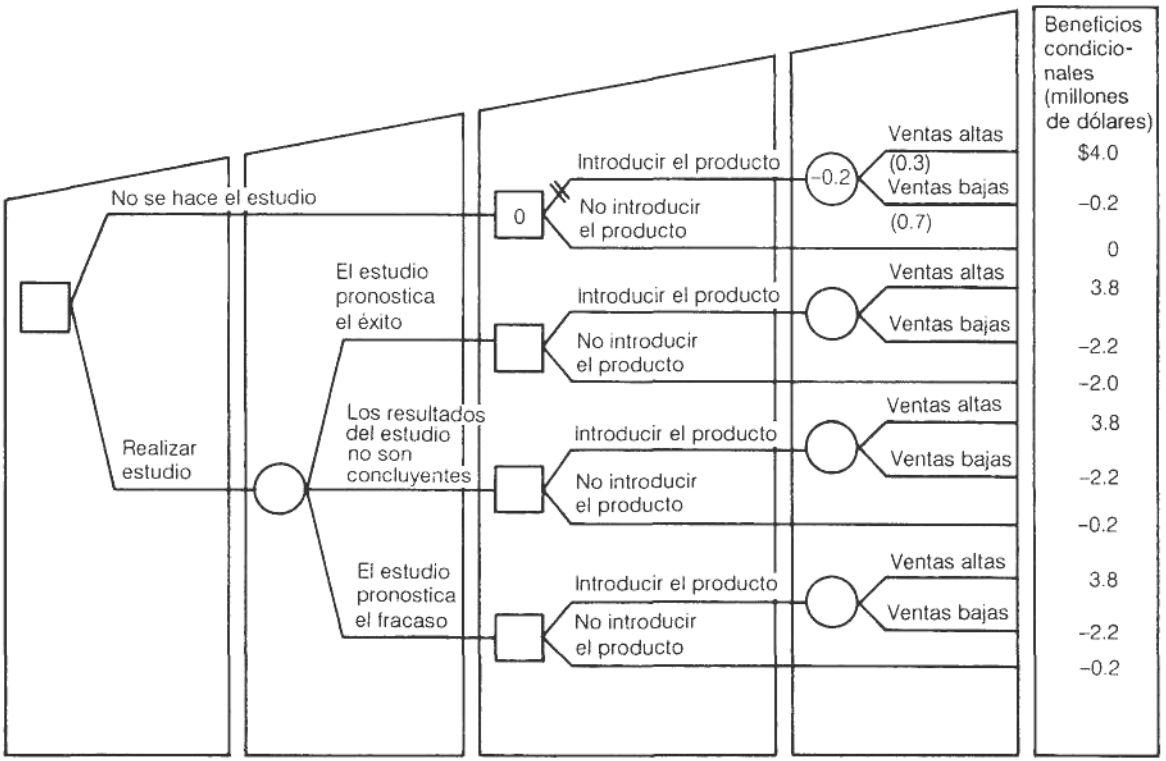
El estudio genera tres resultados posibles: (1) El estudio puede pronosticar el éxito (ventas altas) para el producto nuevo; (2) el estudio puede pronosticar el fracaso (ventas bajas); o (3) los resultados del estudio pueden no ser concluyentes. En el pasado, los estudios como el propuesto muchas veces pronosticaron correctamente el éxito o el fracaso de un producto nuevo, pero en ocasiones se pronosticó el éxito para un producto que luego fracasó, y viceversa.

Si el gerente de mercadotecnia efectúa el estudio antes de actuar, las decisiones pueden basarse en los resultados del estudio. La figura 4-8 muestra el diagrama de influencia para este problema. El problema puede expresarse en función de un árbol de decisión, como se ilustra en la figura 4-9. La parte superior del árbol muestra el proceso de decisión si no se lleva a cabo el estudio; se trata del mismo análisis que se presentó en la tabla 4-15, con probabilidades de 0.3 y 0.7 para las ventas altas y bajas, con beneficios esperados de -0.2 millones de dólares para la

Figura 4-8 Diagrama de influencia para el problema de introducción de un producto nuevo



Figura 4-9 Árbol de decisión para el problema de introducción de un producto nuevo



introducción del producto y con una decisión indicada de no introducir el producto, con beneficio de cero dólares.

La parte inferior del árbol, siguiendo la rama "Realizar estudio", muestra los resultados posibles del estudio y las alternativas de decisión subsecuentes. Hay que tomar una decisión acerca de la introducción del producto después de cada uno de los tres resultados posibles del estudio. Si el producto se introduce, las ventas serán altas, con beneficio de 3.8 millones de dólares, o bajas, con pérdidas de 2.2 millones de dólares. Observe que se ha incluido el costo del estudio (0.2 millones de dólares) en las cantidades de beneficios y pérdidas.

Determinación de probabilidades

Para completar el análisis de la figura 4-9 se requieren las probabilidades de **los** distintos sucesos. Supongamos que el gerente de mercadotecnia estima que las probabilidades son las de la tabla 4-16. Son probabilidades condicionales para los diversos resultados del estudio dado el nivel potencial de ventas del producto.

Tabla 4-16 Probabilidades condicionales de los pronósticos del estudio, dadas las ventas potenciales

Resultados del experimento (pronóstico del estudio)	*Nivel de ventas potenciales*	
	Ventas altas (A)	*Ventas bajas (B)*
El estudio pronostica el éxito (*E*) (es decir, ventas altas)	0.4	0.1
El estudio no es concluyente *(I)*	0.4	0.5
El estudio pronostica el fracaso *(F)* (es decir, ventas bajas)	0.2	0.4
	1.0	1.0

Por ejemplo, si el producto tiene alto potencial de ventas, el estudio pronostica 0.4 de probabilidad de éxito, 0.2 de fracaso y 0.4 de probabilidad de que el estudio no sea concluyente. Estas probabilidades reflejarían la experiencia anterior con modelos de este tipo, quizás con modificaciones basadas en el juicio del gerente de mercadotecnia.

Las probabilidades que se muestran en la tabla 4-16 expresan la confiabilidad o precisión del experimento. El gerente de mercadotecnia, con base en estas estimaciones, puede evaluar el valor económico del estudio. No se podría otorgar un valor específico al hecho de realizar el estudio si no existen estas estimaciones de la confiabilidad.

Las probabilidades condicionales de la tabla 4-16 no pueden usarse directamente en la figura 4-9. Se necesitan las probabilidades *incondicionales* de los resultados de los sucesos (sólo disponemos de las probabilidades del estudio condicionadas por el nivel de ventas). También serían necesarias las probabilidades condicionales de un nivel de ventas alto o bajo, dado un pronóstico de éxito del estudio.

La tabla 4-17 es una tabla de probabilidades conjuntas, similar a las que se usaron en el capítulo 3. La parte superior de la tabla muestra los símbolos, mientras que la parte inferior presenta los valores numéricos equivalentes. En la columna de la derecha están las probabilidades originales que determinó el gerente de mercadotecnia: 0.3 de probabilidad de que el producto tenga ventas altas *(A) y* 0.7 de que sean bajas *(B)*. A partir de estas probabilidades y con las probabilidades condicionales de la tabla 4-16, pueden calcularse las probabilidades conjuntas de la tabla 4-17. Así, la probabilidad conjunta de un pronóstico de "éxito" del estudio *(E)* y de un nivel de ventas alto (.4) se calcula multiplicando la probabilidad condicional del pronóstico de éxito, dado un nivel de ventas alto (0.4, de la Tabla 4-16), por la probabilidad del nivel de ventas alto:

$$P(EyA) = P(E\backslash A)P(A) = (0.4)(0.3) = 0.12$$

En forma similar:

$$P(E\ yB) = P(E\backslash B)P(B) = (0.1)(0.7) = 0.07$$

$$P(IyA) = P(I\backslash A)P(A) = (0.4)(0.3) = 0.12$$

etcétera.

Tabla 4-17 Tabla de probabilidades conjuntas

Nivel de ventas potenciales	*Pronóstico del estudio*			*Probabilidades marginales del nivel de ventas*
	Éxito (E)	*Inconcluyente (I)*	*Fracaso (F)*	
Alto (A)	*P(EyA)*	*P(IyA)*	*P(Fy A)*	*P(A)*
Bajo (B)	*P(EyB)*	*P(IyB)*	*P(FyB)*	*P(B)*
Probabilidades marginales del pronóstico del estudio	*P(E)*	*P{I)*	*P(F)*	1.00

Nivel de ventas potenciales	*Pronóstico del estudio*			*Probabilidades marginales del nivel de ventas*
	Éxito (E)	*Inconcluyente (I)*	*Fracaso (F)*	
Alto (A)	0.12	0.12	0.06	0.30
Bajo (B)	0.07	0.35	0.28	0.70
Probabilidades marginales del pronóstico del estudio	0.19	0.47	0.34	1.00

Las probabilidades marginales del nivel de ventas de la tabla 4-17 (columna de la derecha) son iguales a la suma de las probabilidades conjuntas de cada fila. Observe que son precisamente las probabilidades originales para las ventas altas y bajas y se les designa **probabilidades a priori,** ya que se evaluaron antes de obtener la información del estudio. Las probabilidades marginales de los pronósticos del estudio son iguales a la suma de las probabilidades conjuntas de cada columna.

Para comprender la tabla 4-17 es conveniente pensar en que representa los resultados de cien situaciones anteriores idénticas a la que se considera. Entonces, las probabilidades representan la frecuencia de ocurrencia de los distintos resultados. Por ejemplo, en 30 de los 100 casos el nivel real de las ventas del producto fue alto y, en estos 30 casos, el estudio pronosticó 12 veces el éxito [o sea, *P{A* y *E)* = 0.12], no fue concluyeme en 12 ocasiones y pronosticó el fracaso en seis de los casos.

Las probabilidades marginales del pronóstico del estudio, que se muestran en la fila inferior de la tabla 4-17, pueden interpretarse entonces como la frecuencia relativa de las veces que el estudio pronosticó "éxito", "inconcluyente" y "fracaso", respectivamente. Por ejemplo, el estudio pronosticó "éxito" 19 de 100 veces, en 12 de las cuales las ventas reales fueron altas y en siete fueron bajas.

Estas probabilidades marginales del pronóstico del estudio son importantes para nuestro análisis, ya que nos dan las probabilidades relacionadas con la información que recibe el gerente de mercadotecnia antes de tomar la decisión de introducir el producto. Las probabilidades marginales se registran junto a las ramas correspondientes en la figura 4-10.

Aún falta calcular las probabilidades de las ramas denominadas "ventas altas" y "ventas bajas", en la parte inferior de la figura 4-10. No se pueden usar los valores de 0.3 y 0.7 para estos sucesos, como se hizo en la parte superior del árbol, ya que esas probabilidades se calcularon independientemente de la realización del estudio. El gerente de mercadotecnia recibe información de un estudio y las probabilidades deben reflejar esa información. Las probabilidades requeridas son las probabilidades condicionales de los distintos niveles de ventas dado el resultado del estudio. Por ejemplo, en la rama superior de la ruta "Realizar estudio" se requiere *P(A\E),* la probabilidad de ventas altas *(A)* si el estudio pronostica el éxito (£). Lo anterior se puede calcular directamente de la definición de la probabilidad condicional (véase Cap. 3), utilizando los datos de la tabla 4-17:

$$P(A|E) = \frac{P(A \text{ y } E)}{P(E)} = \frac{2.12}{0.19} = 0.632$$

La probabilidad de ventas bajas con un pronóstico de fracaso del estudio es:

$$P(B|E) = \frac{P(B \text{ y } E)}{P(E)} = \frac{0.17}{0.19} = 0.368$$

Estas probabilidades se conocen como **probabilidades a posteriori,** ya que se obtienen después de incluir la información que se recibirá del estudio. Aún no se efectúa el estudio, pero los cálculos se basan en los resultados posibles. Para comprender el significado de los cálculos anteriores, piense una vez más que la tabla 4-17 representa 100 situaciones idénticas previas. Entonces, en 19 casos [ya que *P(E)* = 0.19] el estudio pronosticó el éxito y, en 12 de estos 19 casos, se obtuvieron realmente ventas altas. Por lo tanto, la probabilidad a posteriori de las ventas altas es, como se calculó, 12/19 = 0.632.

Las probabilidades a posteriori de los pronósticos "inconcluyente" y "fracaso" del estudio se pueden calcular en forma parecida:

$$P(A|I) = \frac{0.12}{0.47} = 0.255$$

$$P(B|I) = \frac{0.35}{0.47} = 0.745$$

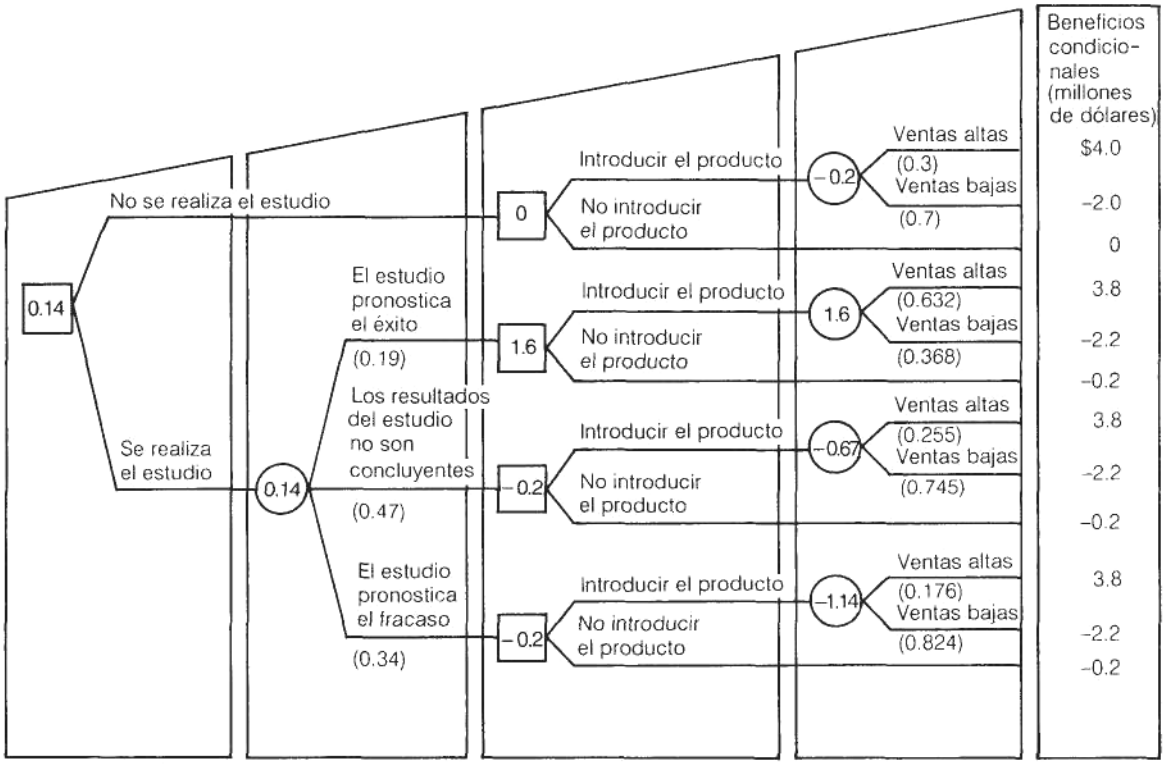
y

$$P(A|F) = \frac{0.06}{0.34} = 0.176$$

$$P(B|F) = \frac{0.28}{0.34} = 0.824$$

Estos valores también se presentan en la figura 4-10.

Figura 4-10 Árbol de decisión completo



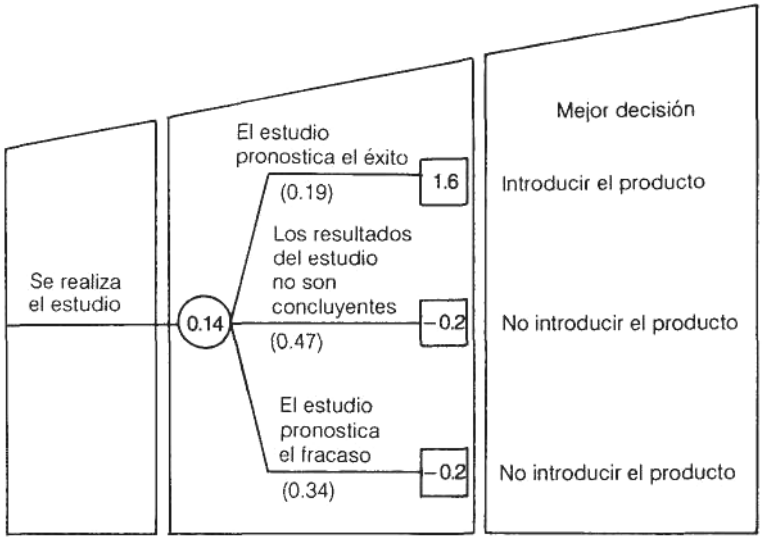
Ahora toda la información necesaria está disponible y se puede analizar la figura 4-10, comenzando por la derecha y trabajando hacia atrás. Los valores esperados se muestran en los círculos. Por ejemplo, siga las ramas "Se realiza el estudio", "El estudio pronostica el éxito" e "Introducir el producto"; el valor esperado de 1.6 que se muestra en el círculo que aparece al final de estas ramas se calcula como:

$$0.632 \times 3.8 + 0.368 \times (-2.2) = 1.6$$

Por lo tanto, la empresa puede esperar beneficios de 1.6 millones de dólares si introduce el producto después de recibir un pronóstico de éxito del estudio. Como esto es mejor que la pérdida de 0.2 millones relacionada con no introducir el producto, se decide introducir el producto y se marca la rama "No introducir el producto" con el símbolo || para indicar que no es óptima.

Si el pronóstico del estudio no es concluyente o es de fracaso, hay pérdidas esperadas de 0.67 y 1.14 millones de dólares, respectivamente (incluyendo los

Figura 4-11 Porción reducida del árbol de decisión



costos del estudio). En estos casos lo mejor es *no* introducir el producto, por lo que se marcan con || las ramas "Introducir el producto".

Ahora se reduce la parte del árbol de decisión que tiene que ver con la realización del estudio, como se muestra en la figura 4-11. El valor esperado en el nudo circular se calcula como sigue:

$$0.19 \times 1.6 + 0.47 \times (-0.2) + 0.34 \times (-0.2) = 0.14$$

De esta manera, si el estudio se realiza y el director actúa con base en la información que recibe, los beneficios esperados son 0.14 millones de dólares. Esto es mejor que el beneficio de cero que obtendría si no se lleva a cabo el estudio, por lo que hay que tomar esta decisión. Observe que en este caso la decisión es una *estrategia* que en realidad comprende dos decisiones: una ahora, de efectuar el estudio, y otra posterior de introducir el producto si el estudio pronostica éxito, pero no introducirlo si el estudio pronostica otra cosa.

Valor de la información del estudio

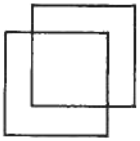
En el ejemplo anterior, el estudio es una manera de obtener información adicional. La información no es perfecta, ya que el estudio no puede determinar con preci-

sión si las ventas serán altas o bajas. El beneficio neto al realizar el estudio fue de 0.14 millones de dólares, lo cual incluía el costo del estudio (0.2 millones de dólares); si sumamos esta cantidad, el valor esperado del estudio sería 0.14 + 0.2 = 0.34 millones de dólares. Esto lo podemos considerar como los beneficios esperados con un estudio gratuito. Por lo tanto, el **valor de la información imperfecta** que se obtiene del estudio en esta situación es 0.34 millones de dólares. Valdría la pena efectuar el estudio mientras su costo no exceda esta cantidad.

Recuerde que en una sección anterior de este capítulo (pág. 105) se calculó que el valor esperado de la información perfecta era de 1.2 millones de dólares. El valor del estudio (información imperfecta) es considerablemente menor, lo que refleja el hecho de que el estudio puede proporcionar información incorrecta o no concluyente, como se indica en la tabla 4-16.

La toma de una muestra es una forma de obtener información. Esta información es imperfecta, ya que es probable que la muestra no represente con exactitud la población de la cual se extrae. En el capítulo 8 se analiza la confiabilidad de las muestras y cómo se pueden incorporar al proceso de toma de decisiones.

RESUMEN



La teoría de las decisiones implica la elección de un criterio de decisión (es decir, un objetivo), como puede ser la maximización de beneficios. Si es posible, se lleva a cabo un experimento. Luego, con base en los resultados del experimento, se modifican las probabilidades a priori de los estados. Se calculan los beneficios esperados de cada decisión posible y se escoge como acción óptima aquella que tenga mayores beneficios esperados.

Antes de realizar un experimento, el decisor debe determinar si los beneficios esperados correspondientes a la acción que se obtienen después de recibir los resultados del experimento, son mayores que el costo del experimento. Este análisis implica encontrar la regla óptima (que indica cuál es la decisión que debe tomarse como función del resultado del experimento) y evaluar los beneficios esperados de acuerdo con esa regla.

Conclusión

En este capítulo se ha visto el uso®de las probabilidades para tomar decisiones empresariales en condiciones de incertidumbre. Se desarrolló el criterio de maximización del valor monetario esperado y se estudió el concepto del valor de la información. También se presentaron los diagramas de influencia y los árboles de decisión y sus aplicaciones, además de ilustrar el valor de la información imperfecta.

Las ideas que se presentaron en este capítulo se ampliarán en capítulos posteriores. En el capítulo 5 se estudiarán otros criterios de decisión posibles y se profundizará en el análisis de la utilidad. El capítulo 6 abarca los problemas de decisión en los cuales la incertidumbre se puede expresar como una distribución continua de probabilidad.

Bibliografía

Behn, R. D. y J. W. Vaupel, *Quick Analysis for Busy Decision Makers,* Nueva York, Basic Books, 1982. Brown, R. V., A. S. Kahr y C. Peterson, *Decisión Analysis for the Manager,* Nueva York, Holt, Rinehart & Winston, 1974. Bunn, D. W., *Applied Decision Analysis,* Nueva York, McGraw-Hill, 1984. Holloway, C, *Decision Making under Uncertainty: Models and Choices,* Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1979. McNamee, P. y J. Celona, *Decision Analysis for the Professional with Supertree,* Redwood City, Calif., Scientific Press, 1987. Pratt, J. W., H. Raiffa y R. Schlaifer, *Introduction to Statistical Decision Theory,* Nueva York, McGraw-Hill, 1965. Raiffa, H., *Decision Analysis,* Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing, 1968.

Schlaifer, R., *Analysis of Decisions under Uncertainty,* Nueva York, McGraw-Hill, 1969.

Spetzler, C. S. y C. A. Stael von Holstein, "Probability Encoding in Decision Analysis", *Management Science,* págs. 340-358, noviembre de 1975.

Spurr, W. A. y C. P. Bonini, *Statistical Analysis for Business Decisions,* edición revisada, Homewood, 111., Richard D. Irwin, 1973.

SRI Decision Analysis Group, *Readings in Decision Analysis,* Menlo Park, Calif., Stanford Research Institute, 1976.

Vatter, P. A., S. P. Bradley, S. C. Frey, Jr., y B. Jackson, *Quantitative Methods in Management: Text and Cases,* Homewood, 111., Richard D. Irwin, 1978.

Winkler, R. L., *Introduction in Bayesian Inference and Decision,* Nueva York, Holt, Rinehart & Winston, 1972.

Problemas con respuestas

4-1. Suponga que la siguiente tabla de valores condicionales se aplica a una decisión:

Suceso	Probabilidad del suceso	Valor monetario condicional de la Acción 1	Acción 2	Acción 3
A	0.35	4	3	2
B	0.45	4	6	5
C	0.20	4	6	8

a. Presente una tabla de valores monetarios esperados y determine la acción óptima.
b. Presente una tabla de pérdidas de oportunidad esperadas.
c. Calcule la tabla de valores condicionales suponiendo que se dispone de un pronóstico perfecto.
d. Calcule el valor esperado suponiendo que se dispone de un pronóstico perfecto.
e. Calcule el valor esperado de la información perfecta.

4-2. El vendedor de un puesto de periódicos asigna las siguientes probabilidades a la demanda de la revista *Fine:*

Suceso: Demanda	Probabilidad del suceso
10 ejemplares	0.10
11 ejemplares	0.15
12 ejemplares	0.20
13 ejemplares	0.25
14 ejemplares	0.30
	1.00

Los ejemplares se venden a 50 centavos y cuestan 30 centavos.
a. Si el vendedor *puede* devolver los ejemplares que no se vendan y recuperar todo su dinero, ¿cuántos debe pedir?

b. Si el vendedor *no puede* devolver los ejemplares que no se vendan, ¿cuántos de be pedir?
c. ¿Cuál es el beneficio óptimo esperado en (6)7

4-3. El fabricante de un tónico para el cabello quiere producir un nuevo producto. Los beneficios increméntales son de 10 dólares por unidad (sobre la base del valor neto actual) y la inversión en equipo necesario es de 500 000 dólares. La estimación de la demanda es la que sigue:

Demanda (unidades)	*Probabilidad*
30 000	0.05
40 000	0.10
50 000	0.20
60 000	0.30
70 000	0.35
	1.00

a. ¿Qué cantidad de nuevo producto debe producir? ¿Cuál es el beneficio neto esperado?
b. ¿Cuál es el valor esperado de la informa ción perfecta?
c. ¿Cómo cambiaría el valor esperado de la información perfecta si la probabilidad de 30 000 unidades fuera 0.10 y la probabilidad de 70 000 fuera 0.30?

4-4. Cooper Cola Company (CCC) debe decidir cuál de tres productos introducir, ya que debido a la escasez de capital de trabajo sólo pueden introducir uno. El gerente de mercadotecnia elaboró el árbol de decisión que se presenta en la figura 4-12. Suponga usted que es una representación razonable del problema de decisión de CCC y que la compañía está dispuesta a usar el VME como criterio de decisión.

¿Cuál es la estrategia óptima para CCC y cuáles son los beneficios esperados de esta estrategia?

4-5. Una compañía intenta decidir cuál será el tamaño de una planta que construirá en Atlanta. La compañía no vende mucho actualmente en los estados sureños; sin embargo, después de concluir la planta de Atlanta se iniciará una campaña promocional de gran magnitud. La gerencia tiene algunas dudas con respecto al éxito de esta campaña. Estiman que hay 0.4 de probabilidad de que la compañía capte una cuota *considerable* de mercado y una probabilidad de 0.6 de que se obtenga sólo una cuota *moderada.*

Se requiere una planta *grande* si se consigue una cuota considerable de mercado. Una planta *pequeña* bastará para el caso moderado. El costo de la planta grande es de ocho millones de dólares; el costo de la planta pequeña es de cinco millones de dólares.

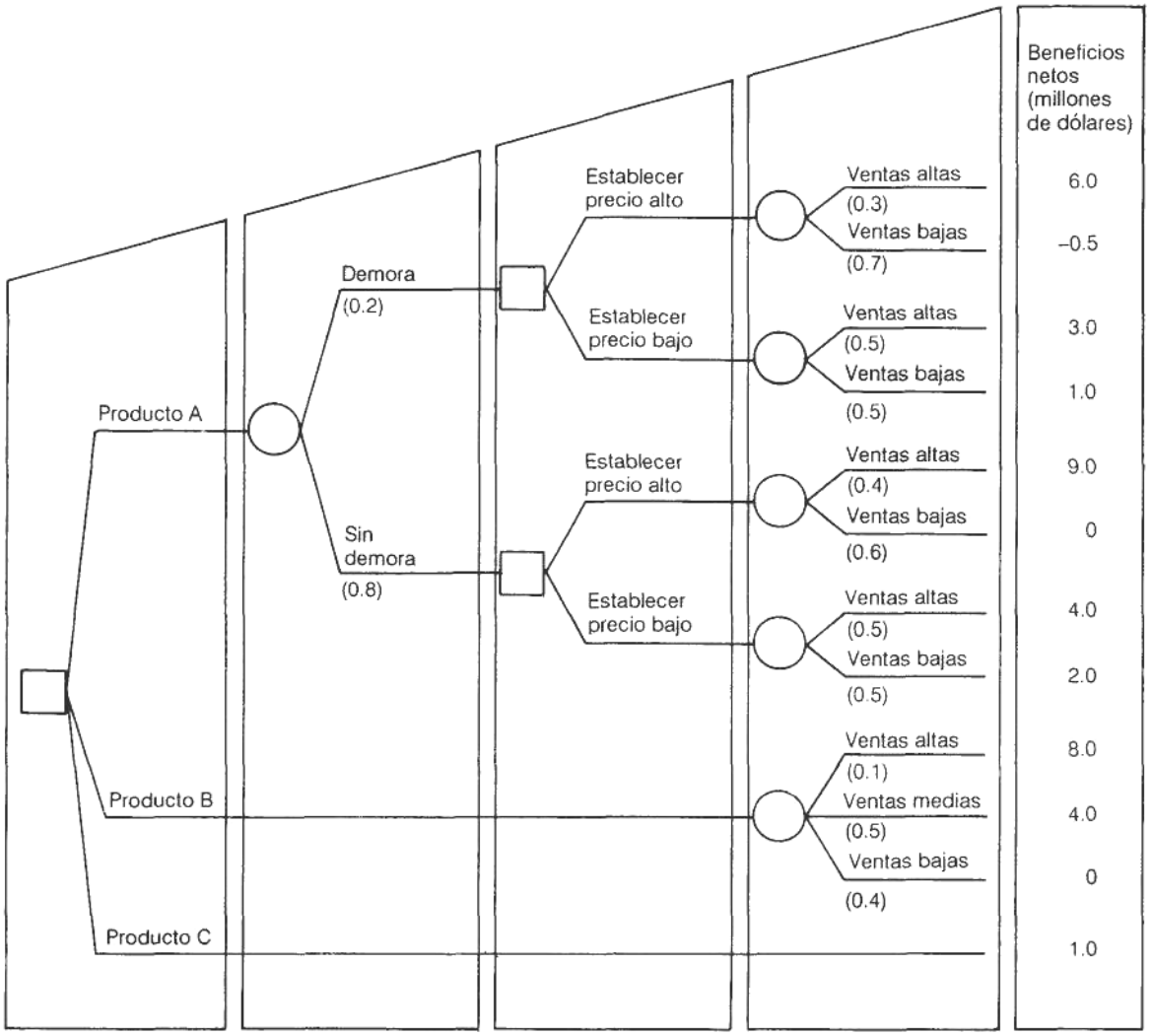
Si logran obtener la cuota considerable de mercado, el valor actual estimado de los beneficios que se obtendrían (excluyendo el costo de la planta) es de 13 millones de dólares; si la cuota es moderada, el valor actual de los beneficios (una vez más, sin incluir el costo de la planta) es de ocho millones de dólares.

El gerente tiene otra alternativa: construir una planta pequeña, ver qué sucede como resultado de la campaña de promoción y luego ampliar la planta, de ser conveniente. Costaría 4.5 millones de dólares ampliar la planta pequeña para que tenga la capacidad de una grande.

a. Elabore un árbol de decisión para este problema.
b. ¿Qué decisión debe tomar la compañía y cuál es el valor esperado?

4-6. Usted está a cargo del control de inventarios en la compañía Volant. Usted piensa que hay una probabilidad de 0.4 de que exista una recesión el próximo año. Si se presenta la recesión, debe vender el modelo AE4 al precio de oferta de un millón de dólares, ya que sólo podría obtener 800 000 dólares en un año de recesión. Estas cantidades se recibirían en un año. Sin embargo, el agente de compras de una compañía le ha prometido comprar el modelo AE4 por 1.3 millones de dólares si no hay recesión (cantidad pagadera dentro de un año). Después de efectuar algunos cálculos preliminares, aún no decide qué hacer con respecto a las ventas y decide obtener pruebas acerca de la probabilidad de que exista una recesión el año entrante. Usted descubre

Figura 4-12 Árbol de decisión de CCC (problema 4-4)



que en fechas recientes ha aumentado la cantidad de cuentas incobrables. Después de investigar un poco averigua que en ocho de las últimas diez recesiones el número de cuentas incobrables comenzó a aumentar aproximadamente un año antes. Usted está dispuesto a aceptar la cifra de 0.8 como estimación de la probabilidad de que aumenten las cuentas incobrables supuesto que ocurra una recesión dentro de un año. También, descubre que en 10 años normales seleccionados al azar se presentaron aumentos en el número de cuentas incobrables en tres ocasiones. Por lo tanto, toma el valor de 0.3 como estimación de:

$$P(\text{aumento en cuentas incobrables} \mid \text{no hay recesión el año entrante})$$

Si modifica sus probabilidades a priori como se mostró en este capítulo, ¿qué haría con el modelo AE4?

4-7. La probabilidad de obtener un 7 o un 11 con un par de dados legítimos es 2/9. Si los dados están cargados de cierta manera, la probabilidad de un 7 o un 11 es 4/9. Un conocido le pide que juegue a los dados con él. Si él lanza un 7 o un 11, usted le paga tres dólares; de lo contrario, él le paga a usted un dólar. Usted tendría la ventaja en el juego si los dados fueran legítimos, por lo que sospecha acerca de esta persona. Específicamente, usted considera que hay 0.7 de probabilidad de que esté usando dados cargados con probabilidad de 4/9 para el 7 o el 11. Para que usted no tenga sospechas, su oponente le permite lanzar dos veces los dados; usted lo hace y no aparece ni un 7 ni un 11 en los dos tiros.

¿Debe jugar a los dados con su conocido? Muestre sus cálculos.

4-8. Remítase al ejemplo del capítulo, que se ilustra en la figura 4-9 y la tabla 4-16. Suponga que la confiabilidad del estudio de mercado se describe con las siguientes probabilidades condicionales:

Pronóstico del estudio	*Nivel real de ventas*	
	Alto	*Bajo*
Exito	0.3	0.2
Inconcluyente	0.5	0.5
Fracaso	0.2	0.3
	1.0	1.0

Suponiendo que no cambian los otros datos del ejemplo, ¿debe realizarse el estudio?

4-9. Remítase al ejemplo de este capítulo, que se muestra en la figura 4-10. Suponga que los beneficios son los que se presentan en la tabla 4-15 y que las probabilidades condicionales son las de la tabla 4-16. Pero suponga ahora que las probabilidades a priori de la gerencia son 0.5 para ventas altas y 0.5 para ventas bajas.

a. ¿Cuál es la acción óptima antes de considerar el estudio? ¿Cuál es el valor esperado de esta acción?

b. ¿Cuál es el valor esperado de la información del estudio?

Problemas

4-10. El análisis y el pronóstico de las ventas del próximo mes dan como resultado la siguiente distribución de probabilidades:

Suceso:	
Demanda	*Probabilidad*
10 unidades	0.10
11 unidades	0.70
12 unidades	0.20
	1.00

Los beneficios por unidad son de cinco dólares y el costo del producto es de seis dólares. Si el producto no se vende en el mes pierde su valor (las unidades sobrantes no valen nada).

a. Calcule las ventas esperadas (media) para el mes.

b. Prepare una tabla de valores condicionales para las distintas acciones posibles.

c. Prepare una tabla de valores monetarios esperados e indique la acción óptima.

4-11. (Continuación del problema 4-10)

a. Prepare una tabla de pérdidas de oportunidad condicionales.

b. Prepare una tabla de pérdidas de oportunidad esperadas.

c. Indique la acción óptima.

d. Clasifique las acciones. Muestre las diferencias entre las pérdidas de oportunidad esperadas de cada acción y las POE de la acción óptima.

e. Clasifique las acciones utilizando los valores esperados. Muestre las diferencias entre el VME de cada acción y el VME de la acción óptima. Compare estos resultados con los de *(d)*.

4-12. Remítase al problema 4-10.

a. Presente la tabla de valores condicionales suponiendo que se dispone de un pronóstico perfecto.

b. Calcule el valor esperado suponiendo que se dispone de un pronóstico perfecto.

c. Calcule el valor esperado de la información perfecta.

4-13. Un fabricante de artículos deportivos tiene la demanda y las probabilidades siguientes para una guía anual de pesca:

Suceso: Demanda	*Probabilidad del suceso*
100 000	0.20
200 000	0.20
300 000	0.20
400 000	0.20
500 000	0.20
	1.00

Los costos increméntales de producción son de cuatro dólares por millar; el precio de venta es de cinco dólares por millar; y el valor de recuperación de las revistas que no se vendan es cero.

a. El razonamiento del fabricante es el siguiente:
"Puesto que hay la misma probabilidad de que la demanda sea mayor o menor que 300 000, produciré la cantidad más posible, 300 000". ¿Está usted de acuerdo? Si no lo está, ¿por qué?

b. ¿Cuál es el valor esperado de un pronóstico perfecto?

c. Demuestre que el VME de cada acción más la POE de cada acción es igual a los beneficios esperados con un pronóstico perfecto.

4-14. Un inversor en bienes raíces es dueño de una gasolinera que alquila a una compañía petrolera, a una tarifa de alquiler que se basa en una cuota de los beneficios. Si la gasolinera tiene éxito, se estima que el valor actual del alquiler futuro es de un millón de dólares; si no tiene éxito, el valor actual del alquiler futuro será de 200 000 dólares. La compañía petrolera ofreció al inversor 600 000 dólares para comprar la propiedad. Con base en el valor monetario esperado, ¿qué probabilidad debe asignarse al "éxito" para que al inversor le sea indiferente vender o no vender?

4-15. Un mayorista de artículos deportivos tiene la oportunidad de comprar 500 pares de esquís que el gobierno declaró como excedentes. El mayorista pagaría cinco dólares por par y podría obtener 10 dólares por cada par al venderlos a los minoristas. El precio está bien establecido, pero el mayorista tiene dudas acerca de la cantidad de pares que podrá vender. Los esquís que sobren se pueden vender a las tiendas de descuento a dos dólares el par. Después de estudiar con cuidado los datos históricos, el mayorista asigna las siguientes probabilidades a la demanda:

Demanda de minoristas	*Probabilidad*
1 000 pares	0.60
3 000 pares	0.30
5 000 pares	0.10
	1.00

a. Calcule el valor monetario condicional de los diversos niveles de demanda.

b. Calcule los valores monetarios esperados.

c. Calcule los beneficios esperados suponiendo que se dispone de un pronóstico perfecto.

d. Calcule el valor esperado de la información perfecta.

4-16. El dueño de una librería puede comprar 20 000 sobrantes de una editorial a 50 centavos el ejemplar. Él espera vender cada ejemplar a dos dólares si se anuncia en un periódico de distribución nacional. Los libros sobrantes pueden venderse a 20 centavos el ejemplar a otros minoristas. Su estimación de la demanda es:

Demanda	*Probabilidad de la demanda*
5000	0.10
10 000	0.50
20 000	0.40
	1.00

El costo de la publicidad es de 12 000 dólares y los costos increméntales del envío de los libros que se venden es de 25 centavos por ejemplar.

a. ¿Debe comprar los libros?
b. ¿Cuáles son los beneficios esperados si se dispone de un pronóstico perfecto?
c. ¿Cuál es la cantidad máxima que debe pagar el librero por la información perfecta?

4-17. Cuando se construye un nuevo centro comercial, la compañía de electricidad debe asignar un transformador al lugar. Puesto que esta actividad se realiza antes de que se sepa quiénes ocuparán el centro comercial, hay incertidumbre acerca de la cantidad de electricidad que se usará (por ejemplo, los salones de belleza utilizan mucha más electricidad que las tiendas de juguetes) y, por lo tanto, hay incertidumbre acerca del tamaño del transformador que se necesitará. Si el transformador es demasiado pequeño, tendrá que reemplazarse, y si es demasiado grande los gastos serán mayores que los realmente necesarios. A continuación se presenta una tabla que muestra estos costos:

Cantidad de electricidad realmente necesaria	*Tamaño del transformador instalado originalmente*		
	Pequeño	*Mediano*	*Grande*
Poca	50	100	150
Media	140	100	150
Mucha	190	190	150

Suponga que, para un centro comercial cualquiera, se asignan las siguientes probabilidades a la cantidad de electricidad realmente necesaria:

	Necesidad	*Probabilidad*
Poca	0.2	
Media	0.7	
Mucha	0.1	
	1.0	

a. Elabore la tabla de pérdida de oportunidad.
b. ¿Qué decisión debe tomarse? ¿Por qué?
c. ¿Cuál es el valor esperado de la informa ción perfecta?

4-18. Artex Computers ha recibido un contrato para fabricar dos sistemas de computación X-60 para una universidad japonesa. El contrato establece que Artex recibirá 150 millones de yenes dentro de seis meses, al entregar los computadores. La tasa de cambio actual es de 150 yenes por dólar; sin embargo, hay ciertas preocupaciones en los mercados financieros acerca del valor del yen en el futuro. Esta situación se refleja en el mercado de divisas a futuro, en donde se pueden comprar o vender yenes "adelantados" seis meses a una tasa de 155 yenes por dólar. Específicamente, Artex puede vender "barato" los 150 millones de yenes y recibir ahora 967 000 dólares. El tesorero de Artex ha asignado las siguientes probabilidades a la tasa de cambio del yen dentro de seis meses:

Tasa de cambio (yenes por dólar)	*Probabilidad*
140	0.1
150	0.6
160	0.2
170	0.1
	1.0

a. Suponiendo que Artex está dispuesta a usar el VME como criterio de decisión, ¿debe vender los yenes ahora o esperar a que se reciba el pago dentro de seis meses?
b. ¿Sería el VME un criterio razonable para este problema?

4-19. Una compañía es dueña de un contrato que le permite explorar una propiedad en busca de petróleo. La compañía puede vender el contrato por 15 000 dólares o perforar para extraer el petróleo. A continuación se presentan los cuatro resultados posibles de la perforación, así como las probabilidades de ocurrencia y las consecuencias monetarias:

Resultado posible	*Probabilidad*	*Consecuencias*
Pozo seco	0.16	-$100 000
Pozo sólo con gas	0.40	50 000
Combinación de gas y petróleo	0.24	100 000
Pozo petrolero	0.20	200 000

Elabore un árbol de decisión para este problema y calcule el valor monetario esperado para la acción "perforar". ¿La compañía debe perforar o vender el contrato?

4-20. La compañía de promociones ABC tiene la oportunidad de llevar a cabo una competencia atlética muy lucrativa. Sin embargo, el encuentro no puede realizarse si llueve. De realizarse el juego, la empresa obtendrá beneficios netos de dos millones de dólares, pero si llueve perderá un millón de dólares de su propio dinero (no es una pérdida de oportunidad). La probabilidad de lluvia es de 0.2. La empresa quiere saber si debe comprar un seguro contra lluvia.

Elabore un árbol de decisión. ¿Cuánto podría pagar la empresa por un seguro para cubrir la pérdida de un millón de dólares y no quedar en una situación peor, desde el punto de vista del valor esperado, que si no hubiera comprado el seguro? ¿Debe comprar el seguro a ese precio?

4-21. Una compañía de producción de plásticos necesita ampliar su capacidad productiva, lo cual puede hacer de dos maneras: utilizar tiempo extra en su planta actual o alquilar otra planta. El tiempo extra cuesta por caja de producto tres dólares más que el tiempo regular y sólo puede aplicarse a un máximo de 15 000 cajas por año. El alquiler de otra planta implica un costo fijo anual de 25 000 dólares por el alquiler; sin embargo, a la fuerza de trabajo de esta planta se le pagaría salario regular y podría producir un máximo de 20 000 cajas anuales.

La compañía estima que la demanda adicional (por encima de ío que puede producir en su planta actual con tiempo regular) puede tomar los siguientes valores, con sus probabilidades correspondientes:

Demanda adicional (cajas por año)	*Probabilidad*
5000	0.3
10 000	0.5
15 000	0.2

a. Elabore un árbol de decisión para este problema y encuentre la decisión óptima para minimizar los costos esperados.

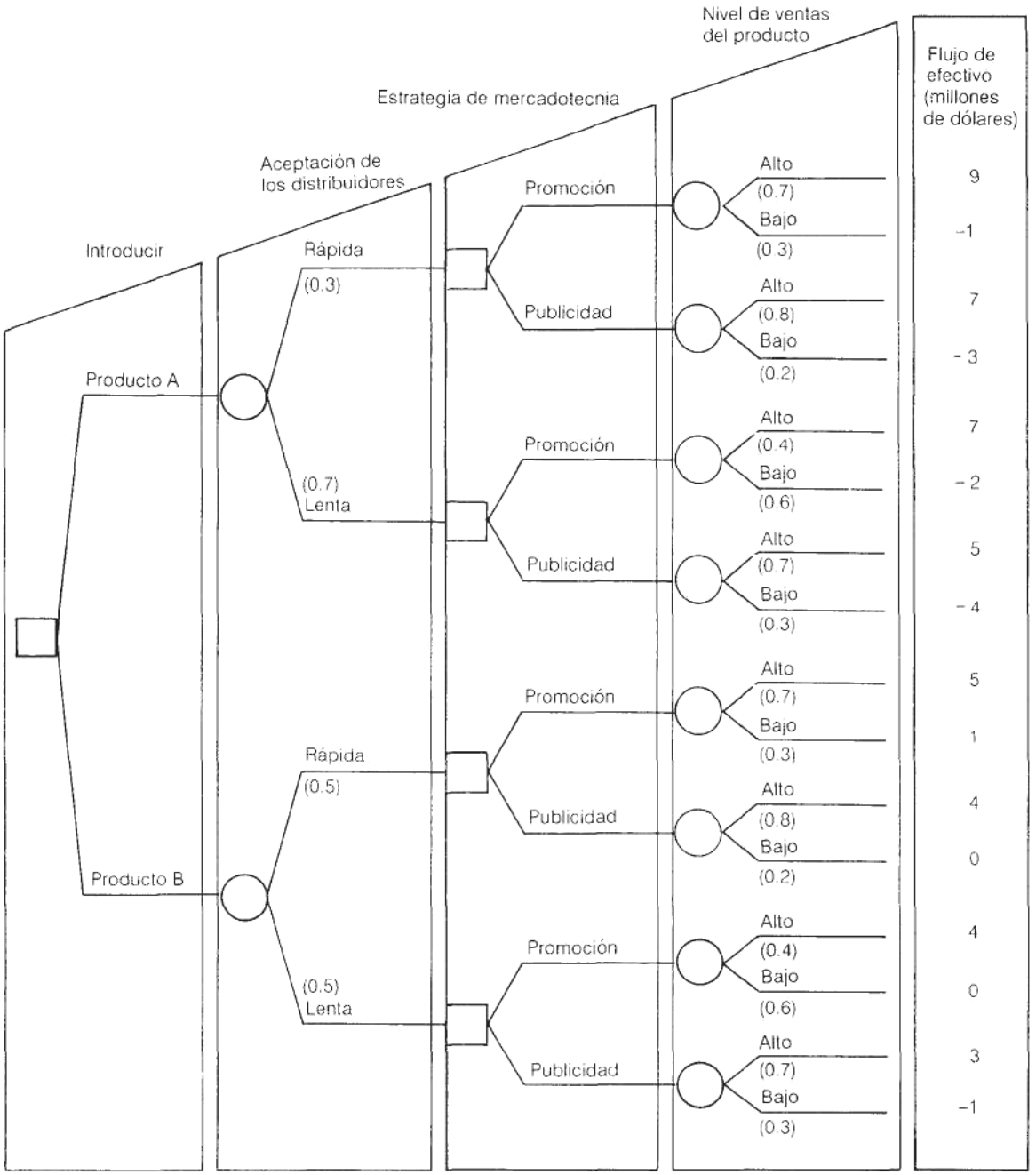
b. Suponga que una compañía de investiga ción de mercados ofrece realizar un estudio para determinar la cantidad exacta de la demanda adicional. ¿Debería pagar la compañía mil dólares por este estudio perfecto? ¿Por qué? ¿Cuál es la pérdida de oportunidad esperada (POE) de la mejor decisión en («)?

4-22. La compañía QPC decide acerca de poner a la venta el producto A o el producto B. La decisión depende de la rapidez con la cual los distribuidores acepten el producto y el tipo de estrategia de mercadotecnia (promoción o publicidad) que emplee QPC. La compañía ha elaborado un diagrama de su problema de decisión, el cual se muestra en la figura 4-13. Los flujos de efectivo relacionados con las decisiones y sucesos se presentan al final de las ramas del árbol. Suponga que QPC está dispuesta a usar el VME para tomar esta decisión.

a. ¿Cuál es la estrategia óptima para QPC y cuál es el flujo de efectivo esperado para esta estrategia?

b. Suponga que QPC tiene que tomar una de cisión acerca de la estrategia de mercadotecnia (promoción o publicidad) *antes* de saber acerca de la rapidez de aceptación

Figura 4-13 Árbol de decisión QPC (problema 4-22)



de los distribuidores. ¿Tendría esto alguna importancia y se reduciría el flujo de efectivo óptimo esperado? ¿Por qué? Responda sin dibujar de nuevo el árbol.

4-23. Un fabricante de cámaras fotográficas produce dos modelos (el normal y el de lujo). Al hacer los preparativos para la temporada navideña, en la cual crecen las ventas, hay que decidir cuáles serán los volúmenes de producción. El costo variable de la cámara normal es de 10 dólares y su precio de venta es de 20 dólares; el costo variable del modelo de lujo es de 20 dólares y se vende a 35 dólares. La estimación de la demanda es la siguiente:

Modelo normal		*Modelo de lujo*	
Demanda	*Probabilidad*	*Demanda*	*Probabilidad*
6 000	0.30	2,000	0.20
8 000	0.70	4,000	0.80

Las cámaras que no se vendan durante la temporada navideña se venden a precio de desecho de cinco dólares para el modelo normal y diez dólares para el modelo de lujo. El fabricante cree que serán distintos segmentos del mercado los que compren los dos modelos; por lo tanto, las probabilidades de ventas que se mencionaron son independientes.

Suponga que la capacidad de producción es ilimitada; entonces, se pueden tomar las dos decisiones en forma independiente. ¿Cuáles son las cantidades óptimas de producción para cada modelo? ¿Cuáles son los VME óptimos?

4-24. (Continuación del problema 4-23) Suponga ahora que, por restricciones en la capacidad, la producción total se limita a 10 000 cámaras. Elabore un árbol de decisión para esta situación y analícelo para determinar las cantidades óptimas de producción. ¿Cuál es el VME de la acción óptima?

4-25. (Continuación del problema 4-23) Suponga ahora que la producción está limitada a 10 000 cámaras pero el fabricante cree que las probabilidades de las demandas de los dos modelos *ya no son independientes*. Específicamente, las probabilidades de las demandas son las que se describen en la tabla anexa de probabilidades conjuntas. Elabore un árbol de decisión para esta situación y encuentre la acción óptima y su VME.

4-26. La compañía Oxenol utiliza gas natural en sus operaciones de producción y procesamiento. Algunas compañías vecinas en el estado de Nueva York han perforado pozos de gas con éxito en sus propiedades, por lo que Oxenol piensa seguir sus pasos. El gasto inicial correspondería a la perforación, la cual costaría 40 000 dólares. Si encuentran gas, tendrían que gastar otros 30 000 dólares para captar las salidas del pozo y proveer la infraestructura y el equipo de control necesarios. Dado el precio actual del gas, el valor del pozo sería de 150 000 dólares si tuviera éxito; sin embargo, si el precio del gas aumenta al doble de su valor actual, un pozo exitoso valdría 300 000 dólares. La compañía considera que su probabilidad de encontrar

Tabla de probabilidades conjuntas (problema 4-25)

Demanda del modelo de lujo / *Demanda del modelo normal*	*2 000*	*4 000*	*Probabilidad marginal de la demanda del modelo normal*
6 000	0.20	0.10	0.30
8 000	0	0.70	0.70
Probabilidad marginal de la demanda del modelo de lujo	0.20	0.80	1.00

gas es de un 30%; también opina que hay una probabilidad del 50% de que se duplique el precio del gas.

a. Elabore un árbol de decisión para este problema, indicando las probabilidades y los valores.

b. Complete el árbol calculando los VME. ¿Qué debe hacer la compañía?

4-27. Usted debe apostar al lanzamiento de una moneda de características físicas desconocidas; una máquina lanza la moneda y usted tiene que decidir si apuesta a cara o cruz. Suponga que los pagos serán los que se indican en la tabla:

	Usted apuesta a:	
Resultado real	*Cara*	*Cruz*
Cara	+100	-100
Cruz	-400	+100

Su juicio a priori indica que posiblemente exista un 50% de probabilidad de que la moneda sea legítima (es decir, la probabilidad que caiga cara es 0.5 y la probabilidad de que sea cruz también es 0.5); además, usted cree que hay un cuarto de probabilidad de que la moneda tenga dos caras (no puede salir cruz); y, por último, piensa que hay un cuarto de probabilidad de que la moneda tenga dos cruces (no puede salir cara).

Se le da la oportunidad de efectuar un experimento antes de apostar, con dos lanzamientos de la moneda. Después de observar los resultados se le exigirá que apueste a cara o cruz en el siguiente lanzamiento.

a. Suponga que en los dos lanzamientos experimentales cayó cara. ¿Qué decisión tomaría (o sea, a qué apostaría en el siguiente lanzamiento)? ¿Cuál es el beneficio esperado?

b. Suponga que en los dos lanzamientos experimentales cayeron una cara y una cruz. ¿Cuál sería su decisión? ¿Cuál es el beneficio esperado?

c. Suponga que cayeron dos cruces. ¿Cuál sería su decisión? ¿Cuál es el beneficio esperado?

d. Suponga que tiene la opción de jugar o no jugar (antes de efectuar los lanzamientos experimentales). ¿Jugaría? ¿Cuál sería el beneficio esperado de jugar?

4-28. La compañía musical UVW fabrica cajas de música para diversos juguetes y productos. UVW garantiza sus cajas musicales contra desperfectos en un periodo de un año.

El gerente de ventas está preocupado por la cantidad de cajas musicales que han devuelto bajo garantía y piensa que si el número de cajas musicales con defectos es grande puede dañarse la imagen de calidad de producto que UVW trata de lograr. Al revisar las cifras detectó que aproximadamente un 5% de las cajas en un año eran devueltas para reparación.

El gerente de producción afirmó que en casi todos los casos el problema se debía a una avería en un mecanismo de resorte fundamental. UVW tenía problemas para conseguir un resorte que fuera plenamente satisfactorio; sin embargo, existía una aleación especial que podría usarse en el resorte y que garantizaría una escasa cantidad de defectos. Un resorte fabricado en la aleación especial costaría dos dólares, en comparación con los 20 centavos del resorte que se usa actualmente. El gerente de producción no consideraba que la presencia de un defecto en 20 cajas mereciera el uso de una parte 10 veces más costosa.

El gerente de producción agregó que se usaba un resorte de aleación especial en las cajas musicales que se devolvían para reparación por causa de un resorte roto; por lo tanto, era muy poco probable que ocurriera una segunda avería. Además, el costo de manejo y reparación de una caja musical con resorte roto era de 13 dólares más dos dólares por el resorte de aleación especial.

El gerente de ventas planteó que debería usarse el resorte de aleación especial en cada una de las cajas de música. Él pensaba que, además del costo directo de la reparación de la caja, se presentaba un costo de mala voluntad de unos cinco dólares cada vez que fallaba la caja de música de un cliente.

La decisión no era trivial, ya que UVW había estimado vender 20 000 cajas musicales en el próximo año.

a. ¿Qué alternativa debe elegir UVW?
b. ¿Cuál es el VEIP?

4-29. Remítase al problema 4-28. El jefe de ingenieros propone una alternativa. Un fabricante de instrumentos le ha propuesto usar un dispositivo de prueba que permite medir la resistencia de los resortes que se usan actualmente y determinar si son "débiles" o "fuertes". Se introdujo un programa experimental en el cual se clasificaron 100 resortes como fuertes o débiles y luego se colocaron en las cajas musicales de UVW. Después, las cajas se sometieron a un proceso diseñado para simular aproximadamente un año de uso. Los resultados fueron:

Resultados de la prueba de 100 resortes

Pronóstico del dispositivo de prueba	*Comportamiento real*		
	Bueno	*Defectuoso*	*Total*
Fuerte	79	1	80
Débil	16	4	20
Total	95	5	100

El gerente de producción no pensó que la prueba fuera de utilidad, ya que observó que se rechazaban cuatro resortes buenos por cada malo que se detectaba. Además, la prueba no eliminaba todos los resortes defectuosos.

El jefe de ingenieros opinó que la prueba sería económicamente factible. Indicó que el costo del equipo y los demás costos asociados con el dispositivo de prueba serían de unos 4000 dólares para el año siguiente.

El gerente de ventas prefería aún usar sólo resortes de aleación especial, pero aceptaría la prueba ya que reduciría casi al 1 % el número de defectos.

¿Debería obtener UVW el dispositivo de prueba y usarlo para revisar los resortes?

Recomendación: Hay que probar cinco resortes para encontrar cuatro "fuertes"; por lo tanto, el costo de un resorte "fuerte" según la prueba es 5/4 20¢ = 25¢.

4-30. Un editor evalúa el original de un libro escrito por un profesor joven y desconocido. El editor quiere enviar el manuscrito para que lo revise un equipo de profesores reconocidos de otras universidades. La experiencia histórica que se obtiene al comparar la evaluación de los revisores con el éxito o fracaso real es la que sigue:

Resultado pronosticado por los revisores \ *Resultado real*	*Éxito*	*Fracaso*
Éxito	55	45
Fracaso	50	50

Si el libro resulta un éxito, los beneficios para el editor serán de 50 000 dólares; si fracasa, el editor perderá 15 000. Cuesta dos mil dólares enviar el manuscrito al equipo de revisión.

a. ¿Cuál es la probabilidad a priori (antes de la revisión) de que el manuscrito tenga éxito?
b. Elabore un árbol de decisión para este problema. Incluya los valores y probabilidades apropiados. ¿Cuál es la estrategia óptima para el editor? *Recomendación:* No es obligatorio que el editor mande el manuscrito a revisión.

4-31. Remítase al problema 4-19. Suponga que puede efectuarse una prueba que cuesta 5000 dólares para determinar el tipo de formación subterránea (tipo I, II o III). La formación subterránea se relaciona con el tipo de pozo, pero la relación es imperfecta; de 25 pozos seleccionados al azar de lugares cercanos a nuestro pozo se obtuvo la siguiente tabla que ilustra las ocurrencias históricas del tipo de pozo y la formación subterránea.

Ocurrencias históricas (25 pozos)

Tipo de pozo \ *Formación*	*I*	*II*	*III*	*Total*
Seco	4	0	0	4
Gas	1	9	0	10
Combinación de gas y petróleo	0	6	0	6
Petróleo	0	0	5	5
Total	5	15	5	25

Si la prueba se realiza y después decide no perforar, ya no podrá vender el contrato por 15 000 dólares; los compradores posibles llegarían a la conclusión de que si usted no perforó, tampoco lo harían ellos, por lo que el contrato no valdrá nada después del resultado "prueba sin perforación".

Elabore un árbol de decisión para este problema. ¿Debe vender el contrato sin probar, perforar sin probar o probar? Si decide probar, ¿en qué condiciones perforaría? ¿Cuál es el VME máximo?

4-32. Una compañía de gran tamaño puede satisfacer sus necesidades de combustible con un contrato anual o una serie de contratos mensuales durante el invierno. El costo del contrato anual es de 80 centavos por litro. Si el año es "normal", el costo medio del litro de combustible en los contratos mensuales será de 75 centavos, pero si es un año de "escasez" de combustible, el costo medio de los contratos mensuales será de 95 centavos por litro. La compañía usará 100 000 litros de combustible en el año y el director estima que la probabilidad de escasez es de Vio.

El gerente puede gastar 500 dólares para obtener un pronóstico económico profesional con el fin de saber si el año será normal o de escasez. A continuación se exhiben los datos de los pronósticos anteriores y la ocurrencia real en los últimos 20 años.

Elabore un árbol de decisión para este problema. ¿Debe comprarse el pronóstico? ¿Cuál es el costo monetario mínimo esperado?

Últimos 20 años

Real \ *Pronóstico*	*Normal*	*Escasez*	*Total*
Normal	15	3	18
Escasez	0	2	2
Total	15	5	20

4-33. El gerente de tarjetas de crédito de un banco comercial debe aprobar o rechazar las solicitudes de la tarjeta de crédito del banco. Actualmente utiliza un procedimiento de "calificación" en el cual se pondera, con base en valores numéricos determinados, una serie de características que aparecen en la solicitud de tarjeta de crédito del individuo. Con base en la calificación ponderada total, el individuo se clasifica como "bueno" o "malo" si la calificación es menor o mayor que un valor establecido.

En fechas recientes el gerente ha considerado una alternativa para el procedimiento, en la cual se rechazaría la solicitud si la calificación fuera menor que un nuevo "límite inferior", se aceptaría si fuera mayor que un nuevo "límite superior", y se investigaría más a fondo si cayera entre los dos límites. La "investigación a fondo" comprende una investigación de crédito detallada, que cuesta 50 dólares cada una. En las tablas adjuntas se muestran los datos disponibles. Los grupos

Sistema actual (resultados de 1000 solicitantes) (problema 4-33)

Clasificación actual sólo con calificación \ *Cumplimiento real*	*Paga*	*No paga*	*Total*
Bueno	400	100	500
Malo	*	*	500
Total	*	*	1 000

* No se puede determinar el cumplimiento real de los solicitantes rechazados.

Sistema propuesto (resultados esperados para 1000 solicitantes) (problema 4-33)

Clasificación propuesta por medio de calificación y revisión de crédito cuando se indique \ *Cumplimiento real*	*Paga*	*No paga*	*Total*
Muy bueno (sólo calificación)	350	50	400
Bueno (calificación y revisión)	150	100	250
Malo (calificación y revisión)	*	*	50
Muy malo (sólo calificación)	*	*	300
Total	*	*	1 000

" No se puede determinar el cumplimiento real de los solicitantes rechazados.

"muy bueno" y "muy malo" se determinan sólo con base en la calificación; los otros dos grupos se definen después de la revisión de la oficina de crédito.

El banco ha determinado que el valor actual de los *beneficios* futuros de un solicitante que "paga" es de 400 dólares, mientras que el valor actual de las *pérdidas* ocasionadas por un solicitante que "no paga" es de -200 dólares.

a. Con base en la información anterior, ¿es mejor el sistema propuesto que el actual? ¿Por qué? ¿Cuál es el VME máximo, en función de valor actual, para 1000 soli citantes?

b. ¿Qué información adicional le gustaría te ner para mejorar el sistema actual descri to? ¿Cómo podría obtener esta información en la vida real?

Problemas más difíciles

4-34. Durante varios años, Wheeling Steel Corporation ha tenido una política PMP (precio al momento del pedido). Una empresa podía pedir acero para entrega futura y pagar el precio vigente en el momento de hacer el pedido, no en el momento de la entrega. Comente acerca de esta política de precios.

4-35. Football Concessions poseía la franquicia para vender helado, refrescos, salchichas y otros productos durante los encuentros locales de fútbol de Wombat University. Era un negocio rentable, ya que se podía estimar con bastante precisión la cantidad de aficionados que acudirían al estadio y la cantidad de comida que comprarían.

Sin embargo, un fin de semana de noviembre, cuando Wombat tenía que jugar con su eterno rival, Carbunkle University, presentaba un problema especial para el concesionario. Ambos equipos estaban invictos y lo más probable era que el ganador pudiera jugar en el campeonato. Las ventas anticipadas de los boletos indicaban que, si el clima era bueno, se podía esperar una multitud de más de 80 000 personas. Por otra parte, el viernes llovía y el pronóstico meteorológico indicaba la

posibilidad de lluvia el sábado, el día del juego. Si la lluvia era intensa, era posible que sólo acudieran al juego 20 000 personas.

El concesionario tenía que pedir su comida el viernes. Por lo general efectuaba su pedido sobre la base de 50 centavos por persona, lo cual había sido bastante preciso en ocasiones anteriores. Su margen de beneficio era del 100% (es decir, el precio de venta era el doble del precio de compra). Por lo general podía recuperar un 20% del valor (costo) de lo que sobrara.

El concesionario asignó las siguientes probabilidades a los distintos números de espectadores. En términos generales creía que mejoraría el clima y acudiría una gran multitud, o bien que llovería y serían pocas las personas presentes. Lo menos probable, pensaba, era un número medio.

Número de espectadores	*Probabilidad*
20 000	0.30
40 000	0.20
60 000	0.10
80 000	0.40
	1.00

¿Cuánta comida debe pedir el concesionario?

4-36. Pocatello Potato Products (PPP) compra patatas frescas y las procesa para producir patatas fritas congeladas y otros productos. PPP compra sus patatas en dos formas: por medio de un contrato de pretemporada y en el mercado libre. En el contrato de pretemporada, el cual se establece antes de plantar las patatas, el procesador (PPP) está de acuerdo en comprar la cosecha del granjero a un precio acordado por quintal de patatas. El precio de contrato de pretemporada actual es de cuatro dólares por quintal. Por otra parte, PPP puede esperar hasta que se hayan cosechado las patatas y comprar las cantidades que necesita en el mercado libre, al precio existente. El precio de las patatas en el mercado libre ha variado considerablemente en los últimos años, entre dos y ocho dólares por quintal. En ocasiones anteriores PPP ha comprado la mitad de sus patatas con contratos de pretemporada y la otra mitad en el mercado libre.

El presidente de PPP no sabe si la decisión anterior es la correcta. Piensa que el precio de cuatro dólares del contrato de pretemporada es demasiado alto y que hay % de probabilidad de que el precio de mercado sea menor o igual que cuatro dólares. Es más, ha evaluado cuidadosamente la distribución de probabilidades de los posibles precios de las patatas en el mercado libre:

Precio en el mercado libre ($ por quintal)	*Probabilidad*
$2.50	0.02
3.00	0.10
3.50	0.40
4.00	0.20
4.50	0.12
5.00	0.06
5.50	0.04
6.00	0.03
6.50	0.02
7.00	0.01
	1.00

Debido a otras necesidades, (como espacio de almacenamiento), PPP no quiere que menos del 30% ni más del 70% de sus necesidades se obtengan con contratos de pretemporada. El próximo año PPP necesitará dos millones de quintales de patatas para procesamiento. Suponiendo que PPP quiere minimizar el costo esperado de las compras de patatas, ¿cuánto deben comprar con contrato de pretemporada? ¿qué recomendaría al presidente de PPP?

4-37. Una compañía de productos químicos construye una planta para la producción de Agrixon, una sustancia química que se usa principalmente en la agricultura. La empresa no está segura de la demanda de Agrixon en el primer año de ventas; sin embargo, se evaluó la siguiente distribución de probabilidades:

Demanda de Agrixon en el año inicial (kilogramos)	*Probabilidad*
800	0.2
1 000	0.4
1 200	0.3
1 400	0.1
	1.0

Agrixon se produce en una máquina especial que genera 200 kilogramos por año. El costo fijo de compra y operación de una máquina es de 560 000 dólares anuales, lo cual incluye supervisión, mantenimiento y otros costos fijos, más el interés anualizado y los costos de equipo. Suponga que los beneficios de la producción anual de una máquina (sin incluir los costos fijos) son de 1.3 millones de dólares, si la demanda es suficiente para operar la máquina todo el año.

El problema que tiene la compañía de productos químicos es determinar cuántas máquinas debe instalar en la planta para el primer año. Los años siguientes no representan ningún problema, ya que la compañía podrá comprar máquinas adicionales si lo requiere y absorber la capacidad no utilizada en los años anteriores, conforme crezcan las ventas.

¿Cuántas máquinas debe instalar la empresa para maximizar el beneficio neto esperado en el primer año?

4-38. La compañía electrónica Little ha presentado una querella legal contra Artex Computers, por prácticas comerciales injustas y monopolistas; Little pide una compensación de 10 millones de dólares por daños. El cuatro de noviembre, la compañía recibe una oferta de Artex para arreglar la disputa por medio de un pago de 3.5 millones de dólares a Little.

La dirección de Little quiere decidir si acepta el arreglo o continúa con la querella. Los abogados están de acuerdo en que la probabilidad de que gane Little es de 2/3. Sin embargo, señalan que, incluso si ganan, sólo hay un 50% de probabilidad de que el juez otorgue los 10 millones de dólares; existe la misma probabilidad de que otorgue una compensación parcial de cinco millones de dólares. Los abogados también han estimado que costará alrededor de 200 000 dólares en honorarios legales entre noviembre y junio (cuando se efectuará la audiencia del caso), más otros 100 000 dólares en honorarios para tratar el caso (unos tres meses).

Cuando Artex ofreció el arreglo de 3.5 millones de dólares, subrayó que se trataba de una "oferta final" y que sólo estaría vigente 30 días. Sin embargo, la dirección y los abogados de Little están de acuerdo en que tal vez Artex haga una nueva oferta en junio, antes de que comience el juicio. Después de pensarlo con cuidado, deciden que una buena estimación de la probabilidad de la nueva oferta de Artex en junio es de 0.60 y, si hay una nueva oferta, la probabilidad de que el arreglo sea por 4.5 millones de dólares es de 0.7, y de 0.3 la probabilidad de que sea por 5.5 millones.

Si Artex no presenta una oferta de último minuto en junio, Little puede iniciar un arreglo. En este caso Little se tendrá que conformar con 2.5 millones de dólares, ya que Artex interpretaría la acción como una debilidad en el caso de Little.

Elabore el diagrama del problema de decisión de Little. Suponiendo que la compañía esté dispuesta a usar el VME para tomar esta decisión, ¿qué estrategia deben usar?

4-39. A principios de enero, los laboratorios Etta recibieron un pedido de 10 000 mililitros de un producto nuevo, calbonita, ingrediente que se usa para fabricar una nueva variedad de medicamentos. Éste ha sido, por mucho, el pedido de calbonita más grande que han recibido, ya que la producción total del año anterior fue de sólo 1200 mililitros. El pedido indica que deben entregarse 5000 mililitros en junio y lo demás en noviembre.

El proceso que usan para sintetizar la calbonita es lento, ya que implica procesar lotes pequeños de materia prima en varias etapas. La compañía tendría que invertir 50 000 dólares en equipo nuevo para alcanzar el nivel de producción de 1000 mililitros mensuales que se necesitan para satisfacer el pedido (requieren todo el mes de enero para pedir e instalar el equipo). El costo variable de manufactura de un mililitro con este proceso es de 15 dólares.

Uno de los investigadores químicos de Etta acaba de descubrir un nuevo proceso para la síntesis de calbonita. Si pudiera lograrse que el proceso operara a gran escala, el proceso de producción sería mucho más sencillo y los ahorros en costo serían considerables. En una situación ordinaria se probaría rigurosamente durante un año el nuevo proceso en el laboratorio y en un pequeña planta piloto, para asegurar que funcionara bien y para estimar los costos de producción. Sin embargo, por los posibles ahorros, la dirección se pregunta si debería reducir el periodo de pruebas. El departamento de ingeniería propuso un programa urgente de pruebas con duración de cinco meses, al término del cual se sabría si el proceso funciona o no y se determinarían los costos de producción. Esta prueba costaría 20 000 dólares más que la prueba normal.

Se estima que hay 0.9 de probabilidad de que el nuevo proceso funcione. Así mismo, si el proceso funciona, hay un 40% de probabilidad de que el costo de producción sea de dos dólares por mililitro, un 40% de que sea diez dólares por mililitro y un 20% de que sea 18 dólares por mililitro.

Si en este momento se tomara la decisión de usar el proceso nuevo, se usaría el mes de junio para instalar el proceso de manufactura. Así, de usar el programa de prueba, la compañía tendría que configurar y procesar los primeros 5000 mililitros con el proceso anterior.

Observe también que sólo se cargarían a la nueva alternativa los costos de prueba increméntales del programa urgente. La compañía probaría y compraría el equipo para el nuevo proceso si las pruebas fueran exitosas, independientemente de la decisión que se tome ahora, por lo que no es necesario considerar los costos relacionados con estas actividades.

a. Elabore un árbol de decisión para este problema.
b. ¿Qué decisiones deben tomarse? ¿Cuál **es** el costo esperado del cumplimiento del pedido?

4-40. María intenta decidir qué hacer con un edificio de apartamentos que heredó de su bisabuela. Si lo vendiera ahora podría obtener 100 000 dólares. Sin embargo, María no necesita el dinero en este momento, por lo que piensa conservar la propiedad y venderla después.

Suponga que María puede vender el edificio ahora, al final del año entrante (año 1) o al final del siguiente (año 2). Ha decidido que no conservará el edificio más de dos años.

María recibiría 5000 dólares en alquiler (en realidad, alquiler menos costos de operación) por cada año que conserve el edificio. María acude a los expertos en bienes raíces de la localidad y determina las probabilidades siguientes con respecto **a** los aumentos o reducciones en el valor de **la** propiedad: En cada uno de los años (año 1 y año 2) hay un 20% de probabilidad de que aumente 10 000 dólares el valor del edificio y un 80% de que su valor se reduzca en la misma cantidad (la situación no es muy estable en la ciudad). Éstas son las probabilidades *globales* de *cada* año.

Sin embargo, lo que suceda en el primero y el segundo años no es independiente; María cree que si el valor aumenta en el primer año, entonces hay un 60% de probabilidad de que también aumente en el segundo. Por supuesto, si el valor disminuye en el primer año, se presentarán cambios correspondientes en las probabilidades del segundo, sujetas a las probabilidades globales que se mencionaron antes.

A primera vista, María decide considerar sólo la cantidad que recibiría de vender el edificio (incluyendo los aumentos o reducciones en el valor, si llegara a ocurrir) más la cantidad que recibe por el alquiler (no se preocupe por depreciaciones, impuestos y otras complicaciones).

a. Elabore un diagrama para el problema de decisión de María. Incluya los valores de los beneficios al final del árbol y los valores de las probabilidades, donde sea conveniente.
b. ¿Qué decisiones debe tomar María?
c. (Opcional) Suponga una tasa de descuento del 15%. ¿Qué decisión debe tomar María? Si la tasa de descuento es del 15%, los flujos de efectivo que se reciben al término del año 1 valen '/1is = 0.87 dólares a valor actual; los flujos de efectivo que

se reciben al término del año 2 valen 0.76 dólares actuales.

4-41. En el ejemplo de las páginas 101-111 se usó una situación típica de los gerentes. ¿Qué dificultades existen al aplicar el modelo a una situación empresarial normal?

4-42. Artex Computers va a comprar 10 000 unidades de una pieza que debe incorporar a los productos de la compañía. El pedido se hará al proveedor que ofrezca la cotización más baja y que entregue mil unidades por mes en los próximos 10 meses.

Frank Machine Shop (FMS) quiere concursar para obtener este pedido. Hay dos factores que intrigan al señor Frank en su intento por establecer el precio. El primero tiene que ver con la probabilidad que tiene FMS de ganar. El señor Frank decide considerar sólo dos propuestas: 12 dólares por unidad o 13 dólares por unidad. Él estima que tiene $^2/_3$ de probabilidad de ganar con el primer precio y $^1/_3$ de ganar con el segundo.

El segundo factor de la decisión es el costo de manufactura unitario para FMS. Hay dos procesos de producción disponibles. El primero, el proceso A, cuesta 10 dólares por unidad; el segundo, el proceso B, nunca se ha usado en FMS. El jefe de supervisores dice que hay un cuarto de probabilidad de que el costo unitario sea de nueve dólares; un medio de que sea de 10 dólares y un cuarto de que el costo sea de 11 dólares, si usan el proceso B.

El jefe de supervisores ha propuesto llevar a cabo un experimento con el nuevo proceso (B). Se producirían 10 o 15 unidades y, a partir de los resultados, se podría estimar "bastante bien" el costo unitario. El costo de la prueba sería de 500 dólares. Cuando se le pidió al jefe que fuera más específico con respecto a la precisión de la estimación del costo, presentó la tabla que se muestra más adelante.

El señor Frank no está seguro de que esta información sea relevante. El controlador ha declarado que la prueba propuesta puede ser provechosa, pero debe llevarse a cabo después de obtener el contrato. De lo contrario, declara, la empresa puede gastar 500 dólares y no recibir el contrato. El supervisor cree que hay que efectuar la prueba antes de presentar la cotización, ya que puede influir en el precio de concurso de FMS.

¿Qué acciones debe emprender FMS? ¿Cuál es el beneficio esperado?

Probabilidades de diversos costos estimados

Costo estimado por el supervisor	*Costo real por unidad*		
	$9	*$10*	*$11*
$ 9	0.8	0.1	0.1
10	0.1	0.8	0.1
11	0.1	0.1	0.8
	1.0	1.0	1.0

4-43. La compañía Breezy Breakfast Foods Company quiere vender un nuevo cereal para el desayuno. Si el nuevo cereal tiene éxito, representaría beneficios de 10 millones de dólares (valor actual) durante la vida del producto. Si fracasa, se incurriría en una pérdida de dos millones de dólares. La gerencia opina que hay un 50% de probabilidad de que el producto tenga éxito.

Dos empresas de investigación de mercados han propuesto a Breezy que obtenga más información. Una de ellas, Attitude Surveys, recopila datos acerca de la opinión de los clientes con respecto a las características específicas del producto, como serían la dulzura, el contenido de calorías, el valor nutritivo, etc., para producir un pronóstico de "éxito" o "fracaso". La experiencia de la compañía en sus 50 estudios más recientes de productos similares es la que se presenta a continuación:

Experiencia de Attitude Surveys

Resultado real / *Pronóstico*	*Éxito*	*Fracaso*
Éxito	20	5
Fracaso	5	20

Otra compañía, Market Competition Inc., realiza sus análisis en forma completamente diferente e independiente. Esta empresa lleva

a cabo un extenso análisis de los productos competitivos y presenta una recomendación de "éxito" o "fracaso" con base en la cantidad y la calidad anticipada de los productos competitivos. Su experiencia en 50 estudios ha sido:

Experiencia de Market Competition

Pronóstico \ Resultado real	*Éxito*	*Fracaso*
Éxito	22	3
Fracaso	0	25

Attitude Surveys cobra 100 000 dólares por estudio y Market Competition cobra 150 000.

a. Considere sólo Attitude Surveys. Use un árbol de decisión para decidir si Breezy debe comprar este estudio.

b. Considere sólo Market Competition. Use un árbol de decisión para decidir si Breezy debe comprar este estudio.

4-44. Los estudios cinematográficos MBA intentan decidir cómo distribuir su nueva película, *La garra.* La película tiene el potencial para ser un éxito financiero, pero los ejecutivos no están seguros, pues es un tema controvertido; además, han visto que algunas películas anunciadas como "éxitos" se han convertido en fracasos, con terribles consecuencias financieras.

MBA necesita decidir si debe presentar *La garra* en forma limitada al principio. Esto significa que la película sólo se proyectaría en unos cuantos cines en los primeros seis meses; después de este periodo se distribuiría en forma general. Este método es el mejor si la película es un éxito, ya que los estudios obtienen mejores beneficios de estos cines.

La otra alternativa es distribuir de inmediato la película a todos los lugares donde sea posible.

Los beneficios de las dos alternativas se presentan en la tabla de la página adyacente, clasificados en función del "éxito", del resultado "regular" o del "fracaso" de la película.

En MBA se discute mucho acerca del potencial de *La garra.* La gerencia finalmente ha logrado ponerse de acuerdo con respecto a las probabilidades de la tabla, pero aún no saben qué decisión tomar. Una posibilidad es proyectarla anticipadamente unas cuantas veces y ver la reacción del público. El costo del proceso sería de alrededor de 50 000 dólares, lo cual, según varios ejecutivos de la compañía, sería un desperdicio, ya que el público de las funciones adelantadas tiende a calificar la película como buena o sobresaliente incluso cuando posteriormente es un

Beneficios de la película *La garra*

Nivel de éxito	*Probabilidad*	*Acciones*	
		Distribución inicial limitada	*Distribución general*
Éxito	0.3	$22 millones	$12 millones
Regular	0.4	8	8
Fracaso	0.3	-10	- 2
	1.0		

Reacción del público de las proyecciones adelantadas

Calificación del público	*Éxito real de la película*			
	Éxito	*Regular*	*Fracaso*	*Totales*
Sobresaliente	9	12	3	24
Buena	1	6	5	12
Mala	0	2	2	4
Totales	10	20	10	40

fracaso. Para apoyar su punto de vista, elaboraron la siguiente tabla que describe la experiencia anterior de la compañía con la reacción del público en 40 proyecciones adelantadas.

a. Elabore el árbol de decisión para este problema.

b. Calcule las probabilidades a posteriori de "éxito", "regular" y "fracaso" con base en las reacciones del público.

c. Suponga que MBA está dispuesto a basar su decisión en el valor monetario esperado. ¿Qué decisión debe tomar con respecto a la película *La garra*?

Caso 4-45



Susan Parks, jefe de analistas del Departamento Estatal de Bosques, elabora una recomendación para el gobernador con respecto al área de esquí propuesta para Wabash. El departamento propuso inicialmente un centro de esquí de gran tamaño, pero la escasez de gasolina, la inflación y otros factores han puesto en duda las estimaciones originales acerca del número de personas que usarían el centro. Se han propuesto otras dos alternativas: una es construir instalaciones más pequeñas y ampliarlas dentro de dos años si lo justifica la demanda; la otra es posponer el proyecto dos años. La señora Parks ha recopilado estimaciones de costos, ingresos y probabilidades relacionadas con las diversas alternativas.

Costará 15 millones de dólares construir un centro de gran tamaño. Si se construyen instalaciones más pequeñas y se amplían después, el costo sería de doce millones de dólares para la parte inicial y de seis millones para la ampliación. Parks ha decidido usar tres niveles de demanda potencial de esquiadores para Wabash: alto, medio y bajo. Los costos y los ingresos para estos casos se presentan en la tabla de estimaciones de la página 132. El Departamento de Bosques utiliza una medida de los beneficios al evaluar este tipo de proyectos, la cual incluye los ingresos y los costos monetarios, pero además incorpora un valor para los beneficios de recreación que ofrece el centro (a razón de un dólar diario por visitante).

Después de consultar con sus colegas, la señora Parks estima que hay 0.10 de probabilidad de que la demanda de los *próximos dos años* sea alta, 0.60 de que sea media y 0.30 de que sea baja. La demanda que exista después del segundo año dependerá de lo que ocurra en los dos primeros años. Estas probabilidades también se han evaluado y se muestran en la tabla de la siguiente página.

Considere un periodo de 15 años para evaluar este proyecto y calcule los beneficios netos totales de los 15 años. No incluya ninguna previsión para la inflación, descuentos o crecimiento en la demanda, nada que no esté indicado en la tabla. Suponga que al término de dos años, el Departamento de Bosques podrá evaluar con certeza la demanda de los 13 años siguientes. Por último, suponga que el departamento está dispuesto a usar los beneficios netos esperados como criterio para presentar su recomendación al gobernador.

a. Elabore el diagrama de árbol para el problema de decisión.

b. Complete las probabilidades y los beneficios del árbol.

c. ¿Qué recomendación debe presentarse al gobernador?

Estimación del total de visitantes y los costos para el área de Wabash

	Visitantes al año (miles)	*Ingresos anuales por alquiler y concesiones (miles de dólares)*	*Costos fijos (miles de dólares)*	*Ingresos netos (miles de dólares)*	*Beneficios netos ponderados* (miles de dólares)*
Centro de gran tamaño					
Demanda alta	800	$2 400	$700	$) 700	$2 500
Demanda media	500	1 600	700	900	1 400
Demanda baja	200	600	700	-100	100
Instalaciones más					
Demanda alta	500	$1 600	$400	$1 200	$1 700
Demanda media	400	1 000	400	600	1 000
Demanda baja	200	600	400	200	400

• Los beneficios netos ponderados incluyen los ingresos monetarios y los visitantes valorados en un dólar por día.

Probabilidades de la demanda en el centro Wabash después del segundo año

Demanda hasta el año 2	*Demanda después del año 2*	*Probabilidad*
Alta	Alta	1.0
Media	Alta	⅓
	Media	½
	Baja	⅙
Baja	Alta	⅙
	Media	⅓
	Baja	½

Caso 4-46



Es junio de 1992 y el director general de Particular Motors, fabricante australiano de automóviles, considera el futuro del modelo Torana. Actualmente, el Torana se ofrece con la opción de un motor L4 (de cuatro cilindros, importado de Alemania), o un motor L6 o V8, ambos fabricados en Australia. Se ha programado un cambio radical del modelo que se presentará al público en febrero de 1995. Hay un punto aún por decidirse: si Particular Motors debe fabricar en Australia su propio motor L4.

Australia, al igual que otros lugares, se enfrenta a una crisis energética. El gobierno central de Canberra considera seriamente la posibilidad de aprobar una ley que aumentaría notablemente el precio de la gasolina y el aumento daría lugar a mayores ventas del Torana con motor L4, más pequeño, y la reducción en la venta de los Torana con motores L6 y V8. El gobierno puede establecer tres

precios posibles para la gasolina: 1.10, 1.35 o 1.60 dólares por litro. El departamento de ventas estima que las ventas de los tres modelos en el periodo 1995-1997 es el siguiente (después de 1997 habrá nuevos cambios en el Torana):

Precio de la gasolina	*Ventas totales del Torana en tres años con:*			
	Motor L4	*Motor L6*	*Motor V8*	*Total*
$1.10	25 000 80	75 000	20 000	120 000
1.35	000 120	75 000	15 000	170 000
1.60	000	50 000	10 000	180 000

La contribución para cada tipo de automóvil es:

Modelo	*Contribución por automóvil a los beneficios*
Torana con motor L4 importado	$100
Torana con motor L4 australiano	300
Torana con motor L6	350
Torana con motor V8	400

Le preguntaron al experto de relaciones públicas de Canberra acerca del futuro de los precios del combustible. Después de un análisis cuidadoso, se evaluaron las siguientes probabilidades:

Precio de la gasolina (dólares por litro)	*Probabilidad*
$1.10	0.10
1.35	0.50
1.60	0.40
	1.00

Un factor que complica la decisión acerca de construir el motor L4 en Australia es la posibilidad de que el gobierno apruebe la Ley de Contenido Local. Esta ley, de aprobarse, obligaría a Toyota y Nissan a aumentar el contenido fabricado localmente de los automóviles que se montan en Australia, lo cual implica comprar un motor L4 australiano. Hay un 60% de probabilidad de que se apruebe la ley, en cuyo caso Particular Motors negociaría un contrato con Toyota y Nissan (suponiendo, por supuesto, que hubiera decidido producir el L4 en Australia) para fabricar los 100 000 motores L4 que requerirían los japoneses en el periodo de 1995 a 1997. La contribución de cada máquina que se vendiera a los japoneses sería de unos cien dólares.

Para que Particular Motors pueda comenzar la manufactura del motor L4 australiano, debe asignar cuatro millones de dólares en 1992 (antes de conocer el precio de la gasolina o el resultado de la decisión acerca de la Ley de Contenido Local) para la construcción de la línea de transferencia principal para el bloque del motor. Para completar las instalaciones productivas necesitaría otros 14 millones de dólares, pero esto puede posponerse hasta que el gobierno decida cuál será el precio de la gasolina y apruebe o rechace la Ley de Contenido Local.

También se necesitarán inversiones adicionales para satisfacer los requisitos de los contratos japoneses. Si se invierten ahora un millón de dólares pueden incorporar los requerimientos al sistema de producción y se necesitará otro millón de dólares al concluir el sistema más tarde. Alternativamente se puede modificar el sistema de producción después de conocer el precio de la gasolina y la decisión sobre la Ley de Contenido Local, pero si lo hacen entonces les costará cuatro millones de dólares.

a. Elabore el árbol de decisión para el problema al que se enfrenta Particular Motors.
b. Incluya sólo los *flujos increméntales de efectivo* que se relacionen con la decisión del motor L4.
c. Incluya las probabilidades en el árbol.
d. Determine cuál es la estrategia óptima para Particular Motors. ¿Cuál es el flujo de efectivo incremental esperado?

Recomendación: Para que el árbol sea un poco más sencillo, observe que el contrato japonés no se relaciona con el precio de la gasolina, pero sólo se llevará a cabo si se aprueba la Ley de Contenido Local y, por supuesto, si Particular Motors decide fabricar un motor L4 australiano.

Caso 4-47



Usted es el gerente de una planta de montaje de automóviles; sólo ha transcurrido una hora del turno de día cuando el supervisor de control de materiales le informa de un posible problema. El supervisor le indica que en la hora 4 la línea de montaje quedará sin dispositivos de apertura del cofre, por causa de retrasos en las entregas. Hay dos pedidos de dispositivos en camino y el supervisor los ha rastreado; basta que llegue uno de los dos para resolver el problema. Hay cierta probabilidad (2 sobre 10) de que el primer pedido llegue en la hora 5; de lo contrario, llegará después de que termine el turno. La probabilidad de que el segundo pedido llegue hoy es "buena" (6 sobre 10 de que llegue en la hora 6); de lo contrario, también llegará después de concluir el turno. Sin embargo, las probabilidades de llegada de los dos pedidos no son independientes, ya que el clima afecta a los dos. Usted estima que si el primer pedido llega a tiempo (en la hora 5), la probabilidad de que el segundo pedido también llegue a tiempo (en la hora 6) es de 0.9.

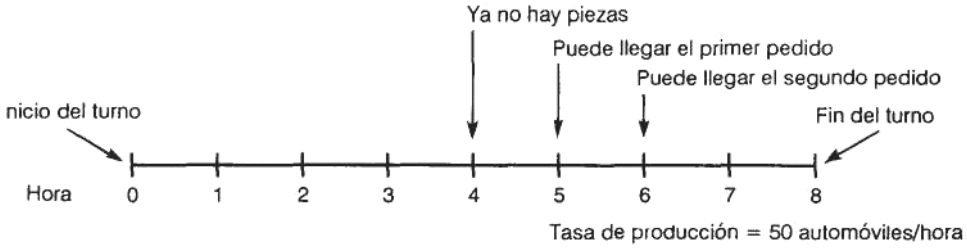
Usted debe tomar la decisión acerca de lo que debe hacerse cuando ocurra la escasez. Tiene tres opciones: (1) detener la línea y mandar a los trabajadores a casa; (2) sustituir una pieza similar de otro modelo; (3) montar los automóviles sin el dispositivo de apertura del cofre y montarlo mañana fuera de la línea. Cada una de estas opciones tiene sus costos. Si detiene la línea perderá la producción

de 50 automóviles por hora. Su contrato sindical le permite mandar a los trabajadores a casa sin tener que pagarles (si ya trabajaron cuatro horas); sin embargo, la planta opera con un programa muy ajustado y tendría que recuperar la producción perdida con tiempo extra, a un costo de 40 dólares por automóvil.

También hay limitaciones en el caso de la sustitución del dispositivo de apertura del cofre con un modelo similar. El sustituto cuesta lo mismo y al parecer funciona igual, pero la sustitución debe ser aprobada por el comité de ingeniería de producto, en Detroit. Esta aprobación no la obtendría hasta mañana; sin embargo, puede anticiparse y usar el dispositivo sustituto. Si llegara la aprobación no se presentaría ningún costo adicional, pero si no se aprueba, mañana tendría que quitar el sustituto e instalar el correcto, a un costo de 120 dólares por automóvil. Usted estima que hay 0.6 de probabilidad de que el comité de ingeniería de producto apruebe la sustitución.

La tercera opción implica montar los automóviles sin el dispositivo de apertura del cofre y montarlo mañana, cuando lleguen las piezas. Esto se hace fuera de la línea de montaje y cuesta 60 dólares por automóvil.

El diagrama adjunto resume la situación. Otras hipótesis adicionales: puede cerrar la planta en cualquier momento (es decir, en la hora 4, la 5 o la 6); pero si ya la cerró, permanece así hasta el final del turno. Suponga también que si comienza con una alternativa, usar el sustituto o no usarlo, continuará con ella hasta que lleguen las piezas o usted cierre (con esto se elimina la posibilidad de usar el sustituto en la hora 4 y en la hora 5 utilizar la alternativa de no montar la pieza).



a. Elabore el diagrama para el problema de decisión descrito. Incluya todas las ramas y las alternativas de decisión permitidas.
b. Muestre los costos como valores finales al *final* del árbol.
c. Muestre las probabilidades en el árbol.
d. ¿Qué decisiones deben tomarse para minimizar el costo esperado?

Caso 4-48

Son las 7:00 P.M. del 24 de diciembre; el lugar es el centro de control de emergencia de Telco, la compañía telefónica del área de la bahía de San Francisco. Larry Nettles, el director en turno, ha recibido varios informes del área de servicios de operación de que los clientes han tenido problemas para efectuar llamadas fuera de sus áreas locales. Al revisar los informes de diagnóstico de las oficinas de

conmutación principales, Larry confirma lo que más temía: el problema se encuentra en uno de los tres cables marinos que cruzan la bahía de San Francisco.

Cuando hay problemas con los cables marinos, es necesario identificar lo más pronto posible cuál es el que ocasiona el problema y aislar la sección averiada. Las llamadas sólo pueden redirigirse si se lleva a cabo este paso. La única manera de identificar el cable averiado (y en qué punto está) es enviar un barco y su tripulación para examinar cada uno de los cables a intervalos determinados y aislar el problema. Este proceso de búsqueda tiene que efectuarse por tanteo, cable por cable.

Telco ha hecho los preparativos para este tipo de emergencia. Se efectuó un estudio detallado de los tres cables y de la posibilidad de que se presentaran averías. El estudio tomó en cuenta la longitud de la ruta del cable, la edad del cable y el número de rutas de navegación que cruzan el cable. Con base en estos datos, Telco determinó las siguientes probabilidades de desperfectos en los cables (supondremos que la probabilidad de que dos o tres cables estén averiados al mismo tiempo es cero):

Cable	*Ubicación*	*Probabilidad de averías*
Cable 1	San Francisco/Oakland	0.3
Cable 2	Sausalito/Oakland	0.5
Cable 3	Hayward/San Francisco	0.2

Las probabilidades anteriores implican que, por ejemplo, si un cable tiene problemas, es dos veces más probable que se trate del cable 2 que del cable 3.

También hay estudios que indican el número de llamadas que viajan por cada cable y los ingresos que generan estas llamadas. La Nochebuena es, por supuesto, la fecha de más llamadas, y la pérdida de ingresos seria considerable si Telco no aisla rápidamente el cable averiado. Se estima que las pérdidas serían:

Cable	*Pérdida de ingresos (miles de dólares por hora)*
Cable 1	$ 28
Cable 2	90
Cable 3	120

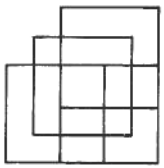
Para localizar el cable defectuoso, el centro de control de emergencias tiene que enviar un barco y su tripulación, con costo de mil dólares por hora. Sólo hay un barco y la tripulación tiene que revisar cada uno de los cables hasta aislar el

que esté averiado. El problema de decisión del centro de emergencias es decirle a la tripulación en qué orden deben revisar los cables.

La experiencia indica que si el cable está defectuoso, la tripulación tardará una hora en aislar el lugar de la avería; los procedimientos de redirección de llamadas comenzarían inmediatamente después. Sin embargo, si el cable no tiene defectos, la tripulación tardará dos horas en revisarlo por completo, antes de pasar al cable siguiente. Por ejemplo, si el cable 3 fuera el defectuoso, pero la tripulación examina primero el cable 1, luego el 2, antes de llegar al 3, el tiempo de búsqueda total sería de cinco horas (dos horas para revisar el cable 1 y determinar que está bien, dos horas para indicar que está bien el cable 2 y una hora para aislar el problema en el cable 3).

a. Elabore un árbol de decisión que ayude al director del centro de emergencia a decidir cuál será el orden de revisión de los cables. Incluya las probabilidades en el árbol (en los casos donde revisen un cable y no tiene defectos, suponga que las probabilidades *relativas* de los otros dos cables no cambian). Incluya las unidades de evaluación (pagos) al final de las ramas del árbol de decisión. Suponga que Telco está dispuesto a usar el costo total (ingresos menos costos del barco y tripulación) como la medida de los resultados.
b. ¿Qué estrategia de búsqueda debe usar Telco?

CAPÍTULO 5



Teoría de la decisión

La teoría de la decisión tiene que ver principalmente con la forma de ayudar a las personas (o a las organizaciones) a tomar decisiones y a mejorar el proceso de toma de decisiones en condiciones de incertidumbre. La teoría de la decisión permite que el decisor analice un conjunto de situaciones complejas con varias alternativas y distintas consecuencias. El objetivo principal es identificar un curso de acción que sea consistente con las cuestiones económicas y los deseos psicológicos del decisor. En el capítulo 4 también se analizó la teoría de la decisión, pero no se consideraron criterios de decisión distintos del criterio de maximización del valor monetario esperado.

Los gerentes empresariales muchas veces tratan las decisiones complicadas suponiendo que hay certidumbre. Es decir, suponen que los datos que usan en los cálculos son conocidos y no hay dudas al respecto; a lo mucho, hacen una declaración justificadora, como: "por supuesto, no siempre se conocen los datos con certeza". Este método es razonable para muchas decisiones. La toma de decisiones puede ser compleja, incluso en condiciones de certidumbre. En ocasiones puede ser conveniente partir de una situación en la que se supone que se conocen los hechos. Muchas soluciones convencionales que se ofrecen para problemas como los de control de inventarios, decisiones de fabricar o comprar, presupuestos y precios, suponen que hay certidumbre.

En este capítulo continuará el análisis del arte de tomar decisiones en condiciones de incertidumbre. El punto focal será el **criterio de decisión** que se utilice: es decir, cómo debe seleccionarse la mejor acción. En el capítulo 4 supusimos que el criterio adecuado era el valor esperado. En este capítulo y los que siguen se considerarán otros criterios y resultará evidente que es difícil encontrar respuestas absolutamente correctas cuando el futuro es incierto; sin embargo, hay métodos razonables para esta clase de problemas de decisión que deben comprender los gerentes.

El problema de decisión

En este capítulo se considerará un tipo de decisión bastante común. Hay varias acciones y varios estados de la naturaleza posibles. Por ejemplo, las acciones pueden ser:

1. Decidir cuál es el número de unidades de inventario que hay que pedir.
2. Comprar o no un seguro contra incendios.
3. Fabricar o comprar un producto.
4. Invertir o no en equipo.
5. Ampliar o no una línea de productos.
6. Cambiar o no el precio de un producto (y, de cambiarlo, cuánto).

Los estados de la naturaleza son los sucesos posibles que pueden ocurrir. Uno de los estados es el verdadero, pero no se sabe cuál. A continuación se presentan posibles estados o sucesos de las acciones anteriores:

1. La demanda del producto puede ser 0, 1, 2, 3, . . ., 50.
2. Puede ocurrir un incendio o puede no ocurrir.
3. Si se fabrica el producto, el costo sería 10 centavos, 11 centavos, . . ., 50 centavos.
4. Si se invierte en el equipo, el ahorro en costo por hora puede ser 1.00, 1.01, 1.02,. .., 2.50 dólares.
5. Si se amplía una línea de productos, las ventas pueden ser de un millón de dólares, dos millones, etcétera.
6. Si el precio se modifica, las ventas pueden ser 0, 1, 2, 3,. . ., 10 000 unidades.

Al no saber cuál de los estados es el verdadero, se asigna una *distribución de probabilidad* a la posible ocurrencia de cada suceso (la división de los estados posibles puede ser tan fina como se desee). La distribución de probabilidad puede basarse en pruebas objetivas del pasado, si el decisor considera que se mantienen las mismas fuerzas en el futuro. Sin embargo, no estamos restringidos a usar probabilidades objetivas. En algunos casos puede ser razonable asignar las probabilidades que el decisor se considere adecuadas para los estados posibles, de manera que la acción que se elija sea consistente con lo que se cree acerca de los sucesos posibles y sus consecuencias económicas. Las pruebas objetivas deben proporcionarse, en la medida de lo posible, para ayudar al decisor a mejorar la asignación de probabilidades.

Ejemplo

Para ilustrar este análisis se desarrollará un ejemplo, un problema básico de decisión de inventarios, parecido al tipo de problemas que se presentaron en el capítulo 4. El problema es determinar cuántas unidades hay que pedir. El precio del producto es de cinco dólares y el beneficio es dos dólares por unidad. Las unidades no vendidas no tienen valor de desecho. Los estados posibles (demanda posible) y sus probabilidades se muestran en la tabla 5-1.

Las acciones posibles son comprar cero, una o dos unidades (no sería razonable comprar tres, ya que la probabilidad de vender tres unidades o más es cero). Los

Tabla 5-1

Demanda	*Probabilidad*
$q_1 = 0$	0.05
$q_2 = 1$	0.60
$q_3 = 2$	0.35
	1.00

Tabla 5-2 Tabla de beneficios condicionales

Estado de la naturaleza: La demanda es:	*Acción*		
	d_1 *Comprar 0*	d_2 *Comprar 1*	d_3 *Comprar 2*
$q_1 = 0$	0	−3	−6
$q_2 = 1$	0	2	−1
$q_3 = 2$	0	2	4

estados de la naturaleza posibles son que la demanda será cero, una o dos unidades. El primer paso para obtener una solución es preparar una tabla (véase Tabla 5-2) que muestre los beneficios que se obtendrían de cada combinación de acción y estado de la naturaleza; a esta tabla la hemos llamado tabla de *pagos* o de *beneficios condicionales*. Los beneficios dependen de la elección de una acción específica y de la ocurrencia de un estado; la representación simbólica de un pago es $R(q_i, dj)$. Así, $R(q_2, d_3)$ representaría el beneficio de la decisión d_3 si el estado es q_2. En este caso, $R(q_2, d_3) = -1$.

Hay que decidir si se piden cero, una o dos unidades. No es obvio cuántas hay que pedir. La solución de este problema relativamente sencillo es complejo; es más, ni siquiera está claro cuál "debería" ser la respuesta. Presentaremos ahora para ello, distintos criterios de decisión posibles.

Criterios de decisión

A continuación se presentan algunos criterios de decisión posibles:

1. Suponiendo sucesos **igualmente probables,** elegir la *dj* que maximice:

$$\frac{1}{n}[R(q_1, d_j) + R(q_2, d_j) + R(q_3, d_j)]$$

donde n es el número de sucesos (estados) posibles; en este caso, $n = 3$.

2. Seleccionar la acción que maximice los beneficios máximos posibles, el procedimiento **maximax.**
3. Maximizar los beneficios mínimos posibles, el procedimiento **maximin** (o minimizar el costo máximo posible, el procedimiento **minimax).**
4. Basar la decisión en los beneficios del suceso con **mayor probabilidad** de ocurrencia.
5. Utilizar la **regla de decisión del valor esperado:** Multiplique las consecuencias de cada acción por las probabilidades de las ocurrencias y sume los productos. La acción con mayor valor esperado es la decisión más deseable.
6. Seleccionar una acción que **domine** a las demás acciones.
7. Seleccionar una acción que tenga la **mayor utilidad esperada.**

Los primeros cuatro criterios de la lista son menos deseables; dentro de poco veremos por qué. Los tres últimos criterios son razonables; la elección de uno de ellos depende de las circunstancias. En este capítulo se analizarán los seis primeros criterios; el criterio de la utilidad esperada es el tema del capítulo 6.

El tipo de decisión que se estudia en este capítulo puede considerarse como un juego contra la naturaleza. Hay que recordar que la naturaleza no piensa ni elabora planes contra su oponente. Los criterios que pueden ser completamente razonables en situaciones competitivas (como el criterio minimax) son menos razonables en un juego contra la naturaleza. Esta diferencia es importante, ya que el análisis que se presenta a continuación sólo se aplica a decisiones que comprenden a la naturaleza, no a decisiones en las que participa un oponente que piensa.

En todo el capítulo se supondrá que el decisor está dispuesto a usar el dinero para medir los resultados. Por supuesto, esto no ocurre en muchas situaciones. Por ejemplo, al decidir qué empleo debe aceptarse, es probable que además del salario se considere si el puesto es un reto. Éste es un ejemplo de problema de decisión con varios atributos y los problemas de este tipo se analizan en el capítulo 6.

Igualmente probable

Este procedimiento propone que se sumen las consecuencias posibles de cada acción y se divida entre el número de sucesos posibles. La acción con mayor valor con base en la hipótesis de igualdad de probabilidad será la más deseable. Si no se sabe mucho acerca de la probabilidad de los sucesos posibles, algunas personas dirían entonces que se debe suponer que cada suceso tiene la misma probabilidad. Sin embargo, es muy raro el caso en el no se tenga *alguna* idea acerca de la probabilidad de los sucesos. Estas probabilidades, que pueden o no estar basadas en pruebas objetivas, deben usarse en el análisis si se desea que la acción sea consistente con nuestro juicio. Si se considera que un suceso es más probable que otro, al suponer automáticamente que todos los sucesos tienen la misma probabilidad no se asegura tal consistencia. Por ejemplo, en el problema al inicio del capítulo, se proporciona una distribución de probabilidad específica (véase Tabla 5-1). No hay ninguna razón para

suponer que existe una probabilidad de ocurrencia igual para cada uno de los sucesos.

Cuando se considere que es adecuado usar probabilidades y no haya una razón para suponer que las probabilidades de los estados sean iguales, entonces deberá usarse la mejor estimación de las probabilidades, en lugar de la hipótesis de "igualmente probables".

Maximax

El criterio **maximax** propone que el decisor debe buscar los mayores beneficios posibles para cada acción y escoger la acción que tenga mayores beneficios. Esta estrategia sólo contempla el mayor beneficio posible e ignora las probabilidades y consecuencias de los otros sucesos que pueden ocurrir. En el ejemplo (Tabla 5-2), el criterio maximax elegiría la acción "comprar 2", ya que ofrece beneficios posibles de cuatro dólares; sin embargo, ignora la posibilidad de que pueda generar pérdidas por seis dólares.

El criterio maximax no es una regla de decisión prudente. Hay algunas circunstancias en las que se desea tomar riesgos prudentes, pero debe hacerse tomando en cuenta las probabilidades y las consecuencias de lo que puede suceder. El método de la utilidad esperada, que se aborda en el siguiente capítulo, sí incluye estos factores al tomar una decisión.

Minimax

El criterio **minimax** sugiere que se seleccione la acción con menor pérdida máxima posible o, de otro modo, la que presente los mayores beneficios mínimos posibles. En otras palabras, hay que asegurar que se ganen por lo menos *R* dólares y buscar la acción que brinde la *R* mayor (la menor pérdida, si se analizan las pérdidas).

La acción minimax del ejemplo sería pedir cero unidades. La pérdida máxima que puede ocurrir con cero unidades es cero dólares; las pérdidas máximas de las otras dos acciones son tres y seis dólares.

El criterio minimax tiende a llevar a la decisión de no hacer nada, a menos que no haya probabilidad de pérdida. Es un criterio muy conservador. La persona que use el criterio minimax se vería, a final de cuentas, ante la amenaza de morirse de hambre (al no hacer nada) y estaría obligado a actuar. En términos de las actividades empresariales, la corporación se estancaría y sería superada por la competencia dispuesta a innovar y a tomar riesgos razonables de sufrir pérdidas.

En otras situaciones se puede llegar a una decisión totalmente irracional al usar el criterio minimax. Por ejemplo, suponga que la tabla 5-2 muestra los costos condicionales de dos acciones. La mejor acción es "comprar el seguro", de acuerdo con el criterio minimax, ya que el costo máximo es 100 dólares (el costo máximo de la acción "no comprar" (el seguro) es 101 dólares). Sin embargo, si los dos estados tuvieran la misma probabilidad, o si el estado q_2 es más probable

Tabla 5-3 Tabla de costos condicionales

Estado de la naturaleza	*Acción*	
	Comprar seguro	*No comprar*
q_1	\$100	\$101
q_2	100	1

que q_u entonces la mayoría de las personas opinarían que la acción más deseable es "no comprar". Minimax no es una estrategia deseable en un juego contra la naturaleza, pero sí es útil frente a adversarios que piensan.

Probabilidad máxima

Si se usa el procedimiento del criterio de decisión de **probabilidad máxima,** se considera únicamente la consecuencia del estado con *mayor probabilidad* de ocurrencia y se elige la mejor acción para el estado. En el ejemplo, este estado es "la demanda es uno", lo que lleva a la decisión de pedir sólo una unidad. Es una decisión razonable en este contexto, pero no siempre será así. Por ejemplo, suponga que la probabilidad de que la demanda sea uno es de 0.51 y 0.49 de que la demanda sea dos. Ahora ya no es tan evidente que la mejor decisión sea pedir uno. Para que sea más evidente que la decisión de probabilidad máxima puede tener defectos, reduzca la pérdida de una unidad sobrante (aumente el valor de desecho) de manera que no existan consecuencias desfavorables si sobran unidades. Es mejor pedir dos unidades si la probabilidad de vender la segunda unidad es 0.49.

El criterio de probabilidad máxima ignora las consecuencias de todos los estados, excepto del que tiene mayor probabilidad; por lo tanto, no aprovecha gran parte de la información disponible para la decisión. Si no se usa esta información, es posible que la decisión que se tome no sea razonable.

Regla de decisión del valor esperado

Con la **regla de decisión del valor esperado,** la cual ya se presentó en el capítulo 4, se calcula el valor esperado de cada acción (multiplicando los beneficios condicionales por la probabilidad del estado y sumando los productos de cada estado) para luego seleccionar la acción con mayor valor monetario esperado; es decir, se maximiza el VME.

Los valores esperados de las tres acciones de la tabla 5-2 son los que se muestran en la tabla 5-4. La acción con mayor valor esperado es "comprar uno"; por lo tanto, hay que comprar una unidad. Si las probabilidades cambian o los beneficios condicionales varían por modificaciones en el precio, costo o

Tabla 5-4 Cálculo de valores esperados

d_1 *Comprar 0*	d_2 *Comprar 1*	d_3 *Comprar 2*
$0 \times 0.05 = 0$	$-3 \times 0.05 = -0.15$	$-6 \times 0.05 = -0.30$
$0 \times 0.60 = 0$	$2 \times 0.60 = 1.20$	$-1 \times 0.60 = -0.60$
$0 \times 0.35 = 0$	$2 \times 0.35 = 0.70$	$4 \times 0.35 = 1.40$
VME = 0	VME = 1.75	VME = 0.50

valor de desecho, se calcularía de nuevo el valor esperado y la decisión podría ser otra.

En la práctica, el problema de los inventarios no se resuelve con la tabla de beneficios y el cálculo del valor esperado de cada una de las acciones posibles. Sin embargo, los procedimientos que se usan se basan en el análisis anterior. Es decir, el procedimiento de inventarios convencional supone que es adecuado usar la regla de decisión del valor esperado (véase Cap. 17).

En ocasiones, el criterio del valor esperado se denomina **VME** o **valor monetario esperado** para distinguirla del criterio de la utilidad esperada.

El criterio de decisión del valor esperado es el más sensible de los que se han visto hasta ahora, ya que toma en cuenta las consecuencias de cada uno de los sucesos posibles y su probabilidad de ocurrencia. Pero, considere la siguiente situación: Un socio le propone una apuesta con el lanzamiento de una moneda. Si cae cara, usted gana 3100 dólares, pero si cae cruz, deberá pagar mil dólares. Observe que el valor esperado de esta apuesta es $ 1050 (0.5 x 3100 + 0.5 x - 1000). Como alternativa a la apuesta, su socio le ofrece mil dólares seguros. La mayoría de las personas aceptaría los mil dólares, a pesar que el valor esperado de la apuesta es mayor. La apuesta presenta mayor riesgo y la mayoría prefiere evitar los riesgos.

El criterio del valor esperado no toma en cuenta la actitud del decisor con respecto al riesgo, lo cual es una limitación importante. Si las cantidades monetarias que comprende el problema de decisión son pequeñas o la decisión es repetitiva (como lo sería una decisión diaria acerca de cuánto almacenar), el riesgo no es importante y el valor esperado es un criterio razonable. Por otra parte, si las cantidades monetarias en juego son elevadas y sobre todo si es una decisión única, el criterio del valor esperado no es adecuado.

El criterio de denominación (que se presenta a continuación) y el criterio de la utilidad esperada (Cap. 6) sí toman en cuenta la actitud con respecto al riesgo. Sin embargo, estos métodos también tienen limitaciones.

El criterio del valor monetario esperado sigue siendo el criterio de decisión más útil en condiciones de incertidumbre y es el preferido cuando el riesgo no es un factor de la decisión. Incluso cuando la decisión comporta riesgo, un método sensato consiste en primero calcular el valor monetario esperado y luego efectuar un ajuste subjetivo para considerar el riesgo al tomar la decisión.

Tabla 5-5 Tabla de beneficios condicionales

Estado de la naturaleza	*Probabilidad*	*Acción* d_1	d_2	d_3	d_4
q_1	0.3	2	−1	1	1
q_2	0.2	1	0	0	0
q_3	0.5	0	−1	−1	2

Dominación

Existen varios métodos en los cuales se toma una decisión con base en la dominación. El caso más sencillo se llama **dominación de resultados,** en el cual el peor resultado en cuanto al beneficio de una acción es por lo menos tan bueno como el mejor resultado de una segunda acción. Por ejemplo, considere las acciones d_1 y d_2 de la tabla 5-5.

El resultado con peor beneficio para la acción d_1 es 0 (cuando ocurre q_3); el mejor beneficio para la acción d_2 es también 0 (cuando ocurre q_2). Por lo tanto, la acción d_1 domina a la acción d_2. Uno está seguro de con d_1 los resultados serán iguales o mejores, sin importar lo que suceda.

Otra forma de dominación se denomina **dominación de sucesos;** ocurre si una acción tiene beneficios mejores o iguales que las de otra acción para cada suceso. Considere las acción d_x y d_3 de la tabla 5-5. Para cada suceso (es decir, cada estado), los beneficios condicionales de d_1 son mayores que las de la acción rf_3. Entonces, d_1 domina a d_3 por dominación de sucesos. No importa qué suceso ocurra, d_1 es mejor que d_3. Observe que d_1 también domina a d_2 por dominación de sucesos.

Una tercera forma de dominación se denomina **dominación probabilística** o **de probabilidad.**[1] Para demostrarlo, es necesario reorganizar la información de la tabla 5-5 como se muestra en la tabla 5-6. Aquí, los sucesos se definen en función de los beneficios condicionales y se ordenan de menor (-1) a mayor (2). Las probabilidades de cada uno de los beneficios se presentan en las columnas *P(X).* Las columnas *P(X* o más) muestran la probabilidad de obtener beneficios de *X* dólares o más. Considere la acción d_1: Hay seguridad (la probabilidad es 1.0) de obtener beneficios de -1 o más y también de cero o más. La probabilidad de obtener 1 o más es de 0.5 y de 0.3 de obtener 2 o más. Las probabilidades como *P(X o* más) se llaman *probabilidades acumuladas y* se analizan con mayor detalle en el capítulo 7.

Una acción **domina probabilísticamente** a otra si la *P(X* o más) de la primera es mayor o igual que la *P(X* o más) de la segunda para todos los valores de

[1] También conocido como dominación estocástica. Aquí sólo se considera la dominación estocástica de primer orden. Existen formas más complejas (de segundo y tercer orden) que dependen de las características de la función de utilidad de la persona que toma la decisión. Véase Derek W. Bunn, *Applied Decision Analysis,* Nueva York, McGraw-Hill, 1984, Cap. 4.

Tabla 5-6 Tabla de probabilidades acumuladas

	Acción			
	d_1		d_4	
Beneficios condicionales X	*P(X)*	*P(X o más)*	*P(X)*	*P(X o más)*
−1	0.0	1.0	0.0	1.0
0	0.5	1.0	0.2	1.0
1	0.2	0.5	0.3	0.8
2	0.3	0.3	0.5	0.5

X. Compare las acciones d_1 y d_4 de la tabla 5-6. Observe que para cada valor de *X,* la *P(X* o más) de la acción d_4 siempre es mayor o igual que la de la acción d_1. Por lo tanto, d_4 domina a d_1 por dominación de probabilidades.

Considere una cantidad fija de dinero. Obviamente, usted preferirá la alternativa que tenga mayor probabilidad de obtener esa cantidad o más. Si, para una cantidad cualquiera, hay una alternativa que tenga igual o mejor probabilidad de obtener dicha cantidad o más, entonces esa alternativa domina en probabilidad.

De las tres formas de dominación, la de resultados es la más fuerte, sigue la de sucesos y la de probabilidad es la más débil. Si la acción Adomina por dominación de resultados, también dominará por sucesos y por probabilidad; sin embargo, no sucede lo mismo a la inversa. Por ejemplo, la acción d_4 domina a d_1 estocásticamente pero, como ya se mostró, no domina ni por sucesos ni por resultados.[2]

Es muy sensato usar el criterio de dominación para elegir entre alternativas de decisión. La dificultad estriba en que posiblemente no exista una alternativa que domine a las demás. De hecho, es lo más usual. Considere el ejemplo original de la tabla 5-2; ninguna de las acciones domina a las otras en ninguna de las formas de dominación propuestas. Por lo tanto, el criterio de dominación no seleccionaría la acción que debe tomarse. Ésta es la mayor limitación de la dominación; sin embargo, puede servir para eliminar algunas alternativas y reducir en consecuencia el proceso de decisión.

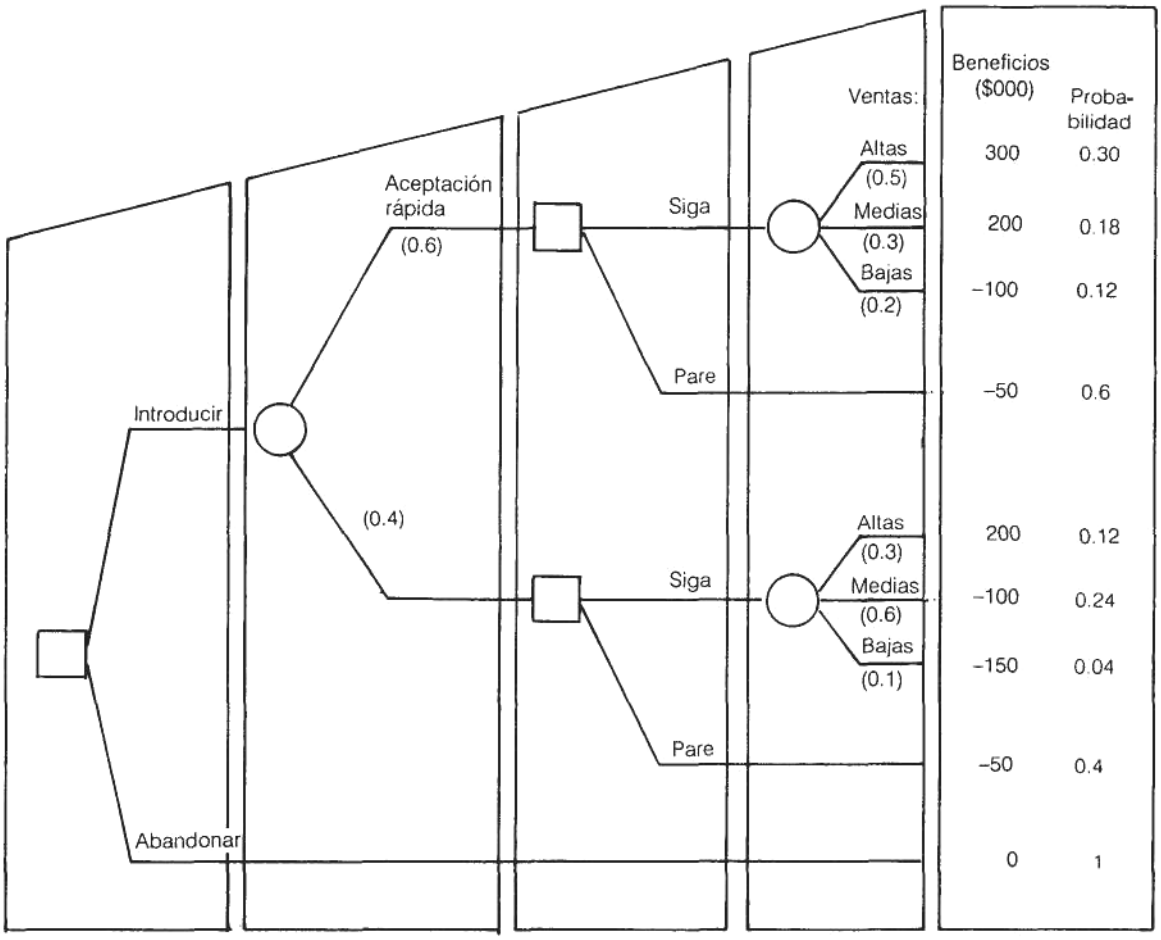
El criterio de dominación está relacionado con el valor esperado en cuanto a que si una primera acción domina a una segunda, esto implica que el valor esperado de la primera acción es mayor que el valor esperado de la segunda. Sin embargo, lo contario no sucede.

Dominación en árboles de decisión

También es posible revisar si existe dominación cuando el problema de decisión se estructura como un árbol de decisión. Primero debemos introducir el concepto

[2] Hay casos especiales para los tres tipos de dominación en los que se relacionan las dos acciones. En el caso del dominio de resultados, es posible que los beneficios de las dos acciones sean iguales. En lo que se refiere al dominio de sucesos, los beneficios de cada suceso son los mismos. Para la dominación de probabilidad, las probabilidades *P(X o* más) son iguales para toda *X.* En estos casos no hay dominación y se considera que las acciones son equivalentes.

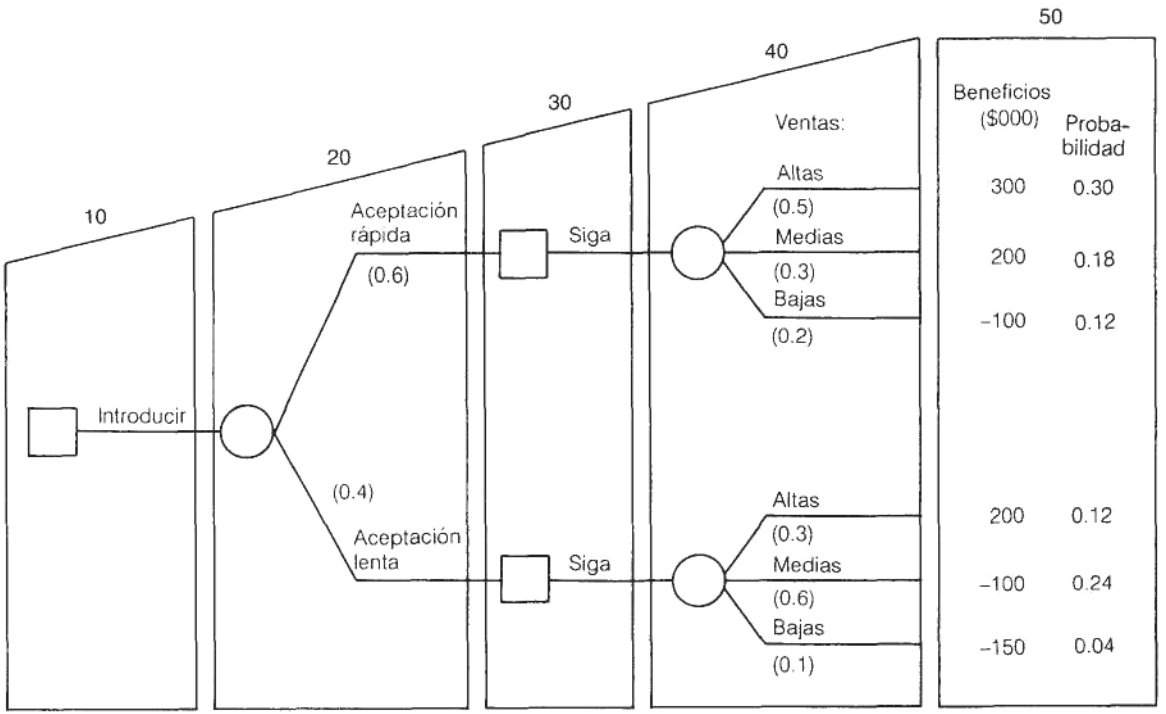
Figura 5-1 Árbol de decisión para la introducción de un nuevo producto



de **estrategia.** Una estrategia es un conjunto de decisiones que determina por completo el curso de acción. Considere el ejemplo que se muestra en la figura 5-1. Un decisor tiene la opción de introducir un producto o abandonar el proyecto. Si lo introduce, la aceptación de los distribuidores puede ser rápida o lenta; en ambos casos, el gerente puede seguir adelante con el producto o parar el proyecto. Si la decisión es continuar, las ventas pueden ser altas, medias o bajas. Los resultados y probabilidades se incluyen en la figura 5-1.

Considere las estrategias disponibles en este ejemplo para el decisor. Una estrategia fácil de identificar es "abandonar el producto". Otra estrategia es "introducir el producto: si la aceptación es rápida, entonces Siga; si la aceptación es lenta, también Siga". A esta estrategia la llamaremos Siga/Siga. Observe

Figura 5-2 Árbol abreviado para la estrategia Siga/Siga



que en los dos enunciados de las estrategias se describen todas las decisiones que deben tomarse en todas las circunstancias. Si el producto se abandona, entonces ya no hay más decisiones, pero de introducirse hay que especificar una decisión "Siga" o "Pare", dependiendo de la aceptación rápida o lenta. Al determinar si el enunciado de la estrategia está completo, pregúntese si contendría instrucciones suficientes para que un asistente pueda tomar la decisión si usted no está presente. Si no es así, el enunciado no especifica una estrategia completa.

Hay otras tres estrategias posibles, además de la estrategia de abandono y de la Siga/Siga:

- Estrategia Siga/Pare: "Introducir el producto; si la aceptación es rápida, Siga; si es lenta, Pare".
- Estrategia Pare/Siga: "Introducir el producto; si la aceptación es rápida, Pare; si es lenta, Siga".
- Estrategia Pare/Pare: "Introducir el producto; si la aceptación es rápida, Pare; si es lenta, Pare".

Una estrategia determina todas las decisiones, por lo que sólo quedan sucesos. Podemos elaborar de nuevo el diagrama de árbol para cada estrategia; en la figura 5-2 se muestra el árbol para la estrategia Siga/Siga. Las probabilidades de

Tabla 5-7 Distribuciones de probabilidad y distribuciones acumuladas para las estrategias seleccionadas

	Estrategia Siga/Siga		*Estrategia Siga/Pare*		*Estrategia Pare/Siga*	
Beneficio X	*P(X)*	*P(X o más)*	*P(X)*	*P(X o más)*	*P(X)*	*P(X o más)*
-150	.04	1.00	0	1.00	.04	1.00
-100	.36	.96	.12	1.00	.24	.96
- 50	0	.60	.40	.88	.60	.72
200	.30	.60	.18	.48	.12	.12
300	.30	.30	.30	.30	0	0

cada resultado se incluyen al final del árbol. Por ejemplo, la probabilidad de obtener beneficios de 300 000 dólares (el resultado de la aceptación rápida y ventas altas) es 0.6 * 0.5 = 0.30. Las otras probabilidades se calculan de manera análoga. Las distribuciones de probabilidades para esta estrategia (Siga/Siga) y las estrategias Siga/Pare y Pare/Siga se presentan en la tabla 5-7.

Las distribuciones de probabilidad de los beneficios, como las que se muestran en la tabla 5-7, se denominan en ocasiones **loterías de beneficios** o **perfiles de riesgo,** ya que describen de manera sucinta los riesgos que existen para el decisor.

Las estrategias "abandonar producto" y Pare/Pare no se incluyen en la tabla 5-7. La estrategia de abandono tiene beneficio seguro de cero y la estrategia Pare/Pare tiene beneficio seguro de -50 000 dólares. Por consiguiente, la estrategia de abandono domina a la estrategia Pare/Pare por dominación de resultados.

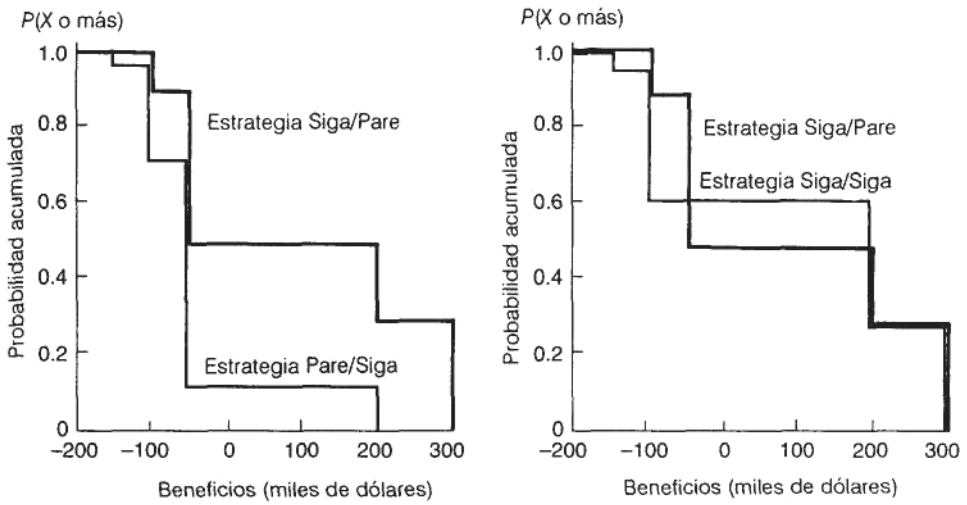
Observe en la tabla 5-7 que la estrategia Siga/Pare domina a la estrategia Pare/Siga en probabilidad, ya que la probabilidad acumulada *P(X* o más) es la misma o mayor en cada uno de los casos. No hay ninguna otra dominación.

En ocasiones es más fácil ver la dominación en probabilidad en un gráfico de las distribuciones acumuladas; o sea, en un gráfico de *P(X* o más). *Una estrategia domina a otra si su curva acumulada es, en todos sus puntos, igual o mayor que la curva acumulada de la otra estrategia.* La figura 5-3 muestra el caso de una estrategia dominada, en la parte izquierda. La estrategia Siga/Pare domina a la estrategia Pare/Siga, ya que la curva de la primera siempre es igual o mayor que la de la segunda. Por otra parte, cuando se cruzan las curvas, como sucede en la parte derecha de la figura 5-3, no hay dominación. Ninguna distribución es siempre mayor (o igual) que la otra.

Cuando el árbol de decisión presenta muchos resultados, por lo general es más fácil revisar si existe dominación por medio de curvas acumuladas, en vez de usar tablas como la 5-7. Si los árboles llegan a ser demasiado complicados, se emplea el procedimiento de análisis de riesgo con simulación de Montecarlo; este método se describe en el capítulo 19.

Observe en este ejemplo que sólo fue posible eliminar dos de las estrategias dominadas (Pare/Siga y Pare/Pare). El criterio de dominación no ofrece un medio para elegir una de las tres estrategias restantes; por lo tanto, la dominación es sólo un criterio de decisión parcial.

Figura 5-3 Distribuciones acumuladas de beneficios



RESUMEN

Si la actitud hacia el riesgo del decisor no es un factor importante del problema de decisión, por lo general es preferible usar la regla de decisión del valor esperado en vez de otro criterio de decisión, ya que es la única que utiliza toda la información disponible y asegura una elección definitiva entre las alternativas.

Incluso si existe riesgo, el valor monetario esperado es útil como primer paso.

Con el uso de los criterios de dominación, en ocasiones es posible eliminar algunas de las alternativas inferiores de un problema de decisión.

Funciones lineales

En el capítulo 3 se presentó el concepto de variable aleatoria. Recuerde que si la variable aleatoria X se multiplica por la constante c, el valor esperado del producto cX puede expresarse como la constante multiplicada por el valor esperado de X (véase Ecuación 3-7). Es decir:

$$E(cX) = cE(X) \qquad \textbf{(5-1)}$$

En esta sección se generalizará este resultado y se aplicará específicamente a problemas relacionados con el valor esperado del beneficio o del costo.

En muchas situaciones empresariales, una variable desconocida o aleatoria se encuentra relacionada con el beneficio o el costo por medio de una **función lineal,** como:

$$P=a+bX$$

donde *P* representa el beneficio (o el costo), *a* y *b* son constantes y X es la variable aleatoria. Entonces, el **valor esperado** del beneficio (o el costo) se puede expresar como:

$$E(P) = a + bE(X) \qquad (5\text{-}2)$$

Observe que lo anterior simplifica los cálculos. En vez de tener que calcular los beneficios condicionales para cada estado de la naturaleza (o sea, para cada valor de *X) y* después calcular los beneficios esperados, se puede introducir el valor esperado de *X* (es decir, el estado promedio) en la ecuación del beneficio.

Como ejemplo, suponga que los costos mensuales de un departamento son 10 000 dólares, más cinco dólares por cada unidad que se produzca. Es decir:

$$C = 10\,000 + 5X$$

donde *X* es la variable aleatoria, número de unidades producidas. Suponga que el valor esperado *E(X)* es 1500 unidades. Luego, el costo esperado *E(C)* es:

$$\begin{aligned} E(C) &= 10\,000 + 5E(X) \\ &= 10\,000 + 5(1500) = 17\,500 \end{aligned}$$

Producto de variables aleatorias independientes

Suponga que existen dos variables aleatorias, *X* y *Y, y* que estas variables son independientes. El valor esperado del producto *XY* se puede expresar como el producto de los valores esperados, o sea:

$$E(XY) = E(X) \cdot E(Y) \qquad \text{si } X \text{ y } Y \text{ son independientes} \qquad (5\text{-}3)$$

Ejemplo Suponga que el beneficio *P* es igual al beneficio por unidad multiplicado por el número de unidades vendidas. Se considerarán tres casos. La letra *b* representará el beneficio por unidad vendida y la letra *q* será el número de unidades vendidas. Si se usan las letras mayúsculas *B y Q,* se considerará que son variables aleatorias; cuando las letras sean minúsculas, *b y q,* se tomarán como constantes y conocidas.

En el primer caso, se sabe que el beneficio por unidad es 1.50 dólares y no se conoce con certeza el número de unidades vendidas, siendo la distribución de probabilidad de éstas, la que se muestra en la tabla 5-8.

La ecuación básica del beneficio es:

$$P = bQ$$

Observe que el valor de *B* se conoce y por lo tanto se incluye en la ecuación con *b* minúscula. El beneficio promedio o esperado es:

$$E(P) = E(bQ) = bE(Q)$$

Tabla 5-8

Valores de Q	*Probabilidad*
9	0.4
10	0.5
11	0.1

El valor de *E(Q)* es:

$$E(Q) = 9(0.4) + 10(0.5) + 11(0.1) = 9.7$$

Por lo tanto, el beneficio esperado es:

$$E(P) = 1.50 \bullet 9.7 = 14.55 \text{ dólares}$$

Considere ahora otro caso, en el cual se sabe que se venderán 10 unidades en el próximo periodo. No se sabe con certeza cuál es el valor de *B,* el beneficio por unidad; sin embargo, está disponible la información de la tabla 5-9.

Ahora la ecuación del beneficio se escribe como:

$$P = qB$$

utilizando una *q* minúscula para las unidades vendidas, porque es una constante. El beneficio promedio o esperado es:

$$E(P) = qE(B)$$

y *E(B)* se calcula como sigue:

$$E(B) = 1.50(0.20) + 1.60(0.70) + 1.70(0.10) = 1.59$$

El beneficio esperado es:

$$E(P) = 10 \bullet 1.59 = 15.90 \text{ dólares}$$

Como tercer caso supongamoss que no se sabe con certeza cuál es el valor de *B* ni de *Q* (las dos son variables aleatorias con las distribuciones de probabilidad que se mencionaron antes). Se supondrá que *B y Q* son independientes. En este caso la ecuación del beneficio se escribiría como:

$$P = BQ$$

y el beneficio esperado es:

$$E(P) = E(B) \bullet E(Q)$$

Tabla 5-9

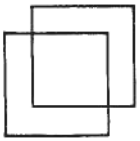
Valores de B	*Probabilidad*
$1.50	0.20
1.60	0.70
1.70	0.10

Al sustituir los valores de los valores esperados de *B y Q:*

$$E(P) = 1.59 \text{ ' } 9.7 = 15.42 \text{ dólares}$$

De esta manera, si suponemos que hay incertidumbre para *B yQ,* el beneficio esperado sería 15.42 dólares y podemos realizar nuestros planes tomando esto en cuenta. Sin embargo, hay que señalar que 15.42 dólares es un valor esperado; los beneficios pueden ser tan bajos como 13.50 dólares (si $Q = 9$ *y* $B = 1.50$ dólares) o tan altos como 18.70 dólares (si $Q = 11$ y $B = 1.70$ dólares).

RESUMEN



Cuando los beneficios se pueden expresar como una función lineal de las variables desconocidas, es posible simplificar el cálculo del valor esperado con las ecuaciones 5-2 y 5-3, sin que se pierda información (si se acepta el criterio de decisión del valor esperado).

Conclusión

La teoría de la decisión se refiere a la elección de la mejor opción de un conjunto de acciones posibles, supuesto que hay incertidumbre acerca del estado de la naturaleza que existe. Al usar la regla de decisión del valor esperado, la elección se puede lograr de manera consistente con las creencias de la persona que decide, incluso si no hay probabilidades objetivas que puedan aplicarse a los estados de la naturaleza.

El aporte principal de este procedimiento es que centra la atención en todos los sucesos posibles y requiere el cálculo de las consecuencias de cada acción y cada estado de la naturaleza posible. Incluso si el análisis se detiene en la tabla de valores condicionales o en el árbol de decisión, sería una contribución a la toma de decisiones. Sin embargo, es posible llegar más lejos si se usa la regla de decisión del valor esperado. No se justifica que el decisor se detenga después de realizar un solo cálculo con el suceso más probable, en vista de las técnicas disponibles para incorporar la incertidumbre al análisis.

La utilización de la regla de decisión del valor esperado implica relaciones medibles de la utilidad. Los datos de entrada que existen para las decisiones del

mundo real generalmente son monetarios, no medidas de la utilidad, y no siempre será apropiado basar una decisión en el valor monetario esperado. También hay otras medidas que pueden ser relevantes, como la varianza de los resultados posibles.

Bibliografía

Bell, D., H. Raiffa y A. Tversky, editores, *Decision Making: Deschptive, Nonnative and Prescriptive Interaction,* Cambridge, Cambridge University Press, 1988.

Bunn, D. W., *Applied Decision Analysis,* Nueva York, McGraw-Hill, 1984.

Chernoff, H. y L. E. Moses, *Elementary Decision Theory,* Nueva York, John Wiley & Sons, 1959.

Samson, D., *Managerial Decision Analysis,* Homewood, 111., Richard D. Irwin, 1988.

Weiss, L., *Statistical Decision Theory,* Nueva York, McGraw-Hill, 1961.

Winkler, R. L., *Introduction to Bayesian Inference and Decision,* Nueva York, Holt, Rinehart & Winston, 1972.

Problemas con respuestas

5-1. Considere las acciones cuyos beneficios se presentan en la tabla siguiente. Indique cuál acción o cuáles acciones son las mejores con base en los siguiente criterios.

a. Sucesos igualmente probables.
b. Minimax.
c. Probabilidad máxima.
d. Valor esperado

5-2. Remítase al problema 5-1.

a. ¿Cuáles acciones participan en la dominación de resultados?
b. ¿Cuáles acciones participan en la dominación de sucesos?
c. ¿Cuáles acciones participan en la dominación estocástica?
d. ¿Cuáles acciones no están dominadas por ningún tipo de dominación?

5-3. El costo total de un producto es igual a:

$$T = 10\,000 + BQ$$

Los ingresos totales son $R = 20Q$. El costo variable por unidad en el siguiente periodo es una variable aleatoria con la distribución de probabilidad que se presenta en la página que sigue.

Tabla de beneficios condicionales (problema 5-1)

Estado de la naturaleza	*Probabilidad*	*Acción*					
		d_1	d_2	d_3	d_4	d_5	d_6
q_1	0.2	0	0	-4	5	-1	5
q_2	0.2	0	5	-4	0	2	5
q_3	0.4	0	2	3	3	5	0
q_4	0.2	0	-3	6	6	3	5

Valores de B	*Probabilidad*
$5	0.10
6	0.50
7	0.40

a. Calcule el beneficio esperado para el próximo periodo, suponiendo que se venderán mil unidades.
b. Calcule el beneficio esperado para el próximo periodo, suponiendo que hay 0.5 de probabilidad de vender mil unidades y 0.5 de probabilidad de no vender nada (suponga que *B* y *Q* son independientes).

5-4. Un director de ventas presenta las probabilidades de niveles de demanda de la columna de al lado para un producto nuevo.

Suponga que el costo de introducción del producto es 500 dólares y que el beneficio por cada unidad que venda es cinco dólares. ¿Cuál es el beneficio esperado del nuevo producto?

Probabilidad	*Demanda (unidades)*
0.10	50
0.30	100
0.30	150
0.15	200
0.10	250
0.05	300

5-5. Remítase a la figura 4-4 del Capítulo 4. Suponga que no se presenta ningún producto competitivo; con base en esta hipótesis:
a. Haga una lista de todas las estrategias del árbol de decisión de la figura 4-4.
b. Calcule la lotería de beneficios o perfil de riesgo de cada una de las estrategias que identificó en *(a)*.
c. Determine cuál de las estrategias domina a las demás.
d. Elabore un gráfico de las distribuciones acumuladas de los beneficios de todas las estrategias.

Problemas

5-6. Considere una decisión empresarial con la que esté familiarizado. Defina las acciones y los estados y haga estimaciones aproximadas de los beneficios condicionales. ¿Qué criterio usaría para tomar la decisión? Considere las ventajas relativas de la hipótesis de sucesos igualmente probables, minimax, probabilidad máxima, dominación y regla de decisión del valor esperado.

5-7. En el texto se ha mencionado que las decisiones no siempre pueden basarse en cálculos que sólo impliquen expresiones monetarias de las consecuencias. Describa algunas situaciones empresariales donde son más importantes los factores no monetarios.

5-8. Al tomar decisiones en condiciones de incertidumbre, ¿podría un experto desarrollar un procedimiento que garantice la decisión correcta? Explique.

5-9. En el capítulo se mencionaron seis criterios de decisión; ¿cuáles son consistentes con los individuos que compran billetes de lotería?

5-10. Una persona tiene tres alternativas de inversión con los rendimientos y las probabilidades que se presentan en la página siguiente.
a. Compare las alternativas con base en el criterio de dominación. ¿Puede encontrar una alternativa que sea mejor? ¿Qué tipo de dominación usó para seleccionarla?
b. Si usa el criterio del valor esperado, ¿cuál sería su elección?

5-11. Un gerente requiere una pieza para cierto equipo. Puede comprar una pieza nueva o

Rendimiento ($000)	*Probabilidades de rendimiento de inversiones*		
	Inversión A	*'nversión B*	*versión C*
-50	0.4	0.2	0.2
0	0.0	0.0	0.1
50	0.4	0.2	0.1
100	0.2	0.4	0.6
150	0.0	0.2	0.0

usada; la pieza nueva cuesta más que la usada, pero es más probable que funcione sin problemas, algo que es de importancia vital. De los seis criterios de decisión que se presentaron en este capítulo, ¿cuál parece ser el más adecuado? ¿Por qué?

5-12. Las siguientes probabilidades se asignan a los valores posibles de la fracción de piezas defectuosas en un proceso de manufactura:

Suceso	*Probabilidad del suceso*
0.01 defectuoso	0.10
0.02 defectuoso	0.15
0.03 defectuoso	0.20
0.04 defectuoso	0.30
0.05 defectuoso	0.20
0.10 defectuoso	0.03
0.15 defectuoso	0.02
	1.00

Suponga que hay un lote de 50 000 piezas y cada defectuosa cuesta 25 centavos por concepto de trabajo adicional. ¿Cuál es el costo esperado del trabajo adicional? ¿Sería más barato inspeccionar todo el lote si la inspección cuesta tres centavos por pieza (suponiendo que la inspección elimina todos los defectos)?

5-13. Usted es el presidente de una corporación estadounidense que fabrica aeronaves. En Washington se ha hablado mucho de *(a)* ir a Marte, *(b)* no ir a Marte y *(c)* ir a Marte con los rusos. En su opinión, la probabilidad de estos estados es 0.5, 0.4 y 0.1, respectivamente. Usted debe elaborar planes con vistas a estos estados posibles. Sus alternativas son: *(a)* Continuar con la fabricación de aviones, con lo que obtendría beneficios por 10 millones de dólares, sin importar la decisión acerca de Marte, *(b)* Diseñar el sistema de carga para el viaje a Marte (si no se aprueba el programa, perderá 30 millones de dólares; si lo aprueban, sus beneficios serán de 40 millones de dólares, participen o no los rusos), *(c)* Diseñar el sistema de propulsión. Si el programa fracasa, usted perderá 100 millones de dólares. En cambio, de aprobarse el programa y viajar con los rusos, lo más probable es que se use el sistema de propulsión ruso y sus beneficios serán de 20 millones de dólares. Si los rusos no van, sus beneficios serán 80 millones de dólares. Base su decisión en los beneficios monetarios.

a. ¿Cuál es la mejor acción con la hipótesis de estados igualmente probables
b. ¿Cuál es la acción minimax?
c. ¿Cuál es la acción de probabilidad máxima?
d. ¿Hay acciones dominadas?
e. ¿Cuál es la acción que maximiza el valor esperado?
f. ¿Qué decisión prefiere usted?

5-14. Una compañía piensa efectuar una campaña publicitaria para aumentar las ventas de Gadgeto, el producto principal de la compañía. Para el próximo año se ha propuesto un presupuesto de 300 000 dólares para publicidad.

El gerente de ventas y el presidente de la compañía están de acuerdo en la distribución

Aumento en ventas (unidades)	*Probabilidad*
150 000	0.05
200 000	0.25
250 000	0.30
300 000	0.20
350 000	0.10
400 000	0.05
450 000	0.05
	1.00

de probabilidad (la cual se muestra en la tabla anterior) para el efecto de la campaña de publicidad en las ventas de Gadgeto.

La compañía obtiene 1.20 dólares de beneficio por cada Gadgeto que venda. ¿Cuáles son los beneficios increméntales esperados si se lleva a cabo la campaña publicitaria?

5-15. Dos estudiantes pretenden usar el criterio de igualdad de probabilidad en relación con los posibles resultados de dos lanzamientos de una moneda. El estudiante A dice que para él los tres resultados siguientes tienen igual probabilidad:

Cero caras en dos lanzamientos.
Una cara en dos lanzamientos.
Dos caras en dos lanzamientos.

El estudiante B afirma que para él tienen la misma probabilidad los resultados siguientes: HH, HT, TH, TT (H = cara, T = cruz).

Si la moneda fuera legítima, ¿que afirmación preferiría? ¿Por qué? Remítase al

5-16. problema 4-19.

a. Prepare una tabla de valores condicionales para las dos acciones (vender el contrato o perforar) y los cuatro resultados posibles.
b. ¿Cuál es la mejor acción con el criterio de igual probabilidad?
c. ¿Cuál es la mejor acción minimax?
d. ¿Cuál es la mejor acción con el criterio de mayor probabilidad?
e. ¿Cuál es la mejor acción para maximizar el valor esperado?

5-17. Un director debe llevar consigo 500 dólares en muestras de mercancía en un viaje al extranjero. Él estima que la probabilidad de perder la mercancía es de 0.05. Le ofrecen una póliza de seguro de cobertura amplia por sólo 55 dólares, la cual cubriría la pérdida, y decide comprarla.

a. Desarrolle la tabla de costos condicionales.
b. ¿Cuál de los criterios de decisión que se presentaron en el capítulo es consistente con su decisión?

5-18. Los habitantes de una comunidad suburbana realizaron una votación acerca de asignar 10 000 dólares a la compra de un segundo camión de bomberos. Los proponentes de la acción afirmaron que en los últimos 10 años (la vida esperada del camión) ocurrieron 20 incendios (de un total de 1000 llamadas a la estación de bomberos), en los cuales la presencia de un segundo camión hubiera permitido que los bomberos realizarán mejor su trabajo. La propuesta fue rechazada en la votación.

a. Con base en el criterio del valor esperado, ¿cuál es el beneficio monetario máximo por incendio (de 20 casos) que se obtiene al comprar otro camión), si los votantes siguieran ese criterio?
b. Suponga ahora que se informa a los votan tes que-el valor de contar con el segundo camión es 750 dólares por cada incendio en el cual se use (o podría usarse), pero aun así rechazan la propuesta. ¿Qué criterios de decisión son consistentes con su elección? Desarrolle la tabla de costos condicionales.

5-19. Un fabricante de automóviles ha descubierto que si cambia el diseño del tanque de combustible reduciría el riesgo de incendio en caso de un golpe en la parte posterior del automóvil. La compañía estima que el beneficio total para la sociedad es 25 millones de dólares. El costo adicional de los cambios en el diseño sería 40 millones de dólares. La probabilidad de que un automóvil sea golpeado en la parte trasera por otro vehículo es del 1 %.

a. Con base en el criterio VME, ¿debería implantar el diseño el fabricante?
b. Desde el punto de vista del conductor, aplicando el VME, ¿preferiría el automóvil rediseñado (a un costo más alto)?
c. ¿Qué criterio daría lugar a que el conductor prefiriera el tanque rediseñado, entre los criterios que se analizaron en el capítulo?

5-20. Remítase a la figura 4-10 de la página 112.

a. Indique cuáles son las estrategias disponi bles en este árbol de decisión. Incluya todas las estrategias, incluso las que puedan parecerle ridiculas.
b. Encuentre por lo menos dos estrategias que estén dominadas por otras. Muestra las loterías de beneficios (perfiles de riesgo) de las estrategias dominadas y de las estrategias dominantes.
c. Algunas de las estrategias en (a) parecen ridiculas o irracionales. ¿Por qué le parecen ridiculas?

Problemas más difíciles

5-21. A continuación se presenta una carta escrita al editor de *The New York Times*[3] el 28 de febrero de 1971.

Yalta: Falta de comunicación con respecto a la bomba

Señor editor:

En al artículo "The Truth About Yalta" (La verdad acerca de Yalta), del 14 de febrero, C. L. Sulzberger analiza la declaración que realizó el embajador Charles Bphlen de los problemas principales a los que se enfrentaron el presidente Roosevelt y la delegación estadounidense durante la Conferencia de Yalta, en febrero de 1945. El tercer párrafo de la declaración incluye lo siguiente:

"Aunque Roosevelt y algunos de sus consejeros sabían del Proyecto Manhattan, nadie sabía con certeza si la bomba atómica realmente explotaría ni cuál sería su efectividad como arma".

El problema se veía distinto desde el punto de vista del laboratorio científico Los Alamos, responsables del desarrollo de la bomba. En febrero de 1945, a mí y a otros científicos con conocimiento del tema nos parecía que la probabilidad de que la bomba atómica explotara era del 90%; que en realidad sería un arma efectiva y que habría material suficiente para construir varias bombas en los meses siguientes.

Incluso si hubiera fracasado la primera bomba, el proyecto triunfaría en poco tiempo. En la guerra, menos aun en la política, son pocas las cosas que tienen una probabilidad tan buena como un 90%.

La razón por la cual esta certidumbre de los científicos no se transmitió a los decisores fue una deficiencia en la comunicación: el exceso de sigilo y la falta de lazos directos entre los científicos y los funcionarios superiores del gobierno. Debido a esta deficiencia en la comunicación directa, en Yalta, Estados Unidos propuso a Rusia que participara en el ataque a Japón, con graves consecuencias para el futuro de la situación política en el Lejano Oriente. Suponga que hubiera existido buena comunicación; ¿debería haber actuado el gobierno de Estados Unidos con base en la probabilidad del 90% de éxito en el desarrollo? En mi opinión, por supuesto que sí.

Una vez más, en 1958 tuvimos la oportunidad de establecer una prohibición de las pruebas de armas nucleares, en una etapa cuando Estados Unidos llevaba ventaja a la Unión Soviética en lo referente al diseño de armamento. Sin embargo, nos preocupó la posibilidad de pruebas subterráneas clandestinas soviéticas de armas nucleares pequeñas, por lo cual insistimos en condiciones rigurosas de seguridad. La Unión Soviética no las aceptó y no se llegó a ningún acuerdo hasta 1961.

En 1961, los rusos llevaron a cabo una serie de pruebas de armas nucleares en las cuales lograron igualar, en los aspectos más importantes, el rendimiento de las armas termonucleares estadounidenses. Una vez más, por insistir en la certidumbre, Estados Unidos volvió a perder una ventaja clara.

El propósito de esta carta no es indicar que nuestra política externa se deba centrar en las ventajas sobre la Unión Soviética. Lo único que deseo es plantear que al buscar esta ventaja como parte de la política, debemos actuar con base en probabilidades técnicas altas, en vez de requerir la certeza, y también que sea fácil la comunicación entre las personas que conocen el asunto y los decisores.

Hans Bethe
Ithaca, Nueva York, 16 de febrero de 1971

El autor, Premio Nobel de física en 1967, fue jefe de las divisiones teóricas del labora-

3 © 1972 The New York Times. Reimpreso con autorización.

torio científico Los Alamos, de abril de 1943 a enero de 1946.

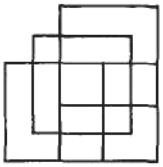
Comente esta carta, en especial los siguientes puntos:

a. El criterio de decisión que al parecer se utilizó en los altos niveles gubernamentales.

b. El criterio de decisión que propone el autor de la carta.

5-22. Muchas veces se ha discutido que el gobierno de Estados Unidos debe alentar el uso de otras fuentes de energía (por medio de subsidios, garantías y préstamos directos), aun cuando las alternativas energéticas pueden ser más costosas que el petróleo. Trate de evaluar este problema utilizando un método de la teoría de la decisión; es decir, defina las alternativas, sucesos, beneficios y probabilidades y recomiende una alternativa.

CAPÍTULO 6



La utilidad como base para la toma de decisiones

En los capítulos anteriores se hizo hincapié en la maximización del valor monetario esperado. Sin embargo, hay situaciones empresariales en las cuales la maximización del valor monetario esperado no conduce al curso de acción que elegiría la mayoría de las personas. Un esquema para tratar estas situaciones lo presenta la teoría de la utilidad. La diferencia entre el valor monetario esperado y la utilidad esperada se ilustrará con un ejemplo.

Ejemplo Suponga que usted tiene una opción en cada uno de los siguientes pares de alternativas. Puede seleccionar una de las opciones/l, una de las opciones *B* o una de las opciones C. Escriba una nota con respecto al conjunto de alternativas que escoja.

A_1 = La seguridad de un regalo de mil dólares. *o* A_2 - Nada, si cae cara al lanzar una moneda, o un obsequio de 250 000 dólares libres de impuestos si cae cruz.

B_1 = No pierde ni gana nada. *o* B_2 = Una posibilidad sobre 100 de incurrir en una deuda de 9000 dólares y el 99% de posibilidad de ganar 100 dólares.

C_1 = Un regalo de 10 000 dólares, libres de impuestos *o* C_2 = Un pago de 2^N centavos, donde *N* es el número de veces que se lanza una moneda legítima antes de que caiga cruz. Si cae cruz en el primer lanzamiento, usted recibe dos centavos; si aparece cara en el primer lanzamiento y cruz en el segundo, usted recibe cuatro centavos; dos caras consecutivas le generan ocho centavos, etcétera. Sin embargo, sólo puede participar una vez y la secuencia se detiene la primera vez que caiga cruz.

La mayoría de las personas escogería el conjunto A_1 B_1 y C_1; sin embargo, la expectativa matemática (o valor monetario esperado) favorece a las alternativas A_2, B_2 y C_2. El valor esperado de la alternativa A_2 es un medio (la probabilidad de que caiga cara con la moneda legítima) multiplicado por cero (el valor monetario asociado con cara) más un medio (la probabilidad de cruz) multiplicado por 250 000 dólares, o 125 000 dólares. Este valor esperado es 25 000 dólares más que el valor esperado de la opción A_1 por lo que debió seleccionar A_2 *si hubiera querido maximizar el valor monetario esperado.*

Algo parecido ocurre con B_2; ya que el beneficio neto esperado es 99/100 (la probabilidad apropiada) multiplicado por 100 dólares (la cantidad del beneficio) menos 1/100 multiplicado por 9000 dólares. Esta cantidad es nueve dólares, mayor que el beneficio de cero que se relaciona con B_1. Si usted toma las decisiones de forma que maximice el beneficio monetario esperado, aceptaría la pequeña posibilidad de una gran pérdida; sin embargo, la mayoría de nosotros escogeríamos B_1.

El valor monetario esperado del juego que se describe en C es infinito. La probabilidad de que la primera cruz aparezca en el primer lanzamiento es V2; en el segundo lanzamiento, ¼ ; en el tercero, $^1/_8$; en el cuarto, $^1/_{16}$; etcétera. Las recompensas relacionadas serían dos centavos, cuatro centavos, ocho centavos, 16 centavos, etcétera. Por definición, el valor monetario esperado es la suma de los resultados monetarios, ponderado por las probabilidades. En este caso:

$$\begin{aligned} \text{VME} &= \tfrac{1}{2}(2¢) + \tfrac{1}{4}(4¢) + \tfrac{1}{8}(8¢) + \tfrac{1}{16}(16¢) + \ldots \\ &= 1¢ + 1¢ + 1¢ + 1¢ + \ldots = \infty¢ \end{aligned}$$

El hecho de que ninguna persona prudente preferiría este juego frente a una cantidad cierta de dinero modesta, forma la base de la famosa paradoja de San Petersburgo. Esta paradoja condujo a Daniel Bernoulli a sus primeras investigaciones de la utilidad como base para la toma de decisiones en vez del valor monetario esperado.

Utilidad

Puesto que la mayoría de las personas elegiría A_1 B_1 y C_1 en vez de las alternativas con mayor expectativa monetaria, parece razonable concluir que las personas no siempre toman decisiones para maximizar el valor monetario esperado. Entonces, ¿cuál es el criterio alternativo para la toma de decisiones? Von Neumann y Morgenstern elaboraron un marco consistente con las decisiones del tipo de A_1 B_1 y C_1.[1] Ellos plantearon que las decisiones se tomaban para maximizar la **utilidad** esperada en vez del valor monetario esperado. Si usted selecciona A_1 en lugar de A_2, entonces llegaríamos a la conclusión de que la alternativa A_1 tiene

[1] J. von Neumann y O. Morgenstern, *Theory ofGames and Economic Behavior,* Princeton, Princeton Uni versity Press, 1944.

para usted más utilidad que la alternativa A_2. Si usted fuera indiferente ante las dos alternativas, digamos B_1 y B_2, la conclusión sería que cada una le ofrece la misma utilidad esperada. La indiferencia puede definirse como su aceptación de cualquier resultado al azar o como el permiso para que alguna persona extraña decida por usted. Es posible generalizar la función de utilidad de un bien (por lo general el dinero) para un persona, de manera que sea consistente con la lógica y la observación de decisiones repetitivas. De ello se desprende que es razonable suponer que las personas toman decisiones para maximizar la utilidad esperada, más que el valor esperado. Pero el uso de la utilidad esperada no es una elección gratuita, en tanto que el valor monetario esperado es un concepto sin ambigüedades y relativamente fácil de calcular. Sería conveniente que se pudieran relacionar los distintos resultados monetarios con índices de las preferencias del decisor. Así se podría transformar un conjunto complejo de alternativas en medidas de la utilidad a fin de tomar una decisión. Nuestro propósito en este capítulo es relacionar el dinero y un índice de utilidad, y obtener generalizaciones acerca de esta relación en situaciones de riesgo.

Medida de la utilidad

¿Es posible medir la utilidad del dinero? Para tratar de responder esta pregunta, se considerarán tres escalas de medición distintas:

1. Escala nominal o de clasificación.
2. Escala ordinal o de categorías.
3. Escala cardinal o de intervalos.

Una **escala nominal** asigna una descripción a un conjunto de elementos. Estos elementos pueden ser una unidad física o una condición, mientras que la descripción puede ser un número (como en un sistema de numeración de jugadores de fútbol), o una palabra, (como cuando un niño dice que tiene hambre o que no tiene hambre). En ocasiones una escala nominal puede ser útil para el análisis de decisiones. Por ejemplo, un conjunto de resultados puede dividirse en subconjuntos o clasificaciones de "satisfactorio" y "no satisfactorio". Las inversiones se pueden clasificar en dos clases, "aceptables" e "inaceptables", en una escala nominal. Una forma de calificar podría asignar dos calificaciones, "aprobado" o "suspendido". Es fácil concebir medidas nominales de la utilidad. Por ejemplo, las acciones se podrían clasificar como "las que tienen utilidad negativa" (desutilidad) o "positiva". Sin embargo, una escala nominal que no contiene orden o clasificación puede resultar inútil en el análisis de decisiones.

Una **medida ordinal** añade el concepto de orden relativo o clasificación. Unos objetos son "más" o "menos" que otros objetos. Una persona puede afirmar que un sonido es más fuerte que otro. Varias fuentes luminosas pueden clasificarse por su intensidad, sin requerir una medición numérica de la cantidad de luz. Sin un cronómetro se puede determinar quién es el ganador de una carrera. También se podría intentar clasificar todas las inversiones de acuerdo con su deseabilidad relativa (aunque puede ser más fácil describir que lograr este proceso).

Las medidas ordinales de la utilidad se usan para analizar situaciones con opciones sin riesgos. El análisis de la curva de indiferencia recoge alternativas de igual utilidad (es decir, la persona es indiferente a éstas alternativas) y compara una de estas alternativas con las de otra curva de indiferencia mayor (y más deseable) o menor (y menos deseable). Si las inversiones pudieran clasificarse, esto implicaría que se dispone de una medida ordinal de su deseabilidad.

Con una **medida cardinal,** se asigna un número que es una medida de intervalo de una característica. De esta forma, un trozo de madera puede tener un cierto número de centímetros de longitud, un cierto número de kilogramos de peso y un cierto número de centímetros cúbicos de volumen. En un sentido cardinal se pueden medir cosas como distancia, peso, luz, sonido, tiempo y calor. Una medida cardinal permite efectuar manipulaciones matemáticas; por ejemplo, todas las bolsas de dos kilogramos de azúcar pesan lo mismo y si tenemos dos bolsas de dos kilogramos entonces tenemos cuatro kilogramos de azúcar.

La medida de la utilidad de Von Neumann y Morgenstern es un tipo especial de medida cardinal (algunas personas dirían que es un tipo especial de medida ordinal), ya que mide la utilidad en situaciones que implican riesgo para el decisor. Al usar esta medida de la utilidad es posible pronosticar cuál lotería preferirá un inversor y por lo tanto permite que el gerente tome la decisión en nombre del inversor. En ocasiones el inversor tomará decisiones que no son consistentes con su función de utilidad, pero por lo general se puede rectificar este tipo de inconsistencia y el inversor vuelve a considerar la decisión.

Una función de utilidad es el resultado de la actitud de una persona frente al riesgo. No hay respuestas correctas o incorrectas (aunque pueden surgir inconsistencias por causa de malos entendidos). Por ello, si a usted le preguntan qué cantidad aceptaría en lugar de participar en una lotería con 0.5 de probabilidad de perder 500 dólares y 0.5 de ganar mil dólares, la respuesta es una preferencia personal y no un cálculo matemático (si la pregunta se hiciera **a** un grupo **de** 50 personas, es probable que se obtengan cerca de 50 respuestas distintas).

Hipótesis psicológicas

El uso de la utilidad en la toma de decisiones implica exigir ciertas hipótesis acerca de cómo reacciona un individuo ante los resultados. Como lo que pretendemos es medir las actitudes con respecto a situaciones inciertas, es importante que el modelo utilizado para tomar la decisión sea consistente con las características psicológicas de las personas.

Se harán las siguientes siete hipótesis:

1. Ante dos alternativas, podemos decidir si somos indiferentes a ellas o cuál preferimos. Esto parece un requisito trivial, pero es necesario. De hecho, puede ser difícil determinar una reacción específica inequívoca ante pares de alternativas. Por ejemplo ¿preferiría usted 200 dólares seguros o una lotería con la misma probabilidad de no ganar nada o ganar mil dólares? Cambie el resultado cierto hasta que su preferencia sea diferente. Es muy difícil encontrar el punto

exacto de indiferencia entre las dos loterías y con frecuencia la respuesta es dudosa.

2. Las alternativas son transitivas; es decir, si se prefiere *A* en lugar de *B y B* en vez de C, entonces *A* es preferida a C. Así mismo, si *A* es igual que *B y B* es igual que C, entonces *A* es igual que C. Es posible que una persona clasifique pares de manera intransitiva, cuando existe poca diferencia en el grado de preferencia y son muchas las alternativas. Esto quiere decir que una persona puede ser inconsistente en las decisiones cerradas. Por ejemplo, un individuo puede preferir un viaje a Nassau en vez de uno a Bermudas y un viaje a Bermudas en lugar de uno a Hawai, pero al mismo tiempo preferir el viaje a Hawai en lugar del viaje a Nassau. Esto es intransitivo, pero puede ser el resultado de que los tres viajes son muy atractivos; aunque la persona trate de establecer preferencias, es tan pequeña la diferencia entre las tres opciones que se aproxima a la indiferencia. Un decisor debe ser capaz de eliminar este tipo de intransitividad volviendo a examinar las opciones.

3. Si una persona es indiferente frente a dos loterías, entonces éstas pueden sustituirse mutuamente para fines de análisis. Por ejemplo, antes se comparó la misma probabilidad de no ganar nada y ganar mil dólares con la seguridad de obtener 200 dólares. Si usted es indiferente entre estas dos loterías, entonces se puede usar la segunda (200 dólares seguros) como sustituto de la primera. Es más, se puede afirmar que las utilidades de las dos loterías son iguales.

4. Si dos loterías tienen los dos mismos resultados posibles, pero estos resultados tienen probabilidades distintas, entonces la lotería con mayor probabilidad para el resultado más favorable es la lotería preferida.[2]

Ejemplo Considere las dos loterías que se muestran en la tabla 6-1. Debe preferirse la lotería *A* a la *B*.

5. Si se prefiere *A* en vez de *B* y *B* en vez de C, entonces existe una lotería de resultados *A* y *C* que el indiferente al resultado cierto *B*.

Ejemplo Sea:

A = $1000
B = $400
C = $0

Construiremos una lotería que comprenda a *A* con probabilidad *p, y* a *C* con probabilidad (1 - *p).* El valor *monetario* esperado de la lotería será:

$$A(p) + C(1 - p) = 1000p + 0(1 - p)$$

[2] Esta es una forma de la dominación de probabilidades que se analizó en el capítulo 5.

Tabla 6-1

	Probabilidades de los resultados de la lotería	
Resultados posibles	*A*	*B*
$1 000 0	0.80	0.50
	0.20	0.50

¿Para qué valor de *p* sería usted indiferente entre la lotería anterior y el resultado cierto 5? Si existe dicho valor, entonces se satisface la hipótesis 5; *B* sería el *equivalente cierto* de la lotería.

6. Si *A* es preferida a *B, y* existe una tercera alternativa C, entonces cualquier lotería que contenga a *A* y *C* es preferida a una lotería correspondiente con *B y C,* si las probabilidades asignadas son iguales en las dos loterías. Es necesario que la probabilidad de C sea menor que uno.

Ejemplo Sea:

$A = \$1000$
$B = \$400$
$C = \$0$

$A(p) + C(1 - p)$ es preferida a $B(p) + C(1 - p)$. Si p es igual a 0.6, entonces $\$1000 \cdot 0.6 + \$200 \cdot 0.4$ es preferida a $\$400 \cdot 0.6 + \$200 \cdot 0.4$.

La hipótesis 6 también puede expresarse como sigue: Si una lotería de *A* y *C* es preferida a una lotería de *B* y *C*, donde *C* tiene la misma probabilidad (menor que uno) en ambas loterías, entonces *A* es preferida a *B*.

7. Se define la utilidad de una lotería como la expectativa de la utilidad de sus componentes.

La hipótesis de que la utilidad de una lotería es la suma de las expectativas de la utilidad de sus componentes es conveniente para la manipulación matemática.[3] Supongamos que una lotería, L_u tiene los resultados que se muestran en la tabla 6-2, en la que se asigna una medida de la utilidad y una probabilidad de ocurrencia a cada resultado. La utilidad de la lotería se define como:

$$U(L_1) = p_1U(A_1) + p_2U(A_2) + \ldots + p_nU(A_n)$$

[3] Para una demostración, véase R. Dorfman, P. A. Samuelson y R. M. Solow, *Linear Programming andEconomic Analysis,* Nueva York, McGraw-Hill, 1958, págs. 465-469.

Tabla 6-2

Resultados	*Utilidad de los resultados*	*Probabilidad*
A_1	$U(A_1)$	p_1
A_2	$U(A_2)$	p_2
. . .	. . .	. . .
. . .	. . .	. . .
A_n	$U(A_n)$	p_n

La lotería L_1 puede tener una probabilidad de ocurrencia. Suponga que la lotería ¿, tiene una probabilidad de *r,* y la lotería L_2 tiene probabilidad de (1 - *r).* La utilidad de las dos loterías es *U(L):*

$$\boldsymbol{U(L) = rU(L_1) + (1 - r)U(L_2)}$$

Ejemplo Suponga dos loterías (véase Tabla 6-3):

$$U(L_1) = 0.6 \text{ - } 50 + 0.4 \bullet 0 = 30$$
$$U(L_2) = 1.0 \text{ - } 40 = 40$$

Suponga que L_1 tiene una probabilidad de 0.8 y L_2 tiene una probabilidad de 0.2. La utilidad esperada de la apuesta (es decir, de las dos loterías) es:

$$U(L) = 0.8 \bullet 30 + 0.2 \bullet 40 = 32$$

Cambio de escala

La escala de utilidad es arbitraria, por lo que podemos cambiar la escala y el origen sin contradecir las hipótesis. Específicamente, si *a* y *b* son dos constantes, $b > 0$ y *U(L)* es una función de utilidad, entonces *V(L)* es una función de utilidad equivalente donde:

$$V(L) = a + bU(L) \quad \text{para } b > 0$$

Las decisiones que se toman usando la función de utilidad *V(L)* serían idénticas a las que se efectuarían con *U(L).* En otras palabras, se puede añadir una constante a la función de utilidad, o cambiar la unidad (pendiente). Se dice que una función de utilidad es única ante una transformación lineal que conserva el orden.[4]

[4] El sentido en que Von Neumann y Morgenstern emplean el término *utilidad* es ligeramente distinto al de su aplicación tradicional en la economía. En el sentido de Von Neumann, la utilidad se relaciona con elecciones en las que hay incertidumbre; en la versión económica, más antigua, la utilidad representaba la satisfacción intrínseca que se obtenía con un bien. En el análisis posterior se hará más clara esta diferencia. En algunos libros recientes se ha empleado el término *preferencia* en vez de *utilidad,* para evitar esta confusión.

Tabla 6-3

Lotería	*Resultados*	*Utilidad de los resultados*	*Probabilidad*
L_1	\$1 000	50	0.6
	0	0	0.4
L_2	400	40	1.0

Obtención de una función de utilidad para el dinero

Hay que asignar valores de utilidad a todos los resultados para que puedan servir en la toma de decisiones. En muchos casos estos resultados no son de naturaleza monetaria. Por ejemplo, al efectuar un diagnóstico médico, un doctor debe sopesar factores como el dolor y el sufrimiento, la pérdida de trabajo por la hospitalización, los efectos psicológicos, los costos e incluso la muerte. Es posible utilizar el método de Von Neumann y Morgenstern para asignar valores de utilidad a estos resultados. Sin embargo, en la mayoría de los problemas empresariales, las consecuencias monetarias son las más importantes. Por lo tanto, este libro se centrará principalmente en evaluar la función de utilidad del dinero.

La forma de las funciones de utilidad

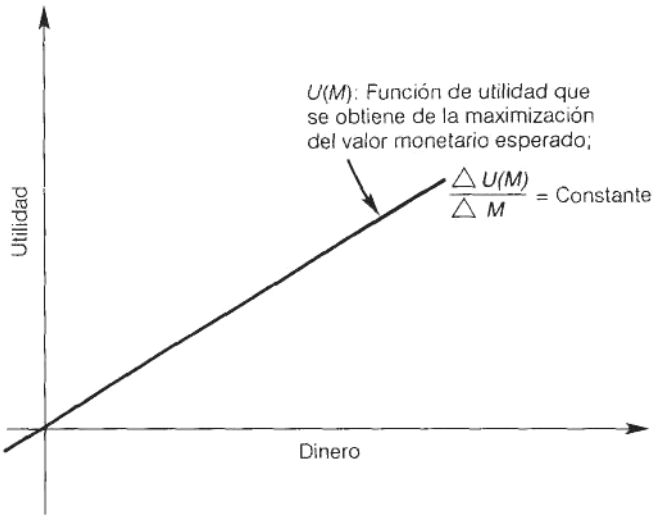
Es posible efectuar algunas generalizaciones sobre la forma usual de una función de utilidad. Las personas generalmente consideran que el dinero es un bien preciado y prefieren tener más que menos. La medida de la utilidad de una gran cantidad de dinero normalmente es mayor que la medida de la utilidad de una cantidad pequeña, y la función de utilidad aumenta en cualquier intervalo relevante de la cantidad de dinero. Se puede decir que una función de utilidad es la que tiene una pendiente positiva en este intervalo relevante. En este caso la pendiente es la razón de un cambio incremental en el índice de utilidad **[ΔU(M)]** como resultado del cambio incremental en la cantidad monetaria (ΔM). LOS cambios increméntales siempre tendrán el mismo signo, por lo que se puede escribir:

$$\text{Pendiente} = \frac{\Delta U(M)}{\Delta M} > 0$$

Esta medida de la pendiente se denomina **utilidad marginal del dinero** y, con excepción del signo algebraico, es una medida arbitraria. Lo anterior se obtiene del hecho de que una función de utilidad es única sólo ante una transformación lineal.

La pendiente de una función de utilidad es positiva y es probable que no varíe como respuesta a cambios pequeños en las existencias monetarias. De esto se sigue que, en el caso de variaciones pequeñas en la cantidad de dinero que recibe un individuo, la función de utilidad en ese intervalo tiene una pendiente aproxi-

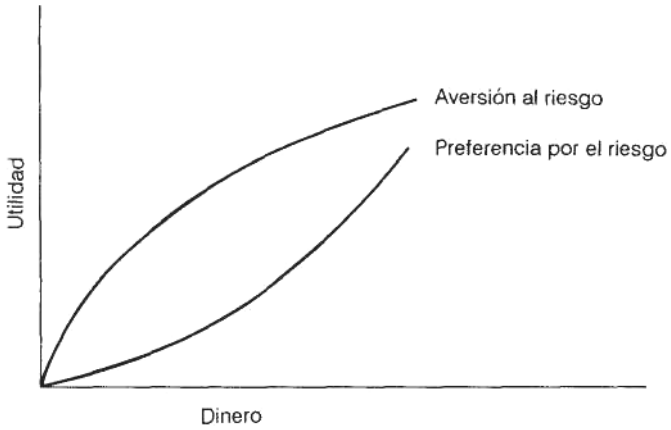
Figura 6-1 Utilidad lineal del dinero



madamente constante y se puede considerar como lineal. Si la función de la utilidad es lineal [$U(M)$, en la figura 6-1], la persona maximiza la utilidad esperada maximizando el valor monetario esperado. Por lo tanto, el valor monetario esperado puede servir como guía para la toma de decisiones sólo cuando hay razón para creer que la función de la utilidad pertinente es lineal en el intervalo de posibles resultados. Se ha visto que es una condición muy poco probable en el caso de grandes variaciones en la cantidad de dinero. En los extremos, con pérdidas o beneficios de gran magnitud, es casi seguro que la función de utilidad se aproxime a los límites superiores e inferiores. Por lo general, la pendiente de la curva crecerá de manera pronunciada conforme aumente la cantidad de la pérdida, lo que indica que la desutilidad de una pérdida cuantiosa es proporcionalmente mayor que la desutilidad de una pérdida pequeña, pero la curva se estabilizará (es decir, la pendiente tenderá a cero) cuando la pérdida sea muy grande. De manera análoga, con grandes cantidades de dinero, la pendiente de la función es cada vez más pequeña si se añade más a las existencias. Estas observaciones son consistentes con la tradicional "utilidad marginal decreciente" de la psicología del consumidor. También son consistentes con el concepto de la "aversión al riesgo" que existe en la mayoría de los problemas de decisiones empresariales. En la figura 6-2 se muestra un ejemplo de una función de utilidad adversa al riesgo; si un individuo es adverso al riesgo, la utilidad esperada de la apuesta es menor que la utilidad del valor monetario esperado.

Es posible que el decisor muestre preferencia por el riesgo, por lo menos dentro de los límites de la función de utilidad. En este caso, la utilidad esperada de una apuesta es mayor que la utilidad del valor monetario esperado. En la figura 6-2 también se presenta una función de utilidad de preferencia por el riesgo.

Figura 6-2 Funciones de utilidad



Construcción de una función de utilidad

El primer paso para obtener una función de utilidad es determinar dos valores que se usarán como puntos de referencia. Por conveniencia, pueden ser el mayor y el menor valor monetario existentes en el problema de decisión. Los valores de utilidad correspondientes a estos valores monetarios se seleccionan en forma arbitraria; por conveniencia, se podrían asignar valores de 0 y 1 a estos valores monetarios. Por ejemplo, si el problema de decisión incluye valores monetarios entre -10 000 dólares y 100 000 dólares, la utilidad 0 se asignaría a -10 000 dólares y la utilidad de 1.0 a los 100 000 dólares. Es decir:

$$U(\text{-\$10 000}) = 0 \quad \text{y} \quad U(\$100\,000) = 1.0$$

La selección de los valores 0 y 1 para la utilidad es arbitraria; también pudieron seleccionarse valores de -29 y +132, u otros. En este sentido, la escala de la utilidad es como la de la temperatura. Las escalas Celsius y Fahrenheit miden la temperatura, pero presentan lecturas diferentes para el punto de congelación del agua (0° y 32°, respectivamente) y para el punto de ebullición (100° y 212°, respectivamente).

Después formule una alternativa A_1 que ofrezca una probabilidad de 0.5 de -10 000 dólares y 0.5 de +100 000 dólares. La utilidad esperada de esta alternativa es la suma de las asignaciones de utilidad a los sucesos posibles, ponderadas por las probabilidades respectivas. En este caso:

$$U(A_1) = {}^1/_2U(\text{-\$10 000}) + {}^1/_2U(\$100\,000) = ½\ (0) + ½\ (1) = 0.5$$

El siguiente paso es formular otra alternativa (A_2) que genere una cantidad cierta de dinero, digamos, 25 000 dólares. Ahora tiene que escoger entre las dos

alternativas, A_1 y A_2. Supongamos que escoge A_2, o los 25 000 dólares seguros; entonces, se infiere que:

$$U(A_2) > U(A_1) = 0.5$$

o $U(\$25\ 000) > ½\ U\ (+\$10\ 000) + ½\ U(\$100\ 000) = 0.5$; es decir, la utilidad de 25 000 dólares es mayor que *Vi.* Ya que 25 000 dólares es preferida a A_1 *se* llega a la conclusión de que el índice de utilidad de A_2 es mayor que ½ . Luego suponga que le ofrecen 5000 dólares seguros (A_3) *y* descubre que prefiere A_1 en lugar de A_3. Esto implicaría que el índice de utilidad de los 5000 dólares sería menor que ½ . Si tuviera la paciencia suficiente, podría seguir proponiendo acciones alternativas que generaran cantidades ciertas de dinero, hasta descubrir una que tuviera el mismo atractivo que A_1. Suponga que esta oferta es la cantidad de 15 000 dólares, de lo cual se podría inferir que le es indiferente tener 15 000 dólares seguros o la propuesta original. Entonces, la asignación de utilidad a 15 000 debe ser:

$$U\ (\$15\ 000) = ½\ U\ (-\$10\ 000) + ½\ U\ (\$100\ 000) = 0.5$$

Ahora se tienen tres puntos por los cuales pasa la función de utilidad. Es posible efectuar otras evaluaciones análogas de la utilidad. Por ejemplo, proponga una alternativa que ofrezca 0.5 de probabilidad de obtener 15 000 dólares y 0.5 de obtener 100 000 dólares. Luego encuentre la cantidad que deben ofrecerle con certeza para que le sea indiferente a la oportunidad con riesgo. Digamos que esta cantidad es 47 000 dólares. Entonces, se podría concluir que la asignación de utilidad apropiada para los 47 000 dólares es:

$$\begin{aligned} U(\$47\ 000) &= ½\ U(\$15\ 000) + ½U(\$100\ 000) \\ &= ½\ (0.5) + ½\ (1) = 0.75 \end{aligned}$$

Después proponga una alternativa con 0.5 de probabilidad de obtener 15 000 dólares y 0.5 de que sean -10 000 dólares. Usted puede considerar que esta alternativa no es favorable y está dispuesto a pagar cierta cantidad para deshacerse de ella (de la misma manera en que una persona compra un seguro para cubrir el riesgo). Suponga que le son indiferentes -2500 dólares (es decir, un pago de 2500 dólares) y la oportunidad con riesgo; entonces:

$$\begin{aligned} U\ (-\$2500) &= ½U(-\$10\ 000) + ½U(\$15\ 000) \\ &= ½\ (0) + ½\ (0.5) = 0.25 \end{aligned}$$

Ahora cuenta con cinco puntos de la función de utilidad que se presenta en la tabla 6-4 y en la figura 6-3. Estos puntos se pueden unir por medio de una curva suave para dar una aproximación de la función de utilidad en todo el intervalo: -10 000 dólares a 100 000 dólares.

Observe que:

$$U(\$15\ 000)=0.5$$

Tabla 6-4 Puntos de utilidad determinados

Valor monetario M	*Indice de utilidad U(M)*
$-10 000	0
-2 500	0.25
15 000	0.50
47 000	0.75
100 000	1.0

y que:

$$½\ U(-\$2500) + ½\ U(\$47\ 000) = ½(0.25) + ½(0.75) = 0.5$$

Por lo tanto, como revisión final de sus asignaciones, le debe ser indiferente tener 15 000 dólares seguros o una alternativa que implica una probabilidad del 50% de -2500 dólares y del 50 % de obtener 47 000 dólares. Si lo anterior no es verdadero, sus evaluaciones no son consistentes y deben modificarse.

Otro procedimiento para construir la función de utilidad es escoger un valor monetario cierto y determinar a continuación las probabilidades que harían que una apuesta con los valores mínimo y máximo fuera equivalente a la cantidad cierta. Por ejemplo, si se eligiera la cantidad segura *L,* se formularía la ecuación:

$$pU(\$100\ 000) + (1 - p)U(-\$10\ 000) = U(L)$$

y se encontraría la probabilidad *p* que hace que el decisor sea indiferente entre los dos lados de la ecuación. Como ejemplo, si *L* fuera 25 000 dólares, el decisor tendría que asignar una probabilidad *p* tal que le fuera indiferente tener 25 000 dólares seguros, o una probabilidad *p* de 100 000 dólares y una probabilidad (1 - *p)* de -10 000 dólares. En este caso *p* podría ser 0.60; entonces:

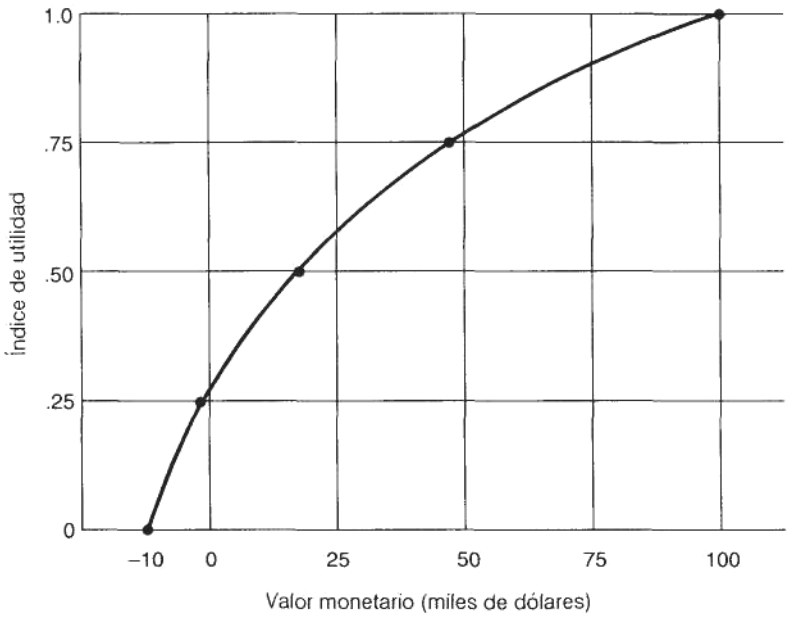
$$\begin{aligned} U(L) &= U(\$25\ 000) = 0.6U(\$100\ 000) + 0.4U(-\$10\ 000) \\ &= 0.6(1) + 0.4(0) = 0.6 \end{aligned}$$

(porque se estableció *U($* 100 000) = 1.0 y *U*(-$ 10 000) = 0, *U(L) =p).* Para obtener otros valores de la curva de utilidad se seleccionarían otros valores de *L y* se determinaría la probabilidad *p.* De esta manera se podría obtener una curva semejante a la de la figura 6-3.

Utilización de funciones de utilidad

Una función de utilidad representa la actitud subjetiva con respecto al riesgo del decisor. Por ello, la función de utilidad de una persona se puede usar para evaluar alternativas de decisión que implican resultados inciertos.

Figura 6-3 Función de utilidad determinada



Ejemplo Suponga que una persona debe escoger una de dos alternativas. La alternativa *A* comprende un contrato en el que la compañía obtendría con seguridad beneficios de 20 000 dólares. La alternativa *B,* por otra parte, es la introducción de un producto nuevo y se desconocen las ventas que lograría el producto y, por consiguiente, los beneficios. La gerencia asignó las probabilidades que se muestran en la tabla 6-5 a las diversas posibilidades de obtención de beneficios.

El valor monetario esperado de la alternativa *B* es 25 000 dólares. Con base en ello, se preferiría *B* en lugar de *A;* sin embargo, si la persona fuera adversa al riesgo, podría cambiar la preferencia. Observe que en la alternativa B hay un 30% de probabilidad de no obtener beneficios y un 10% de perder dinero. Si el decisor tuviera la función de utilidad que se muestra en la figura 6-3, se evaluaría esta alternativa con base en los valores de utilidad, en vez de los valores monetarios. Los valores de utilidad relacionados con cada uno de los beneficios se podrían obtener por interpolación en la figura 6-3; estos valores se presentan en la tabla 6-5. Después se usarían las probabilidades de la misma tabla para calcular la *utilidad esperada* (multiplicando las probabilidades por las cantidades de utilidad, y sumando). La utilidad esperada calculada es 0.524. Observe que la utilidad de los 20 000 dólares es de 0.55 en la tabla 6-5. Por lo tanto, la utilidad esperada de la alternativa *B* es menor que la utilidad del contrato que representa 20 000 dólares seguros y debe aceptarse el contrato seguro.

Tabla 6-5 Probabilidades, beneficios y utilidades de la alternativa B

Probabilidad	*Beneficios (miles de dólares)*	*Utilidad*
0.1	-$10	0
0.3	0	0.30
0.2	20	0.55
0.2	40	0.71
0.1	60	0.82
0.1	80	0.90
Valores esperados:	$25	0.524

Equivalentes ciertos

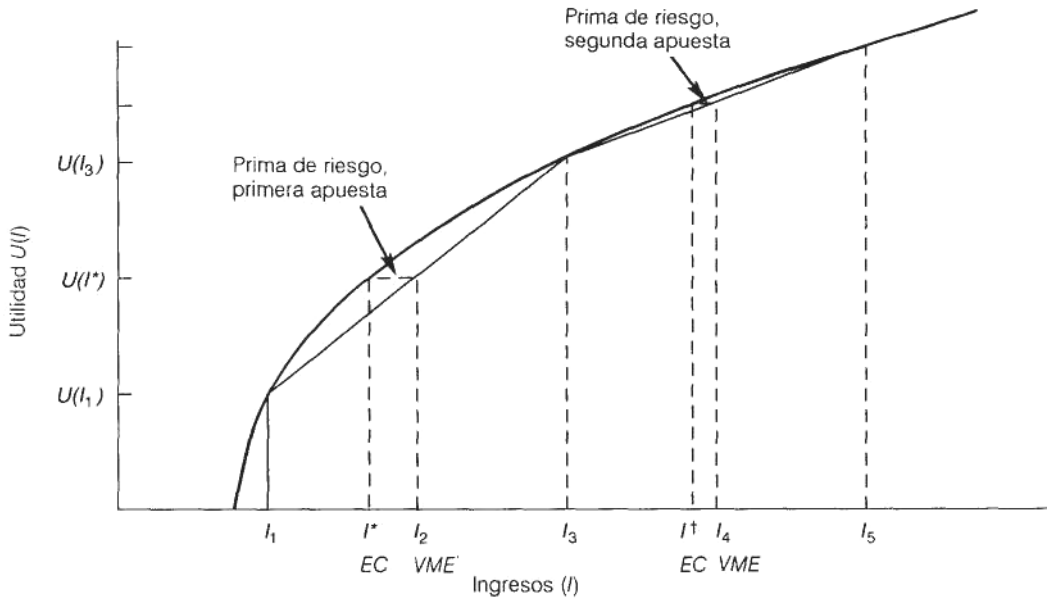
En este capítulo se ha presentado varias veces el concepto de equivalente cierto; veamos ahora con mayor detalle su significado. Considere una situación de decisión incierta, que puede representarse por una lotería, *L,* con resultados monetarios A_1 y A_2 y probabilidades p y $(1 - p)$ correspondientes. El **equivalente cierto** es la cantidad monetaria cierta o segura A^* que es equivalente (para el decisor) a la lotería *L.*

El equivalente cierto puede interpretarse como lo máximo que pagaría el decisor por un seguro que lo librara de un riesgo indeseable (por ejemplo, la prima máxima que pagaría para proteger su casa contra un incendio). También se podría considerar el equivalente cierto como la cantidad cierta mínima que uno estaría dispuesto a aceptar para vender un conjunto de resultados inciertos, pero deseables.

Una vez que se obtiene la función de utilidad del decisor y las probabilidades de una situación de decisión determinada, es fácil obtener el equivalente cierto con los métodos descritos previamente. En el ejemplo anterior, la alternativa de introducir un producto nuevo tiene utilidad esperada de 0.524. Si 17 500 dólares también tuvieran utilidad esperada de 0.524, se podría decir que la cifra de 17 500 dólares es el *equivalente cierto* de la alternativa que implica la introducción del nuevo producto. Cuando uno se enfrenta a una situación de decisión incierta, es provechoso determinar directamente el equivalente cierto preguntando al decisor. Si su respuesta no concuerda con el valor que se calculó con la función de utilidad y las probabilidades, entonces se presenta una inconsistencia, la cual puede deberse a la curva de utilidad o a las probabilidades asignadas a los resultados. Por ello, el equivalente cierto sirve como prueba de la validez del análisis.

El equivalente cierto tiene otra aplicación en el análisis de situaciones de decisión complejas. Hasta ahora nuestro procedimiento ha requerido obtener las probabilidades de los diversos resultados y una función de utilidad, como entradas separadas para el proceso de toma de decisiones. Puesto que ambas representan opiniones subjetivas del decisor, en ocasiones es conveniente recortar el análisis y obtener directamente un equivalente cierto.

Figura 6-4 Función de utilidad



Ejemplo Una empresa concursa para obtener un contrato para proveer mil unidades de un componente electrónico y tiene que decidir cuál será su precio de oferta. Un factor incierto en el proceso de decisión es la posibilidad de que sus trabajadores inicien una huelga. Si ocurre la huelga, habrá demoras y multas por incumplimiento de las fechas establecidas en el contrato. Para que el análisis de la decisión sea más sencillo, podemos preguntar al fabricante cuánto estaría dispuesto a pagar por un seguro contra las pérdidas que pudieran ocurrir debido a la huelga. La respuesta podría ser, por ejemplo, 3000 dólares. Esta cantidad es un equivalente cierto de la situación incierta relacionada con la huelga (los resultados monetarios con la huelga y sin ella *y* las probabilidades asociadas). Es probable que el decisor no pueda comprar un seguro de este tipo, pero el equivalente cierto proporciona una cifra que puede usarse en el análisis para determinar la cotización apropiada que debe presentar el fabricante.

Primas de riesgo

Suponga que un individuo tiene una función de utilidad *U(I)* como la que se muestra en la figura 6-4. Considere primero una apuesta que otorga una probabilidad de ½ para la cantidad I_1 y de ½ para la cantidad I_3. El valor monetario esperado (VME) de esta apuesta es I_2. El equivalente cierto de la apuesta es I^*, la cantidad cierta que tiene utilidad igual a la utilidad esperada de la apuesta [es

decir, $\frac{1}{2}U(I_1) + \frac{1}{2}U(I_3) = U(I^*)$]. La diferencia entre el VME y el equivalente cierto (EC) de la apuesta (o sea, $I_2 - I^*$) es la **prima de riesgo** asociada con la apuesta del individuo. La prima de riesgo es una medida de la aversión al riesgo que existe en determinado segmento de la función de utilidad de una persona. En el caso de presentar la misma apuesta a dos individuos, el que tenga mayor prima de riesgo es el más adverso al riesgo.

La prima de riesgo de un individuo por lo general no será igual en distintas partes de la función de utilidad. Considere una segunda apuesta con posibilidad de un medio para I_3 y de un medio para I_5, de forma tal que la distancia de I_3 a I_5 sea la misma que de I_1 a I_3 (es decir, $I_5 - I_3 = I_3 - I_1$). A esta segunda apuesta se le puede considerar como si estuviera formada por una cantidad segura ($I_3 - I_1$) más la primera apuesta, con I_1 e I_3. En este sentido, la segunda apuesta es igual que la primera, excepto por la diferencia en el punto de partida (I_3 en lugar de I_1). El valor esperado es I_4 y el equivalente cierto es $I\dagger$). Observe que la prima de riesgo de la segunda apuesta ($I_4 - I\dagger$) es menor que la prima de riesgo de la primera apuesta. Por lo tanto, la función de utilidad que se muestra en la figura 6-4 tiene la propiedad de **aversión decreciente al riesgo.** En otras palabras, el individuo es menos adverso al riesgo a medida que aumenta la cantidad de dinero I.

Esta propiedad de aversión decreciente al riesgo parece apropiada para la mayoría de las decisiones empresariales y gran parte de las personales. La posibilidad de una pérdida de cierta magnitud puede parecer menos importante cuanto mayor es la riqueza que posee el inversor.

Funciones de utilidad y preferencia por el riesgo

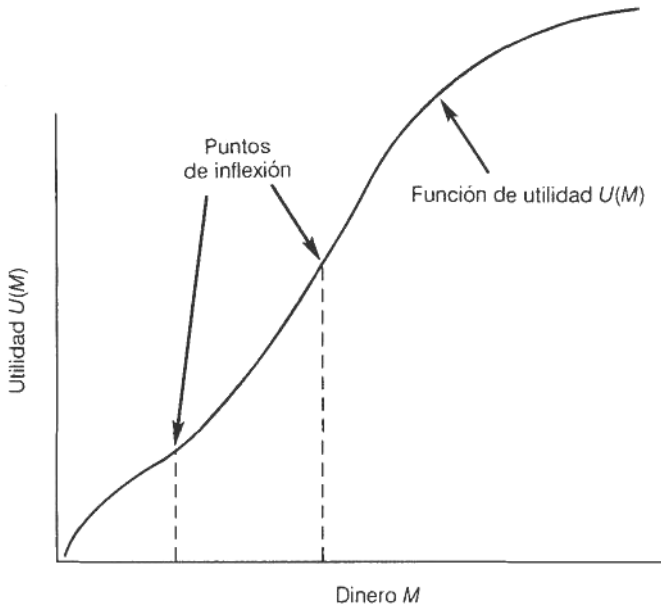
Existe evidencia empírica de que las funciones de utilidad de muchos individuos tienen una área de preferencia por el riesgo.[5] En esta área, la pendiente de la función de utilidad aumenta hasta un punto de inflexión y después se reduce (la figura 6-5 tiene dos puntos de inflexión).

Es bastante consistente que un individuo con una función de utilidad de esta forma *[U(M),* en la figura 6-5] (1) pague una pequeña prima de seguro contra grandes pérdidas, incluso cuando la prima incluya un costo de "carga" mayor que el costo actuarial de tomar el riesgo; y (2) al mismo tiempo acepte propuestas que suponen el riesgo de obtener beneficios modestos o cuantiosos a cambio de pequeñas inversiones, incluso si la expectativa matemática hace que la apuesta parezca injusta.

Ejemplo Considere un empresario cuya tabla de utilidad contiene los valores de la tabla 6-6 y suponga que existen dos decisiones: *(a)* ¿Es deseable pagar una prima de

[5] La conjetura original se debe a Friedman y Savage, "The Utility Analysis of Choices Involving Risk", *Journal of Political Economy,* agosto de 1948, apoyada por las observaciones empíricas de que muchas personas estaban dispuestas a aceptar operaciones de riesgo (es decir, loterías) en las que puede darse un "muy buen" resultado con baja probabilidad al mismo tiempo que se aseguraban contra pérdidas cuantiosas. Con posterioridad a esta idea, se ha obtenido apoyo experimental que confirma esta perspectiva.

Figura 6-5 Utilidad de la riqueza



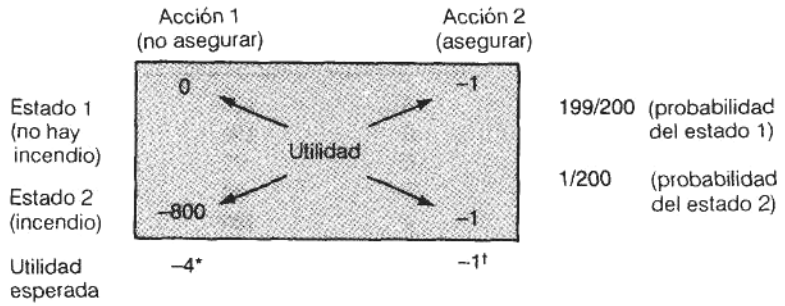
100 dólares para asegurarse contra la posibilidad de una pérdida de 10 000 dólares por incendio si la posibilidad de un incendio en la propiedad del empresario es de 1 en 200? (*b*) ¿Es deseable invertir 100 dólares en un proyecto de perforación para buscar petróleo, en el cual un geólogo indica que sólo hay una posibilidad en 200 de encontrar petróleo (con la expectativa de 10 000 dólares de beneficio) y 199/200 de probabilidad de perder la inversión de 100 dólares? Analicemos estas decisiones en función de las expectativas que se calculan a partir de las medidas de la utilidad. En la tabla 6-7 se describe la decisión de asegurar o no asegurar.

En la tabla 6-7, la utilidad esperada de la acción 1 es menor que la utilidad esperada de la acción 2; el empresario maximiza la utilidad si elige la acción 2 (asegurar).

Tabla 6-6

M	*U(M)*
-$10 000	-800
-200	-2
-100	-1
0	0
10 000	250

Tabla 6-7 Utilidad condicional y esperada para el seguro

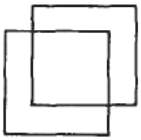


$^{*}\ -800\left(\frac{1}{200}\right) = -4$

$^{\dagger}\ -1\left(\frac{199}{200}\right) - 1\left(\frac{1}{200}\right) = -1$

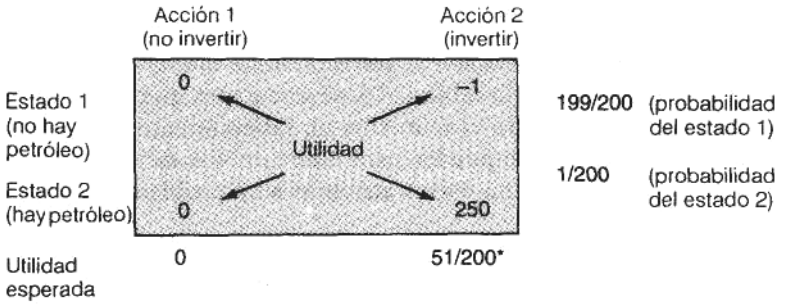
La decisión de invertir o no invertir se puede analizar de la misma manera. La tabla de utilidad 6-8 se puede elaborar con base en la información disponible. De ella se desprende que la utilidad esperada de la acción 1 es menor que la utilidad esperada de la acción 2. Entonces, el empresario maximiza la utilidad al seleccionar la acción 2 (invertir). El proyecto con riesgo se aceptaría, al mismo tiempo que el empresario se asegura en contra de una pérdida, en contradicción con la decisión que indicaría el valor monetario esperado.

RESUMEN



Cuando los aspectos de riesgo son importantes, puede ser más apropiado maximizar la utilidad esperada y no el valor monetario esperado. Una función de utilidad se puede determinar por medio de loterías y puntos de indiferencia o a

Tabla 6-8 Utilidad condicional y esperada para la inversión



$^{*}\ -1\left(\frac{199}{200}\right) + 250\left(\frac{1}{200}\right) = \frac{51}{200}$

Tabla 6-9 Propuestas de alternativas de seguridad

Alternativa	*Reducción anual en el número de fallecimientos*	*Reducción anual en daños a propiedades (millones de dólares)*
A	100	25
B	150	20
C	75	40
D	50	42
E	100	22

través de equivalentes ciertos. La alternativa de decisión que maximice la utilidad esperada es la alternativa preferida.

Funciones de utilidad multiatributo

En algunos problemas de decisión pueden existir varios factores o *atributos* de importancia que afecten el valor de un resultado. Por ejemplo, varios programas de seguridad en carreteras pueden reducir el número de accidentes fatales y la cantidad de daños a las propiedades. Primero veremos un ejemplo determinista (sin riesgo) y luego lo modificaremos para incluir los aspectos de riesgo.

Ejemplo Suponga que hay cinco propuestas diferentes para mejorar la seguridad en las carreteras, todas con el mismo costo anual. Los resultados anticipados se presentan en la tabla 6-9.

Un enfoque inicial sería tratar de reducir el problema con varios atributos **a** un problema con un solo criterio, buscando una forma de que los atributos sean directamente comparables. Por ejemplo, suponga que se estudia un gran número de decisiones en el pasado que implicaban transferencia o intercambio entre las muertes y el número de dólares invertidos para evitarlas y se descubre que, en promedio, las decisiones anteriores indicaron que la sociedad estaba dispuesta a gastar 250 000 dólares para evitar un accidente fatal. En la tabla 5-10 se muestran los resultados monetarios de las cinco alternativas, con base en la estimación de 250 000 dólares para la conversión de fallecimientos **a** dólares.

A partir de la tabla 6-10, se encuentra que la alternativa C presenta el mayor valor monetario si se evalúa un fallecimiento en 250 000 dólares. Este ejemplo ilustra cómo se pueden usar intercambios entre atributos distintos para convertir un problema con varios atributos a un problema con uno solo.

Atributos no comparables: Dominación

Hay casos en los cuales los atributos no se pueden comparar directamente. Suponga que no se puede acordar un valor monetario para un fallecimiento, en el

Tabla 6-10 Resultados monetarios (suponiendo un fallecimiento = 250 000 dólares)

Alternativa	*Reducción anual en el número defallecimientos'*	*Valor de la reducción en el número de fallecimientos (millones de dólares)*	*Reducción anual en daños a propiedades (millones de dólares)*	*Reducción total , (millones de dólares)*
A	100	25	25	50
B	150	37.5	20	57.5
C	75	18.75	40	58.75
D	50	12.5	42	54.5
E	100	25	22	47

ejemplo anterior. El siguiente paso sería buscar las alternativas dominadas. Una **alternativa dominada** es aquella cuyos resultados son todos inferiores o iguales a los resultados de otra alternativa. Si revisa la tabla 6-9, puede observar que la alternativa *E* es dominada por la alternativa *A,* la cual tiene la misma reducción en el número de fallecimientos y un resultado más favorable en lo que se refiere a daños a propiedades. Entonces, se puede eliminar la alternativa *E*.

Si las alternativas de decisión no son mutuamente excluyentes y se pueden usar dos o más en cualquier proporción, entonces es conveniente buscar una **dominación ponderada.** En el ejemplo, esto se obtiene elaborando el gráfico de las cuatro alternativas restantes (véase Fig. 6-6). Se pueden unir los resultados de la figura 6-6 que ofrezcan la mayor cantidad de un atributo con respecto a otro; así, los resultados *B, C* y *D* se unen por medio de líneas. Estas líneas representan una **frontera eficiente.** Con base en las cuatro alternativas y la oportunidad de aplicar más de una de ellas en combinación, el punto óptimo debe estar sobre la frontera eficiente.

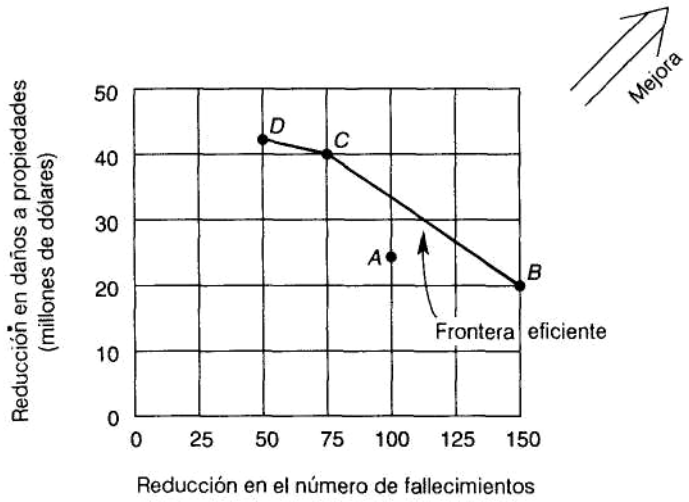
Observe la posición de la alternativa ,4 con respecto a la frontera eficiente; está debajo de la línea que une las alternativas *C* y *B*. Esto significa que una mixtura o media ponderada de *B* y C superaría a *A,* por lo cual *A* es dominada por las alternativas *B* y *C*. Para verlo, considere una ponderación de I/3 para *B* y % para C; esto correspondería a invertir una tercera parte del presupuesto en la alternativa *B* y dos terceras partes en *C*. El resultado medio ponderado sería:

Reducción en fallecimientos $(\frac{1}{3})(150) + (\frac{2}{3})(75) = 100$
Reducción en daños a propiedades $(\frac{1}{3})(20) + (\frac{2}{3})(40) = 33.33$

El punto (100, 33.33) está sobre la frontera eficiente y directamente encima de la alternativa *A,* por lo cual la domina.

El concepto del dominio ponderado sólo tiene sentido cuando las alternativas no son mutuamente excluyentes y pueden usarse en proporciones diversas. En el ejemplo, la alternativa *B* podría ser la publicidad para el uso del cinturón de seguridad y la alternativa *C* podría comprender la construcción de vallas más resistentes en las curvas de las carreteras. Cada una de estas alternativas puede

Figura 6-6 Alternativas de propuestas de seguridad



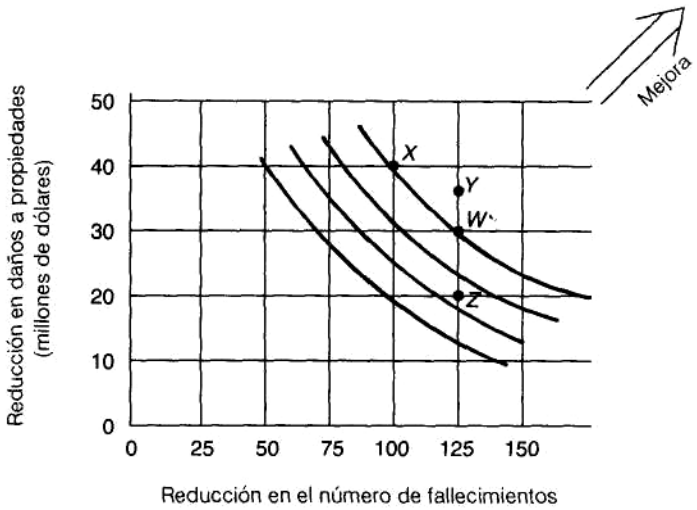
aplicarse en forma de promedio ponderado, asignando una parte del presupuesto a *B* y el resto a C, suponiendo que los resultados reales de las alternativas son proporcionales a los gastos que se efectúan.

Elección entre alternativas

Para escoger uno de los puntos de la frontera eficiente, se pide al decisor que especifique puntos de indiferencia entre diversos resultados. Considere la figura 6-7, donde los atributos se representan en los ejes. Suponga que se presenta un resultado específico *X* (100 fallecimientos y 40 millones de dólares en daños a propiedades) al decisor. Luego se escoge otro resultado, F(con 125 fallecimientos y 35 millones de dólares en daños) y se pregunta "¿Son iguales los resultados *X* e y?" Si *Y* es preferido a *X,* se crea un resultado Z con 125 fallecimientos y 20 millones de dólares en daños. Suponga que X es preferido a Z. Al variar la cantidad de daños a propiedades con los 125 fallecimientos, se puede llegar a determinar un punto de indiferencia en el cual el decisor considera que los dos resultados tienen el mismo valor. Suponga que con el resultado *W* (125 fallecimientos, 30 millones de dólares en daños), el decisor es indiferente entre *W*y X; se podría dibujar una **curva de indiferencia** entre estos dos puntos. Si se continuara con una serie de preguntas similares, se podrían establecer conjuntos de curvas de indiferencia, como las que se observan en la figura 6-7.

Una vez que se ha obtenido un conjunto de curvas de indiferencia, se puede combinar con la frontera eficiente de la figura 6-6 para obtener una decisión óptima. La figura 6-8 contiene las curvas de indiferencia y la frontera eficiente.

Figura 6-7 Curvas de indiferencia



La decisión óptima es seleccionar el punto de la frontera eficiente que alcanza la curva de indiferencia más alta. En la figura 6-8 la decisión óptima se representa con *F,* que equivale a aproximadamente una reducción de 128 fallecimientos y de 26 millones de dólares en daños a propiedades y es un promedio ponderado de las alternativas *B y C*.

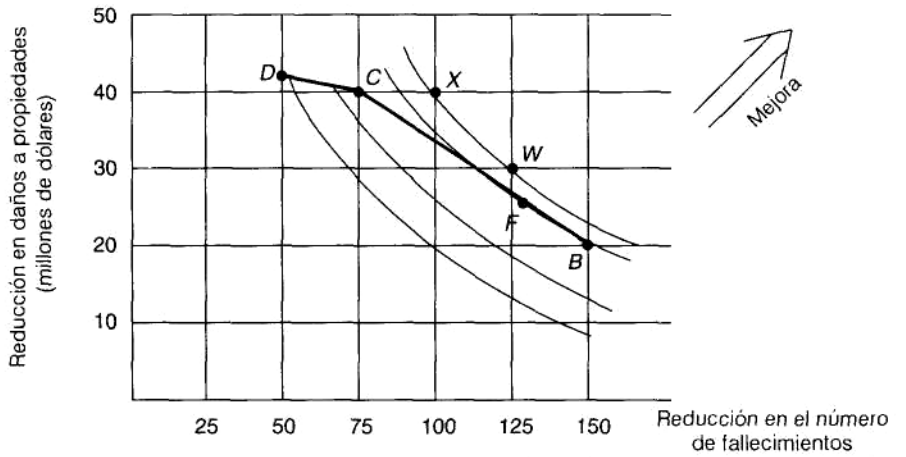
Análisis conjunto

Para construir las curvas de indiferencia entre más de dos atributos, es común una técnica estadística llamada *análisis conjunto*. Esta técnica es cada vez más popular entre los gerentes de mercadotecnia que necesitan evaluar la utilidad relativa de diversos atributos de productos para los consumidores actuales y potenciales. Aunque los detalles estadísticos del análisis conjunto están fuera del alcance de este libro, el resultado del análisis sería un conjunto de ponderaciones de importancia para cada atributo. Por ejemplo, los pesos promedio de la importancia de los atributos de un automóvil podrían ser los de la tabla 6-11. Los gerentes de mercadotecnia pueden obtener estos datos para otros segmentos de la población de posibles compradores y diseñar productos con combinaciones de atributos que sean atractivos para distintos sectores del mercado.

RESUMEN

En situaciones sin riesgo con varios atributos, primero se intenta descubrir las transferencias o intercambios entre atributos que permitirían reducir el problema a un solo atributo, como sería el dinero. Si no puede lograrse un acuerdo con respecto a tal intercambio, se busca la eliminación de las alternativas dominadas

Figura 6-8 Decisión óptima



y, si éstas no son mutuamente excluyentes, se eliminan también las alternativas dominadas por combinaciones de otras alternativas (el caso del dominio ponderado). Las alternativas que quedan forman una frontera eficiente. Luego, se elaboran conjuntos de curvas de indiferencia y, por último, se combinan los conjuntos de curvas de indiferencia con la frontera eficiente para obtener la decisión óptima (la que se encuentra en la curva de indiferencia mayor).

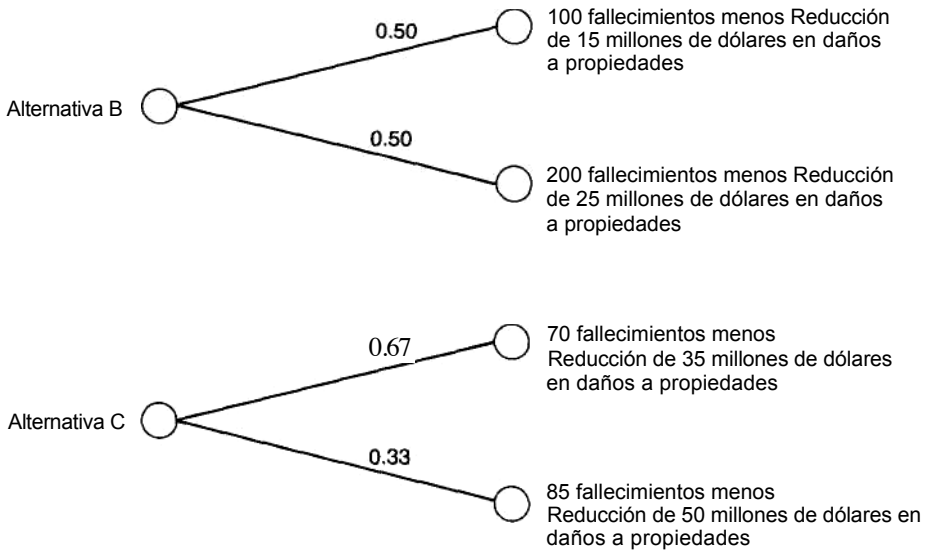
Resultados en riesgo

Hemos visto que el análisis de un problema de decisión con varios atributos es bastante complejo, incluso si los resultados no son inciertos. El análisis del problema general con resultados inciertos es un problema muy complejo. Aunque, en teoría, el método de detección de los puntos de indiferencia puede aplicarse al caso que implica riesgo, en la práctica es un procedimiento muy complicado y tedioso.

Tabla 6-11 Ponderación de la importancia del análisis conjunto

Atributo	*Peso*
Rendimiento	0.20
Confiabilidad	0.20
Economía de combustible	0.30
uridad	0.10
Características	0.20
Total	1.00

Figura 6-9 Resultados inciertos



Hay una versión del problema de riesgo que es bastante fácil de analizar: la situación en la cual el riesgo de los atributos se trata en forma *independiente*. La independencia de los atributos en riesgo no significa que los atributos no se relacionen; quiere decir que las preferencias de aversión al riesgo con respecto a un atributo no son una función del nivel de riesgo del otro atributo. Lo anterior quedará más claro con un ejemplo.

Ejemplo Considere el ejemplo anterior, pero ahora suponga que sólo hay dos alternativas, *B y C, y* que los resultados de éstas son inciertos. La figura 6-9 describe los resultados y sus probabilidades.

Digamos que el decisor determina dos funciones de utilidad distintas para la reducción en el número de fallecimientos y la reducción en daños a propiedades y está de acuerdo en que la utilidad total es la suma de las dos funciones de utilidad. Si la utilidad total se puede separar en dos funciones de utilidad aditivas, entonces el problema puede analizarse de manera bastante directa.

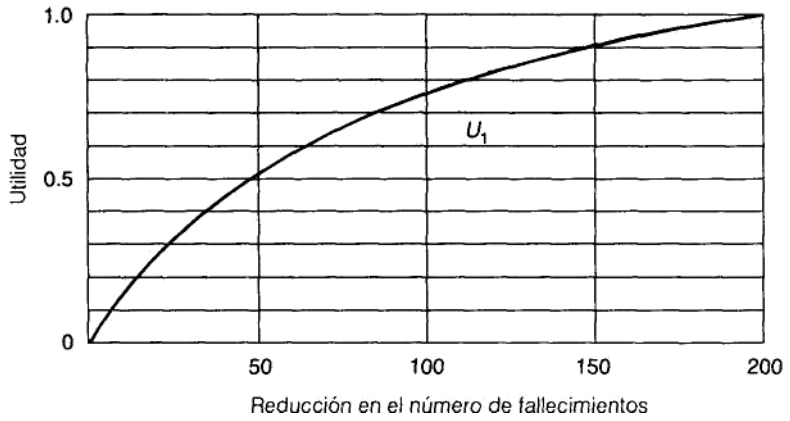
Por ejemplo, suponga que el decisor tiene una función de utilidad U_1 para la reducción en el número de fallecimientos, que se presenta en la figura 6-10, y una función de utilidad correspondiente U_2 para la reducción en los daños a propiedades, que se muestra en la figura 6-11.

Ahora las funciones de utilidad se pueden usar con resultados en riesgo para determinar la utilidad de cada alternativa, si las funciones de utilidad son aditivas.

Para la alternativa *B:*

$$U(B) = 0.50\ U_1(100) + 0.50\ U_1(200) + 0.50\ U_2(15) + 0.50\ U_2(25)$$

Figura 6-10 Utilidad de la reducción en el número de fallecimientos



Al tomar los valores de la utilidad de las figuras 6-10 y 6-11:

$$U(B) = 0.5(0.75) + 0.5(1.0) + 0.5(0.38) + 0.5(0.60) = 1.365$$

Para la alternativa C:

$$U(\mathrm{C}) = 0.67\ 17,(70) + 0.33\ 17,(85) + 0.67\ U_2(35) + 0.33\ U_2(5\mathrm{O})$$

Una vez más, tomando los valores de las figuras:

$$U(\mathrm{C}) = 0.67(0.60) + 0.33(0.68) + 0.67(0.80) + 0.33(1.0) = 1.4924$$

Por lo tanto, la alternativa C es preferida a la alternativa *B*.

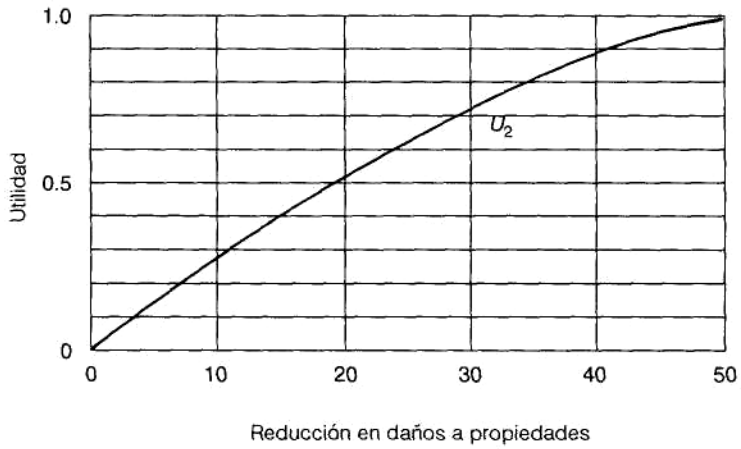
Al llegar a este punto es necesario hacer una advertencia: puede ser imposible representar las preferencias del decisor por medio de funciones de utilidad separadas aditivas. En dicho caso, hay que combinar el método de la curva de indiferencia y la evaluación de las preferencias, y el análisis se complica con rapidez.[6]

RESUMEN

Los problemas de riesgo con varios atributos se pueden resolver con funciones de utilidad si la utilidad de los resultados se puede representar con funciones de utilidad aditivas para cada atributo.

[6] Véase C. A. Holloway, *Decisión Making undcr Uncertainty: Models and Choices*, Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1979, capitulo 20.

Figura 6-11 Utilidad de la reducción en daños a propiedades



Teoría de las perspectivas

Kahneman y Tversky critican la teoría de la utilidad esperada porque han observado acciones que no son consistentes con ella. Ofrecen otro esquema alternativo que se denomina **teoría de las perspectivas.**[7]

Veremos los tipos de problemas que motivaron a Kahneman y Tversky. Considere dos loterías, *A y B:*

Lotería	*Resultados*	*Probabilidad*
A	$4 000	0.8
	0	0.2
B	3000	1.0

¿Cuál lotería escogería usted? Como podría esperarse; un mayor porcentaje de las personas eligió *B,* la certeza de 3000 dólares en lugar de 4000 dólares inciertos.

También ofrecieron otras dos loterías:

[7] D. Kahneman y A. Tversky, "Prospect Theory: An Analysis of Decisión under Risk", *Econometrica,* págs. 263-291, marzo de 1979. También, Kahneman y Tversky, "The Framing of Decisions and the Psychology of Choice", *Science,* págs. 453-458, enero de 1981.

Lotería	*Resultados*	*Probabilidad*
C	$4 000	0.2
	0	0.8
D	3000	0.25
	0	0.75

En este caso la mayoría de la gente prefirió *C*. Por desgracia para la teoría de la utilidad, la preferencia de C en lugar de *D* no es consistente con la elección de *B* en lugar de *A*. Si se establece $U(0) = 0$, con *B* preferida sobre *A*, se tiene:

$$U(3000) > 0.8U(4000)$$

Si se prefiere C en lugar de *D:*

$$0.2U(4000) > 0.25$$

$U(3000)$ Multiplicando ambos lados por 4, se

obtiene:

$$0.8U(4000) > U(3000)\ U(3000) >$$

$0.8U(4000)$ no es consistente con $0.8U(4000) > U(3000)$.

En el segundo conjunto de loterías se proporcionó información adicional (la posibilidad del resultado cero para la lotería D) que confunde al decisor. Aparece una ilusión, el decisor cae en la trampa y escoge C en vez de *D*. Para ayudar al decisor, cambiaremos el método de presentación de las loterías *C y D*, pero no las cambiaremos.

Suponga que hay tres pasos:

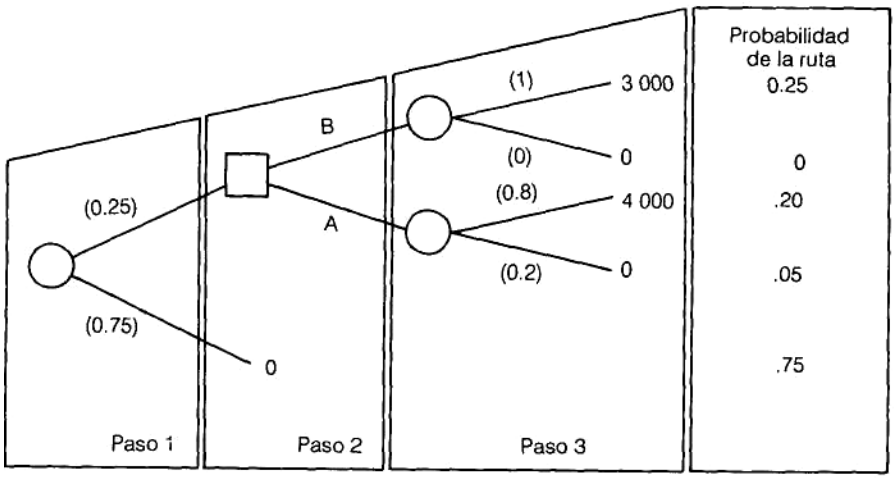
Paso 1. Una posibilidad o suceso aleatorio. Hay 0.75 de probabilidad de 0 y 0.25 de probabilidad de pasar a la opción que comprende las loterías *A* y *B*.
Paso 2. Hay que escoger entre *A y B*. *Paso 3*. Determinar el resultado aleatorio de *A* si se elige *A*.

Observe que la única decisión que existe es elegir entre *A* y *B y* ya sabemos que se prefiere *B*. La figura 6-12 muestra el árbol de decisión para los tres pasos. Si se elige la lotería *B*, entonces se tiene:

Resultado	*Probabilidad*
3 000	0.25
0	0.75

lo cual es la lotería *D*.

Figura 6-12



Si se escoge la lotería *A*, se tiene:

Resultado	*Probabilidad*
4 000	0.20
0	0.80

lo cual es la lotería C. Como se escogió la lotería *B*, en realidad se elige la lotería *D* en lugar de la C. Este ejemplo muestra cómo es posible confundir al decisor si se introduce información adicional.

Kahneman y Tversky destacan un punto fundamental: la estructura de las elecciones y la información pueden influir sobre la decisión. Estas observaciones son muy importantes, ya que proponen que el decisor debe saber que hay que llegar al fondo de las palabras y de los números para extraer los elementos básicos para la decisión. Hay que darse cuenta de que la frase "el vaso está medio lleno" es, en el contexto de una decisión, exactamente igual que la frase "el vaso está medio vacío" y debemos ser indiferentes ante la opción de uno de los dos vasos. No sólo son importantes los resultados y sus probabilidades, sino también la forma en que se presentan.

Bibliografía

Bunn, D. W., *Applied Decisión Analysis,* Nueva York, McGraw-HM, 1984. Edwards, W. y A. Tversky, editores, *Decisión Making,* Baltimore, Penguin Books, 1967.
Fishburn, P. C, *Utility Theoryfor Decisión Making,* Nueva York, John Wiley & Sons, 1970.
Friedman, M. y L. J. Savage, "The Utility Analysis of Choices Involving Risk", *Journal ofPolitical Economy,* agosto de 1948. Green, P. E. y Y. Wind, *Multiattribute Decisions in Marketing,* Hinsdale, 111., Dryden Press, 1973.
Holloway, C. A., *Decisión Making under Uncertainty: Models and Choices,* Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1979 *IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics* (edición especial sobre el análisis de decisiones), vol. SSC-4, núm. 3, septiembre de 1968. Kahneman, D. y A. Tversky, "Prospect Theory: An Analysis of Decisión under Risk", *Econometrica,* págs. 263-291, marzo de 1979.
Kahneman, D. y A. Tversky, "The Framing of Decisions and the Psychology of Choice", *Science,* págs. 453-458, enero de 1981.
Keeney, R. L. y H. Raiffa, *Decisions with Múltiple Objectives,* Nueva York, John Wiley & Sons, 1976.
Pratt, J. W., H. Raiffa y R. Schlaifer, "The Foundations of Decisión under Uncertainty: An Elementary Exposition", *Journal ofthe American Statistical Association,* junio de 1964.
Savage, L. J., *The Foundations of Statistics,* Nueva York, John Wiley & Sons, 1954.
Schlaifer, R., *Analysis of Decisions under Uncertainty,* Nueva York, McGraw-Hill, 1969.
Swalm, R. O., "Utility Theory-Insights into Risk Taking", *Harvard Business Review,* noviembre-diciembre de 1966.
Von Neumann, J. y O. Morgenstem, *Theory of Gantes and Econoinic Behavior,* Princeton, Princeton University Press, 1944.
Zeleny, M., *Múltiple Criterio Decisión Making,* Nueva York, McGraw-Hill, 1982.

Problemas con respuestas

6-1. El empresario *W* tiene un índice de utilidad de 5 para una pérdida de 1000 dólares y de 12 para un beneficio de 3000 dólares. El empresario afirma que es indiferente entre 10 dólares seguros y la siguiente lotería: probabilidad de 0.4 de perder 1000 dólares y 0.6 de ganar 3000 dólares. ¿Cuál es su índice de utilidad para diez dólares?

6-2. El empresario *X* tiene un índice de utilidad de 0.50 para -2 dólares y afirma que es indiferente entre 500 dólares seguros y una lotería con 0.8 de probabilidad de -2 dólares y 0.2 de ganar 20 000 dólares. ¿Cuál es su índice de utilidad para 20 000 dólares? El empresario

6-3. W tiene un índice de utilidad de 5 para una pérdida de mil dólares y un índice de utilidad de 6 para una pérdida de 500 dólares. ¿Cuál es la pendiente de su función de utilidad entre los dos puntos?

6-4. Usted tiene una cita para el baile de análisis cuantitativo; la admisión cuesta 10 dólares, que usted no tiene. El día del baile, su instructor de psicología le ofrece ocho dólares ciertos o un 50% de probabilidad de no obtener nada o ganar 12 dólares. ¿Que elegiría, suponiendo que no tiene otra fuente de financiamiento o de crédito? ¿Por qué? Si la utilidad de ocho dólares es 20 y la utilidad de cero dólares es 0, ¿qué implica acerca de la utilidad de 12 dólares?

6-5. Suponga que Smith tiene una función de utilidad $U(x) = x^{2li}$, donde x está en dólares ($0 < x < 1000$). A Smith le presentan las siguientes opciones:
A: Ocho dólares seguros *B:* Una lotería con la misma probabilidad de obtener 64 dólares o no obtener nada.
¿Qué lotería pronosticaría usted que escogerá Smith?

6-6. La compañía de ingeniería Iota subcontrata contratos gubernamentales. Iota es una compañía pequeña con capital limitado. Su función de utilidad es la siguiente:

$$U(x) = -x/100 - x^2/5000, \; x < -1000$$
$$U(x) = x/100 - 170, \; -1000 \le x \le 10\,000$$
$$U(x) = \sqrt{x}, \; x > 10\,000$$

a. Suponga que Iota quiere concursar para obtener un contrato. Les costará 2000 dólares elaborar la oferta; si no obtienen el contrato, pierden los 2000 dólares, pero si ganan, recuperarán los 2000 dólares de preparación de la oferta y 40 000 dólares adicionales. Suponga que Iota cree que la probabilidad de obtener el contrato es 0.5 si presentan la oferta. ¿Qué deben hacer?

b. ¿Cuál tendría que ser la probabilidad de ganar para que Iota enviara una oferta?

6-7. La compañía ABC quiere que su producto sea estéticamente agradable y barato. Los ingenieros **de** costos han evaluado cinco alternativas de diseño para determinar su costo y los expertos en diseño han calificado la estética del diseño, como indica la tabla de la columna de al lado. Las alternativas son mutuamente excluyen-tes; sólo se puede seleccionar una.

Alternativ	*Costo unitario (dólares)*	*Atractivo estético (10 = mejor, 1 = peor)*
A	$100	5
B	80	7
C	110	8
D	125	9
E	150	10

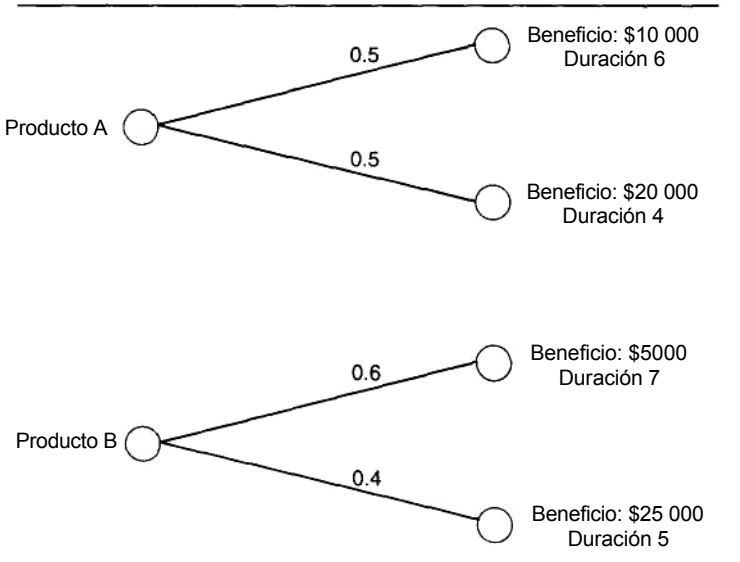
a. ¿Hay alternativas dominadas? ¿Cuáles son y por qué están dominadas?

b. Elabore un gráfico de las demás alternati vas, con los dos atributos como ejes.

c. Suponga que el presidente de la compañía decide que un punto de atractivo estético equivale a 10 dólares de aumento en el costo por unidad. Dibuje un conjunto de líneas de indiferencia en su gráfico, donde la pendiente represente el intercambio en tre atributos definido por el presidente. ¿Cuál es la alternativa preferida?

6-8. **La compañía XYZ debe seleccionar uno de dos productos para presentarlo al mercado.** Los dos productos tienen resultados en riesgo en lo que se refiere a la rentabilidad a corto plazo y a la duración a largo plazo, como se muestra en la figura siguiente (la duración se mide en una escala del 1 al 10, donde 10

Para el problema 6-8



es lo mejor). La compañía opina que la utilidad total es la suma de la utilidad de los beneficios y de la duración. Para los beneficios, la función de utilidad es í/i(p) = p^{2i3}, donde *p* equivale a miles de dólares de beneficio. La función de utilidad para la duración es $U_2(d) \bullet = d^{1I3}$, donde *d* = escala de duración.

a. ¿Es dominada alguna de las alternativas?
b. Evalúe las dos alternativas. ¿Cuál prefiere?

Problemas

6-9. El empresario *Y* tiene un índice de utilidad de -108 para 11 000 dólares y de -275 para cero dólares. Es indiferente entre una probabilidad de 0.5 de obtener 11 000 dólares y 0.5 de perder 20 000 dólares y la certidumbre de no obtener nada. ¿Cuál es su índice de utilidad para una pérdida de 20 000 dólares? El empresario

6-10. Z tiene un índice de utilidad de 10 para 18 750 dólares, 6 para 11 200 dólares y 0 para cero dólares. ¿Qué combinación de probabilidades de cero dólares y 18 750 dólares le haría indiferente ante 11 200 dólares seguros? Dos

6-11. economistas, Alfred M. Noxie y J. May-nard K. Bampton, discuten acerca de las ventajas relativas de sus respectivas reglas de decisión. Noxie dice que siempre elige la acción con mayor valor monetario esperado; Bampton señala que siempre escoge la acción con mayor utilidad esperada y que su función de utilidad para el dinero es *U(M)* = 10 + 0.2M. En el caso de decisiones relativas a beneficios monetarios, ¿quién hará la mejor elección? Usted es representante de ventas de

6-12. seguros contra incendio y discute con un matemático terco que afirma que no debe asegurar su casa contra incendio por el pequeño cargo adicional que representan los gastos adicionales de la compañía de seguros. Si el análisis del matemático es correcto, ¿qué implica acerca de la forma de su función de utilidad? Suponga que las ponderaciones de

6-13. la importancia de atributos de la tabla 6-11 se pueden dividir en dos segmentos de mercado, como se muestra a continuación. Describa en términos cualitativos qué implican estos datos para cada uno de los segmentos; es decir, describa cómo varían los segmentos en lo que se refiere a los intercambios entre los atributos que se presentan.

Atributo	*Segmento A Ponderación*	*Segmento B Ponderación*
Rendimiento	0.10	0.30
Confiabilidad	0.30	0.10
Economía de combustible	0.40	0.20
Seguridad	**0.10**	0.10
Características	0.10	0.30
Total	1.00	1.00

6-14. Usted es el gerente de planta de una pequeña industria de manufactura. Hay que repavimentar el estacionamiento adyacente a la fábrica y un contratista le ha dicho que presentará una oferta que consiste en el costo total esperado más un 10% de beneficio. La única incertidumbre en el cálculo del costo de este trabajo es el tiempo. Si es soleado, el costo incremental del trabajo será 40 000 dólares, pero si llueve, el costo incremental será 55 000 dólares. La oficina meteorológica ha informado que la probabilidad de lluvia en el periodo en cuestión es de 1 en 10 y que todos los contratistas conocen y aceptan esta información.

Usted sabe que recibirá otras dos ofertas para el trabajo. Dos contratistas pequeños de la localidad, Willie y Joe, han estado en pugna desde la Segunda Guerra Mundial. Últimamente, el objetivo de su rivalidad ha sido ver quién es el primero en obtener beneficios superiores a 100 000 dólares en un año. Usted sabe que los beneficios de Willie en el año han sido 109 500 dólares y las de Joe, 95 000 dólares. Queda muy poco tiempo en el año y su trabajo puede ser el último para ambos. Además, los dos tienen exceso de capacidad y pueden

aceptar el trabajo. ¿Qué ofertas puede esperar de ellos? ¿Cómo explicaría las ofertas? **6-15.** Suponga que una persona, al pedirle el equivalente cierto de las apuestas que se presentan en la primera columna de la siguiente tabla, respondió con las cifras de la segunda columna.

Apuesta	*Equivalente cierto determinado*
1. Probabilidad de *Vi* para -$100 000 y de 1/2 para $200 000	$ 10 000
2. Probabilidad de *Vi* para $10 000 y de *Vi* para $200 000	100 000
3. Probabilidad de *Vi* para $10 000 y de *Vi* para -$100 000	-55 000

a. Elabore un gráfico con los puntos de utilidad que se relacionan con las apuestas anteriores y dibuje una curva de utilidad suave uniendo los puntos.

b. A partir de la curva, encuentre el equivalente cierto de la siguiente apuesta:

	Probabilidad
-$80 000	0.2
0	0.4
80 000	0.2
160 000	0.2

6-16. El tesorero de una corporación considera una decisión para aumentar la cantidad deducible del seguro contra incendio de la compañía, de 2000 dólares por ocurrencia a 5000 dólares (lo que significa que la póliza no reembolsará los primeros 5000 dólares de las pérdidas del incendio). Este aumento en el deducible reduciría la prima anual del seguro, de 2500 dólares a 1400. Con base en los datos históricos, el tesorero estima la probabilidad de incendio como indica la siguiente tabla. Si ocurre un incendio es seguro que la pérdida sea mayor de 5000 dólares, por el tipo de producto que se fabrica.

Número de incendios en un año	*Probabilidad*
0	0.80
1	0.15
2	0.05
3 o más	0

Al preguntarle acerca de las preferencias de aversión al riesgo, se obtuvo la siguiente función de utilidad

Dólares	*Utilidad*
-$10 000	0.000
-4000	0.300
0	0.490
1 000	0.537
3000	0.620

¿El tesorero debe aumentar el deducible? ¿Por qué?

6-17. Remítase al problema 4-22 y al árbol de decisión de la figura 4-13. Suponga que QPC determina los siguientes puntos de su función de utilidad:

Millones de dólares	*Utilidad*
-4.00	0.0
-3.50	0.2
-2.00	0.4
0.75	0.6
5.00	0.8
10.00	1.0

Elabore un gráfico con estos puntos y dibuje una curva suave que pase por ellos. Luego use la curva para determinar la decisión que debe tomar QPC en el árbol de decisión de la figura 4-13.

6-18. Remítase al problema 6-17. Suponga que QPC tiene otro proyecto que supone una probabilidad de 0.50 de ganar 10 millones de dó-

lares y una probabilidad de 0.5 de perder cuatro millones de dólares. Use la curva de utilidad que pasa por los puntos proporcionados en el problema 6-17.

Varios inversores ofrecen asociarse con QPC para el proyecto. Específicamente, el inversor *A* ofrece compartir con QPC la mitad de los beneficios o las pérdidas. El inversor *B* ofrece aceptar el 40% de las pérdidas a cambio del 30% de los beneficios. El inversor C ofrece pagar a QPC dos millones de dólares a cambio de la mitad de los beneficios, pero no compartiría las pérdidas. ¿Cuál de estas ofertas debe aceptar QPC, si es que debe aceptar alguna?

6-19. Considere la figura 6-6 de este capítulo. Suponga ahora que las alternativas son mutuamente excluyentes; es decir, sólo se puede escoger una.

a. Dibuje la frontera eficiente para esta situación.

b. Use las curvas de indiferencia de la figura 6-8 y los resultados de la figura 6-6 y determine cuál es la mejor opción.

6-20. Hay cuatro alternativas de inversión, así como dos criterios con los siguientes resultados (para ambos criterios, es mejor una cantidad mayor):

Alternativa	*Criterio 1*	*Criterio 2*
1	30	10
2	5	40
3	10	20
4	20	25

Las alternativas no son mutuamente excluyentes.

a. ¿Hay alternativas dominadas? ¿Cuáles son y por qué están dominadas?

b. Elabore un gráfico de las alternativas restantes y muestre la frontera eficiente.

c. Suponga ahora que la gerencia decide que el criterio 1 es dos veces más importante que el criterio 2, de manera que una unidad del criterio 1 es igual a dos unidades del criterio 2. Dibuje un conjunto de curvas de indiferencia en su diagrama e indique la solución óptima.

d. Ahora suponga que la gerencia decide que las alternativas son mutuamente excluyentes (sólo puede seleccionarse una). ¿Cuál es la opción óptima?

6-21. Una compañía de semiconductores tiene un producto nuevo, pero debe decidir cuándo introducirlo. La rentabilidad será mayor si se introduce de inmediato, pero la calidad del producto (la cual se mide en una escala de 1 a 10, donde 10 es lo mejor) será mayor si se pospone la introducción. Así mismo, cada uno de los criterios tiene resultados en riesgo, como se muestra en el diagrama de la siguiente página.

La utilidad que tiene la compañía para los beneficios que se mencionan es lineal [Í/(M) = *M*\\ sin embargo, lo que le preocupa a la compañía es el riesgo de que la calidad sea baja y la función de utilidad para la calidad es $U(q) = 100<7^{w}$, donde q = índice de calidad. La utilidad total de la compañía es la suma de las utilidades de los dos criterios.

a. ¿Hay una alternativa dominada?

b. Evalúe ambas alternativas. ¿Cuál es preferible?

Problemas más difíciles

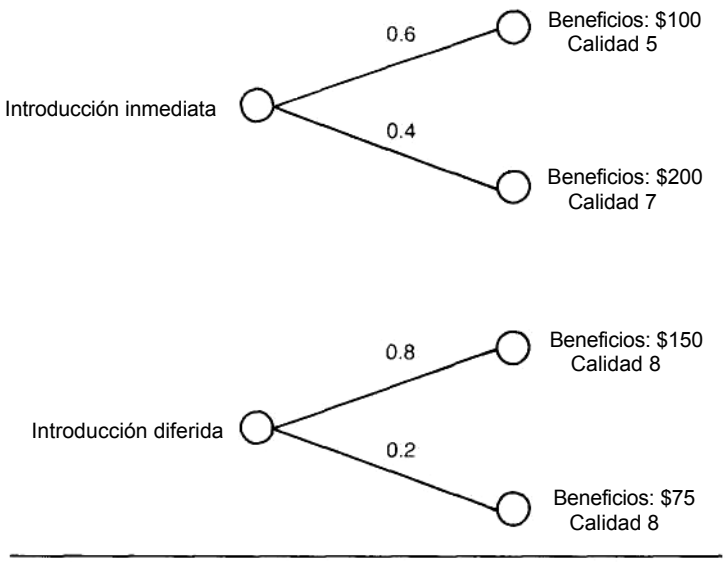
6-22. Remítase al problema 4-19. Suponga que la función de utilidad del dinero del problema de perforación es la misma que se determinó en el problema 6-15.

a. La compañía, ¿debe perforar o vender el contrato?

b. Suponga que, antes de que la compañía comience a perforar, otra empresa le ofrece comprar el contrato. ¿Cuál es el precio mínimo que debe aceptar la compañía?

c. Suponga que, antes de que comenzara la perforación, un grupo de inversores exter-

Para el problema 6-21



nos presentó la siguiente propuesta: El grupo pagaría 20 000 dólares a la compañía a cambio del 50% de los costos e ingresos relacionados con la perforación (es decir, los ingresos para la compañía serían 20 000 dólares más la mitad de los valores que se presentan en el problema 4-19). ¿Deben aceptar la propuesta? Remítase al problema

6-23. 4-35. Suponga que el concesionario del problema presenta los siguientes equivalentes ciertos para las apuestas que se indican en la tabla.

Apuesta	*Equivalente cierto determinado*
1. Probabilidad de 00 para -$20 000 y	$-5 000
2. Probabilidad de ½ para -$5000 y de 00	13 000
3. Probabilidad de ½ para -$5000 y de ½ para -$20 000	-16 000

a. Con base en estos valores, dibuje una fun ción de utilidad para el concesionario.

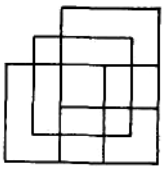
b. ¿Cuántos alimentos debe pedir el con cesionario para ser consistente con este conjunto de evaluaciones de la utilidad?

6-24. Remítase al problema 4-38. Suponga que Littie Electronics, después de estudiarlo con cuidado, determina su función de utilidad para los flujos de efectivo que se obtienen de la querella legal descrita en el problema. La función de utilidad *U(X)* se puede describir con la siguiente función:

$$U(X) = 1 - \frac{1}{X + 2}$$

donde *X* es el flujo de efectivo (en millones de dólares) que se obtiene de la acción legal. Desarrolle el árbol de decisión para el problema de decisión de Littie. Coloque los valores de utilidad en lugar de los flujos de efectivo al final del árbol. Analice el árbol con los valores de utilidad para determinar la decisión que debe tomar Littie.

CAPÍTULO 7



Distribución de probabilidad normal y valor de la información

En este capítulo se presenta un concepto importante de la probabilidad, llamado *distribución normal,* el cual se usará posteriormente para evaluar la información adicional de un problema de decisión.

Distribuciones de probabilidad

Las distribuciones de probabilidad pueden ser discretas o continuas. Una función discreta se denomina función de masa **de probabilidad** y una función continua de probabilidades se denomina **función de densidad de probabilidad.** En una función de masa de probabilidades (distribución discreta), la variable aleatoria puede tomar sólo valores seleccionados (por ejemplo, 0.1,0.2 o 0.3, pero no 0.11, 0.21 o 0.31).

Como ejemplo se podría indicar la proporción de familias que tienen X miembros. Una familia puede tener 4 miembros, pero no 4.2 miembros; por lo tanto, X debe ser entero. En ocasiones se clasifican los datos para que pueda usarse una distribución discreta de probabilidad en casos en los que se podría usar una distribución continua. Por ejemplo, es posible que la demanda de un producto sea cualquier cantidad, pero se puede clasificar la demanda del día como décimos de tonelada (es decir, 0.1, 0.2, etcétera).

La distribución binomial, que se describió en el capítulo 3, es otro ejemplo de una distribución discreta de probabilidad. La variable aleatoria, el número de éxitos, sólo puede tomar el valor cero y los valores de los números enteros positivos de uno a n (el número de ensayos).

Una función de densidad de **probabilidad continua** representa una distribución en la cual el valor de la variable aleatoria puede ser cualquier número dentro

de un intervalo de valores, digamos, entre cero e infinito. Por ejemplo, suponiendo una función de densidad de probabilidad de la estatura de los miembros de una población, habría un valor de la función de densidad de 1.57 metros, 1.572 metros, 1.5725 metros, etc., pero la estatura no puede ser negativa. La función de densidad tienen un valor para todos los valores posibles de la variable aleatoria dentro de un intervalo establecido. En las figuras 7-1 y 7-2 se presentan gráficos de los dos tipos de distribuciones.

Figura 7-1 Distribución de probabilidades discreta (función de masa de probabilidad o p.m.f)

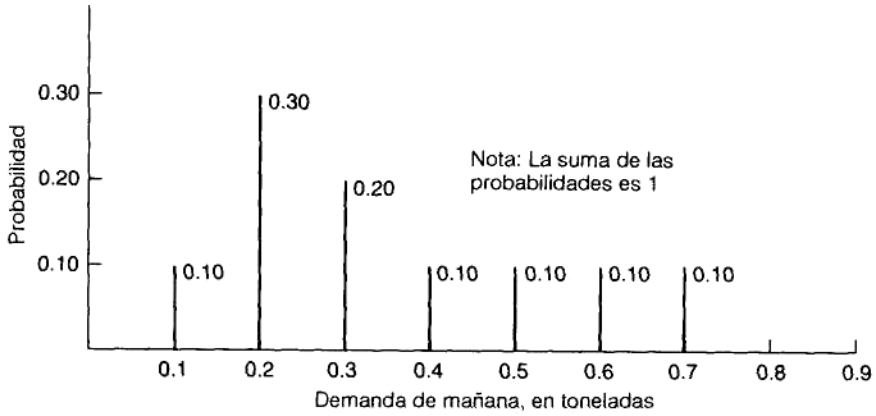
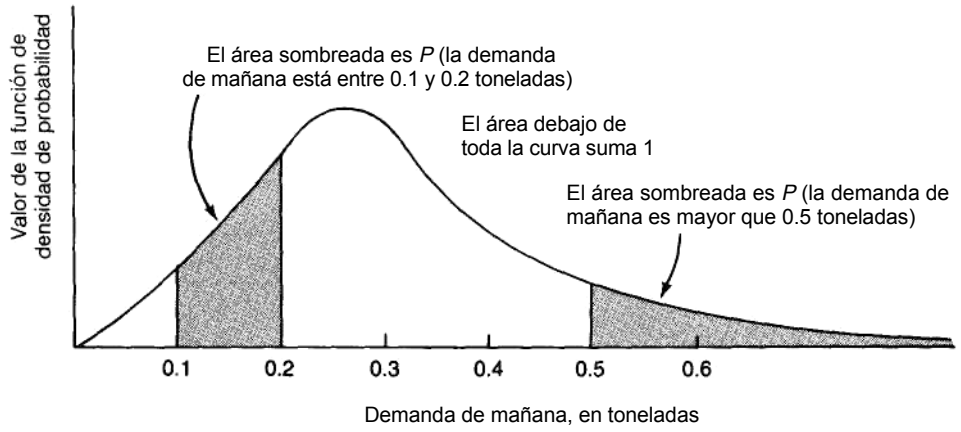


Figura 7-2 Distribución de probabilidad continua (función de densidad de probabilidades o p.d.f.)



En una distribución discreta, la altura de las líneas representa la probabilidad de ese valor de la variable aleatoria. Por ejemplo, 0.30 es la probabilidad de que mañana la demanda sea 0.2 toneladas, de acuerdo con la figura 7-1. En el caso de una variable aleatoria continua, la altura de la función de densidad de probabilidad *no* es la probabilidad del suceso; más bien, el *área bajo la curva* dentro de un intervalo del eje horizontal representa la probabilidad de que la variable tome un valor del intervalo. Por ejemplo, el área sombreada de la izquierda de la figura 7-2 representa la probabilidad de que la demanda de mañana esté en el *intervalo* entre 0.1 y 0.2 toneladas.

Funciones de masa acumulada

Las funciones de masa acumulada se relacionan con las funciones de masa de probabilidad. Una función de masa acumulada muestra la probabilidad acumulada. Por ejemplo, considere la variable aleatoria S con la función de masa de probabilidad discreta que se muestra en la tabla 7-1.

Nos interesa la probabilidad de que S sea igual a 2 [es decir, $P(S = 2) = 0.40$], pero también quisiéramos saber la probabilidad de que S sea igual o menor que 2 [o sea, $P(S < 2) = 0.60$]. La función que proporciona valores de este tipo se llama función de masa *acumulada*. En las tablas 7-2 y 7-3 se muestran la función de

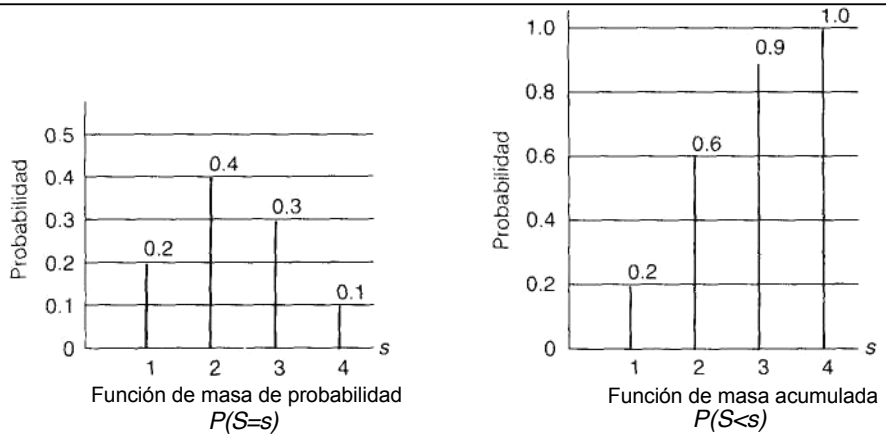
Tabla 7-1

s	$P(S = s)$
0	0.00
1	0.20
2	0.40
3	0.30
4	0.10
	1.00

Tabla 7-2

S	$P(S = s)$	$P(S \leq s)$
0	0.00	0.00
1	0.20	0.20
2	0.40	0.60
3	0.30	0.90
4	0.10	1.00

Figura 7-3 Ejemplos de funciones de masa de probabilidad y de masa acumulada



masa de probabilidad y la función de masa acumulada del tipo "menor o igual que" para el ejemplo de la tabla 7-1.

Si quisiéramos conocer la probabilidad de que *S* sea mayor que dos:

$$P(S > 2) = 1 - P(S \leq 2) = 1 - 0.60 = 0.40$$

Si se conoce la función de masa de probabilidades, se puede obtener la función de masa acumulada y las variaciones como $P(S \geq 2)$ o $P(2 \leq S \leq 4)$.

Funciones de distribución acumulada

Las funciones de distribución acumulada se relacionan con funciones continuas de densidad de probabilidad, de la misma forma que las funciones de masa acumulada se relacionan con las funciones discretas de masa de probabilidad.

Ilustraremos el concepto de la función de distribución acumulada con una distribución de probabilidad rectangular o uniforme (véase Fig. 7-4). Si *S* está entre *a* y $b(a \leq S \leq b)$, entonces el valor de la función de densidad de probabilidad es $1/(b - a)$ y cero en los demás casos. Al sumar el área bajo la función de densidad de probabilidad:

$$f(S) = \frac{1}{b - a}$$

en el intervalo de *a* a *S* para cada valor de *S*, se obtiene la función de distribución acumulada, *F(S)*. Se usa *f*(") para representar la función de densidad de probabilidad y *F*(•) para representar la función de distribución acumulada del tipo "menor o igual que" (véase Fig. 7-5).

Figura 7-4 Función de densidad de probabilidad $f(S) = \dfrac{1}{b-a}$, $a \le S \le b$; $f(S) = 0$ en los demás casos

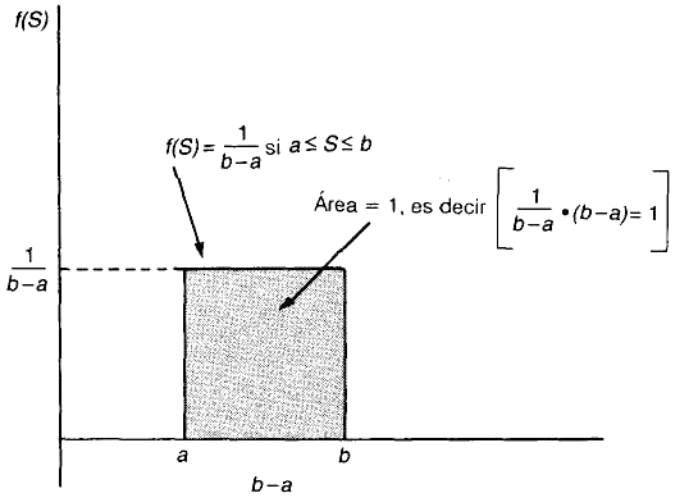


Figura 7-5 $F(S)$, función de distribución acumulada para $f(S) = \dfrac{1}{b-a}$

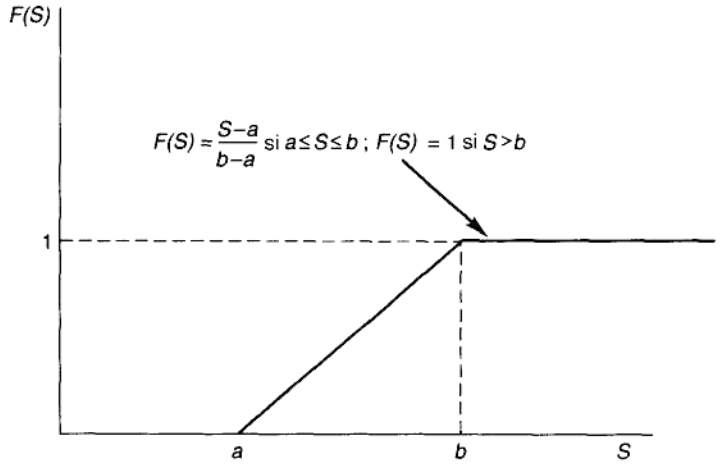
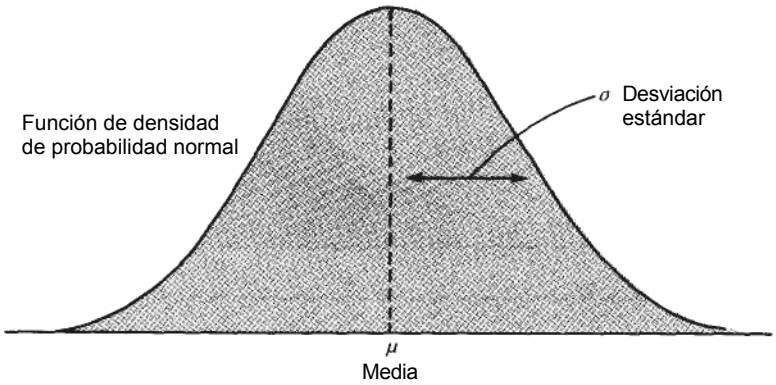


Figura 7-6



La distribución de probabilidad normal

La distribución normal, en ocasiones también conocida como **distribución de Gauss**, es una distribución muy importante, ya que es más fácil de manipular matemáticamente que las demás distribuciones y es una buena aproximación de otras distribuciones. En muchos casos la distribución normal es una aproximación razonable de una distribución de probabilidad a priori para ciertos fines de decisiones empresariales y, en los capítulos siguientes, se usará la distribución normal en muchas de las aplicaciones. A pesar de su aplicación general, no deberá suponerse que todo proceso se puede describir con una distribución normal.

La distribución normal tiene una función de densidad de probabilidad que es una curva suave, simétrica, continua, en forma de campana, como se muestra en la figura 7-6. El área bajo la curva, en cualquier intervalo del eje horizontal, representa la probabilidad de que la variable aleatoria, *X,* tome un valor dentro del intervalo. Como sucede con todas las funciones continuas de densidad de probabilidad, el área bajo la curva suma 1.

Una distribución normal se determina completamente por su media (representada con μ) y su desviación estándar *(a);* es decir, una vez que se conocen la media y la desviación estándar, se establecen la forma y la ubicación de la distribución. La curva alcanza su punto máximo en la media de la distribución, con la mitad del área a cada lado de la media. Si el valor de *a,* la desviación estándar, es mayor, la curva será más extendida.[1] Esta situación se muestra en la figura 7-7.

[1] La función de densidad de probabilidad normal con parámetros μ y σ es:

$$f_N(x) = \frac{1}{\sigma(2\pi)^{1/2}} e^{-(x-\mu)^2/2\sigma^2}, \quad -\infty < x < \infty$$

La función de distribución normal acumulada es:

$$F_N(x) = \int_{-\infty}^{x} f_N(y)dy$$

Figura 7-7

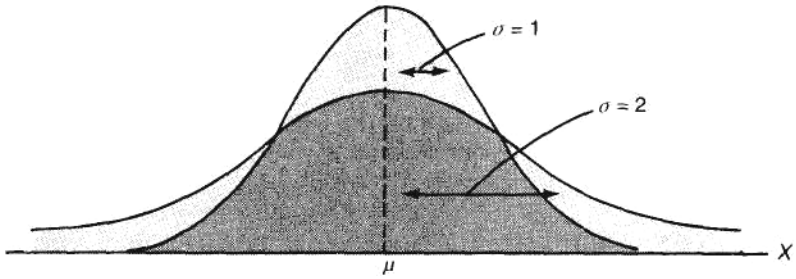
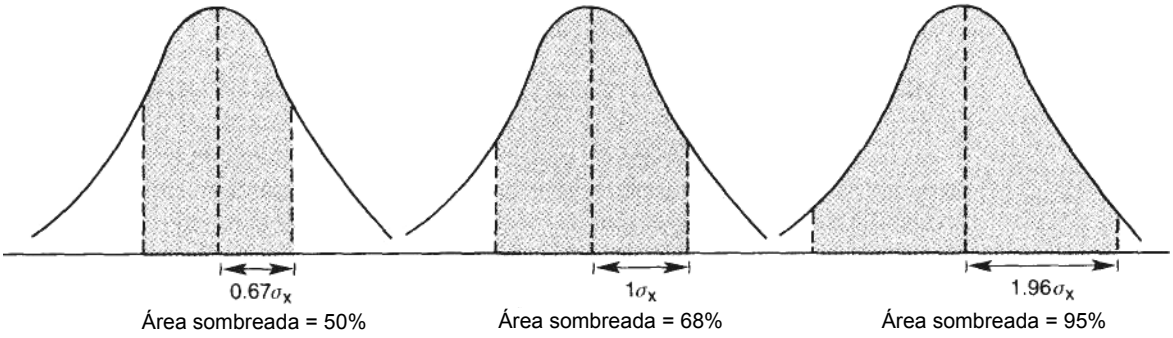


Figura 7-8



En todas las distribuciones normales, aproximadamente 0.50 del área está a ±0.67 unidades de desviación estándar de la media; un 0.68 del área está a ±1.0 unidades de desviación estándar y 0.95 del área está a ±1.96 unidades de desviación estándar (véase Fig. 7-8).

La función de probabilidad normal es continua (una función de densidad de probabilidad), por lo cual no puede leerse directamente de los gráficos. Hay que considerar la probabilidad de que el valor de la variable aleatoria esté dentro de un intervalo (véase Fig. 7-9).

En la figura 7-9:

$P(-2 < X < 0)$ = Área sombreada *A*
$P(X>2)$ = Área sombreada *B*
$P(0 < X < 2)$ = Área entre *A* y *B* también igual al área sombreada *A*, por la simetría de la curva normal)

Figura 7-9

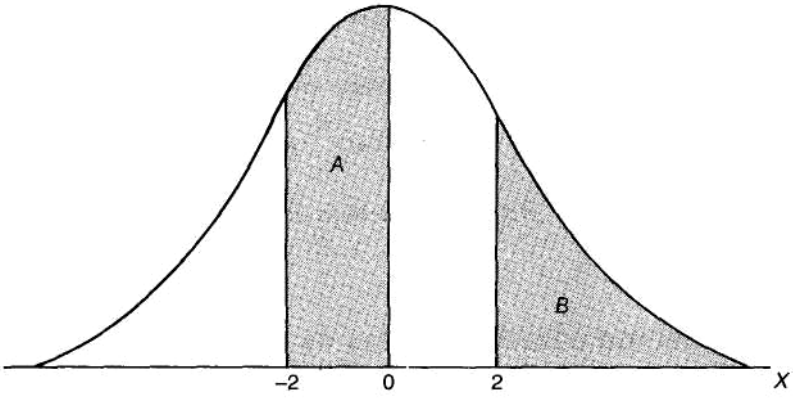
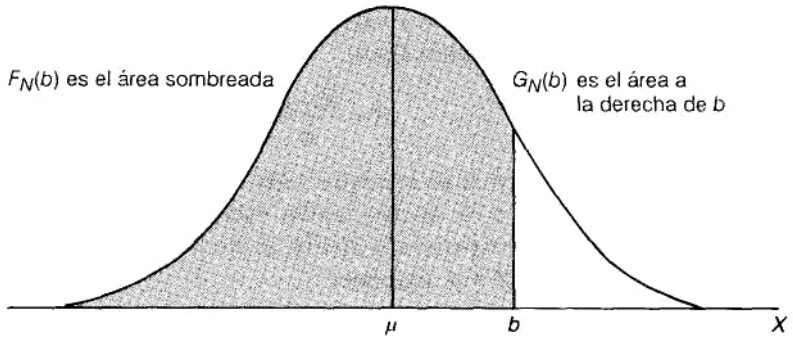


Figura 7-10



Colas a la izquierda y a la derecha

El símbolo F_N se usa para representar una función de distribución acumulada de una distribución de probabilidad normal. Es el área debajo de la cola *izquierda* de una función de densidad normal de probabilidad. En la figura 7-10, el área sombreada es la cola izquierda de una curva normal; es decir, $F_N(b)$ ' $F_N(b)$ es la probabilidad de que X sea menor o igual que b; o sea,

$$F_N(b) = P(X \leq b) \qquad \textbf{(7–1)}$$

Ahora se presenta un símbolo nuevo, G_N, que se define como el área debajo de la cola *derecha* de una función de densidad de probabilidad normal. En la figura 7-10, el área no sombreada es la cola derecha de una curva normal; es decir, $G_N(b)$.

$G_N(b)$ es la probabilidad de que X sea mayor que b; o sea:

$$G_N(b) = P(X > b)$$

En la figura 7-10 se puede ver que existe una relación entre $F_N(b)$ y $G_N(b)$:[2]

$$G_N(b) = 1 - F_N(b) \quad \textbf{(7-2)}$$

ya que, por definición, el área total debajo de la función de densidad de probabilidades suma 1.

La variable normal estandarizada y tablas de probabilidad normal

Una distribución normal con $\mu = 0$ (media de cero) y $\sigma = 1$ (desviación estándar de 1) se conoce como **distribución normal estándar.** Si la distribución normal tiene una media distinta de cero o desviación estándar distinta de 1, es posible estandarizar la distribución. La posibilidad de estandarizar distribuciones normales es una de las características útiles de la distribución y permite buscar las probabilidades normales en una tabla relativamente pequeña.

Para estandarizar una variable aleatoria normal, se define una nueva **variable normal estandarizada,** Z, como sigue:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} \quad \textbf{(7-3)}$$

donde X es la variable normal no estandarizada que nos interesa, μ es la media de esta variable aleatoria y σ es su desviación estándar. En la expresión anterior, Z es la distancia de X con respecto a la media, μ, medida en unidades de desviación estándar. Por ejemplo, si Z = 4, entonces:

$$4 = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

de manera que:

$$4\sigma = X - \mu$$
$$X = \mu + 4\sigma$$

De esta forma, Z = 4 corresponde a un valor de X que es cuatro veces la desviación estándar mayor que la media. Como resultado de esta operación, Z es

---

[2] Las relaciones matemáticas básicas pueden representarse como:

$$F_N(b) = \int_{-\infty}^{b} f_N(X)dX$$

y

$$G_N(b) = \int_{b}^{\infty} f_N(X)dX$$

una variable aleatoria normalmente distribuida, estandarizada, con media 0 y desviación estándar 1. En las tablas se buscan las probabilidades de Z, y como todas las Z tienen media 0 y desviación estándar 1, sólo se requiere una tabla de probabilidad. La tabla A (del apéndice al final del libro) es una tabla acumulada de probabilidad normal. Hay que señalar que en la ecuación 7-3 se transforma un valor de una distribución normal a un valor de una distribución normal estandarizada. El valor que se transforma debe provenir de una distribución normal.

Suponga que nos interesa una variable aleatoria normalmente distribuida, X, con media $\mu = 8$ y desviación estándar $\sigma = 3$, y deseamos encontrar las siguientes probabilidades:

1. $P(X \leq 10)$.
2. $P(X > 10)$.
3. $P(10 < X < 15)$.

Ejemplo 1 Lo primero que debe hacerse es estandarizar la variable aleatoria X para el valor X - 10:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma} = \frac{10 - 8}{3} = \frac{2}{3} = 0.67$$

Después se busca la probabilidad $P(Z \leq 0.67)$ en la tabla A y se encuentra que es igual a 0.7486. La probabilidad de que X sea menor que 10 es 0.7486. Observe que $P(X \leq 10)$ es igual que $P(X < 10)$, ya que la probabilidad de que sea exactamente 10 se define como cero si la distribución de probabilidad es continua.

Ejemplo 2 Del ejemplo 1, se sabe que para $X = 19$, Z = 0.67 y que:

$$P(X \leq 10) = P(Z \leq 0.67) = 0.7486$$

Entonces:

$$P(X > 10) = 1 - P(X \leq 10) = 0.2514$$

Si la probabilidad de que X sea menor que 10 es 0.75, la probabilidad de que X sea mayor que 10 es 0.25. En términos de áreas, si el área a la izquierda de 10 es 0.75 y el área total bajo la función de densidad es 1, entonces el área a la derecha de 10 es (1 - 0.75) o 0.25.

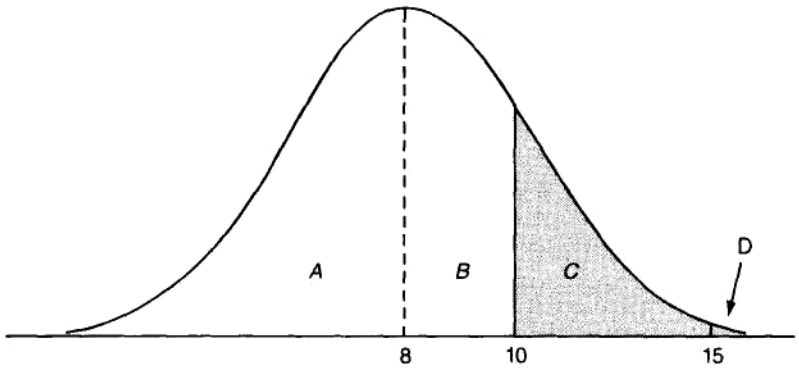
Ejemplo 3 Queremos determinar el área C de la figura 7-11. El área C + D es $P(X > 10)$ y el área D es $P(X > 15)$. El primer paso es saber que $P(X > 10) = 0.2514$, del ejemplo 2. Para calcular el área D, *o* $P(X > 15)$, lo primero que hay que hacer es calcular Z para un valor de $X = 15$.

$$Z = \frac{15 - 8}{3} = \frac{7}{3} = 2.33$$

En la tabla A (del apéndice al final del libro) se encuentra:

$$P(Z \leq 2.33) = 0.99010$$

Figura 7-11



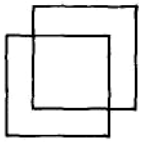
Ahora se puede calcular el área *D:*

$$P(X > 15) = P(Z > 2.33) = 1 - P(Z \leq 2.33)$$
$$= 1 - 0.99010 = 0.00990$$

La probabilidad de que *X* sea mayor que 10 y menor que 15 (o, lo que es lo mismo, que Z sea mayor que 0.67 y menor que 2.33) es el área *C* + *D* menos el área *D:*

$$P(10 < X \leq 15) = P(X > 10) - P(X > 15)$$
$$= P\{Z > 0.67) - P(Z > 2.33) =$$
$$0.2514\text{-}0.0099 = 0.2415$$

RESUMEN



Las distribuciones discretas de probabilidad representan variables aleatorias que pueden tomar sólo valores específicos. La variable aleatoria de una distribución continua puede asumir cualquier valor dentro de un intervalo. En el caso de una distribución continua de probabilidad, la probabilidad se determina con el área debajo de la función de densidad.

La distribución normal es una distribución simétrica en forma de campana que puede caracterizarse por su media y su desviación estándar. Las probabilidades normales se obtienen con una variable normal estandarizada Z y la tabla A del apéndice.

Probabilidades a priori normales y el valor de la información

En las secciones anteriores se describieron las características generales de la distribución de probabilidad normal. Ahora veremos cómo se usa la distribución normal como una distribución de probabilidad a priori. El análisis que se presenta seguirá de cerca la explicación del valor esperado que se efectuó en el capítulo 4, aunque ahora se usarán probabilidades a priori continuas, en lugar de discretas.

Suponga que una compañía tiene la oportunidad de comprar una máquina por 17 200 dólares. La máquina, si tiene éxito, ahorrará horas de trabajo en un proceso de producción que actualmente requiere mucha mano de obra. La vida física de la máquina es un año. Suponga que el costo incremental de una hora de trabajo para la compañía es ocho dólares; entonces, si la máquina ahorrara más de 2150 horas de trabajo ($17 200/$8 = 2150), la compañía obtendrá un beneficio del uso de la máquina.

Supongamos que el ingeniero de producción opina que en promedio se ahorrarán 2300 horas y que hay un 50% de probabilidad de que las horas reales que se ahorren sean menos de 2100 o más de 2500 horas en el año.

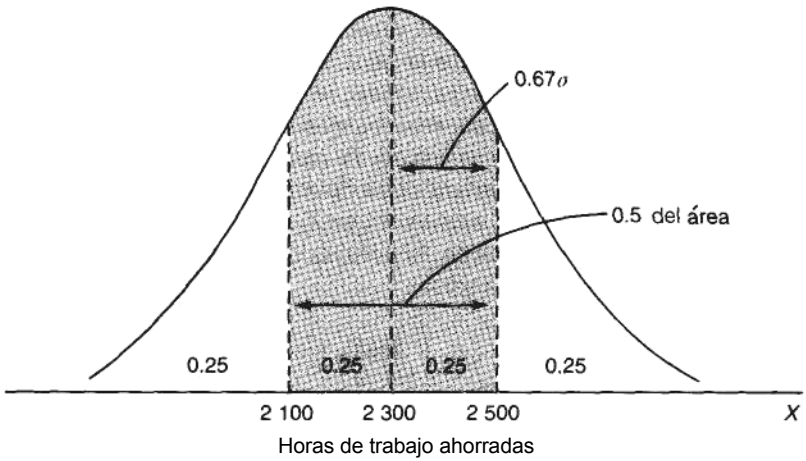
Con esta descripción de la opinión del ingeniero es posible suponer que una distribución normal específica se ajustará a las expectativas previas. La media de la distribución es 2300 y, si es posible determinar la desviación normal, se habrá descrito la distribución normal de probabilidad a priori.

En la distribución normal, más o menos la mitad del área (por lo tanto, la mitad de la probabilidad) se encuentra a ±0.67 unidades de desviación estándar de la media. La figura 7-12 aproxima el ajuste de una distribución normal a las estimaciones del ingeniero. El ingeniero ha estimado una media de 2300 horas y ha considerado que el valor real estará entre 2100 y 2500 horas, con probabilidad de 0.50. Entonces, la mitad del área debe estar fuera de estos límites, 0.25 del lado izquierdo y 0.25 del lado derecho. La figura 7-12 muestra que si se desplaza en la dirección positiva de 200 unidades, se moverá 0.67 *a*. Esta relación se puede usar para determinar la desviación estándar:

$$0.67\sigma = 200 \text{ horas}$$

$$\sigma = \frac{200}{0.67} = 300 \text{ horas}$$

Figura 7-12



La distribución normal a priori tiene una desviación estándar de aproximadamente 300 horas.

Observe también que la distribución normal asigna probabilidades a los ahorros tanto grandes como pequeños en el número de horas. Esto concuerda con la opinión del ingeniero de que las probabilidades se distribuyen simétricamente con respecto a la media.

En resumen, se ha tomado la descripción narrativa del ingeniero y se ha convertido en una distribución a priori normal con media μ = 2300 horas y desviación estándar σ = 300 horas. También sabemos que para lograr el equilibrio, la máquina debe ahorrar por lo menos 2150 horas y que por cada hora ahorrada por encima de las 2150, el beneficio cambia a razón de ocho dólares por hora.

Los beneficios se pueden representar como una función lineal de las horas ahorradas, con beneficio de cero en 2150 Loras. Entonces:

$$\text{Beneficios} = \pi = -17\,200 + 8X$$

donde X es el número real de horas ahorradas. Como se trata de una función lineal, el beneficio esperado se puede determinar reemplazando X por su valor esperado.[3]

$$\begin{aligned} E(\pi) &= -17\,200 + 8\mu \\ &= -17\,200 + 8(2300) = 1200 \end{aligned}$$

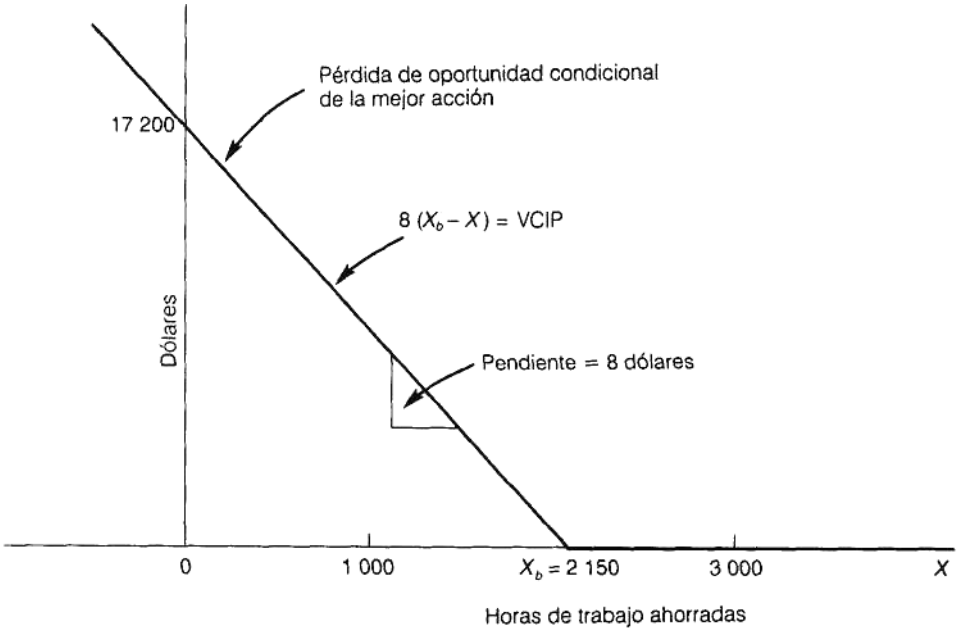
Cuando la estimación de la media de los ahorros esté por encima del punto de equilibrio, los beneficios esperados son positivos y la máquina debe comprarse (suponga que estamos dispuestos a comprar la máquina sobre la base del equilibrio; es decir, en este capítulo se omitirán los aspectos relacionados con la utilidad y el rendimiento de intereses requeridos para las inversiones aceptables). Aunque la distribución de probabilidad a priori del ingeniero es bastante estrecha (la desviación estándar, σ = 300, es relativamente pequeña en comparación con el tamaño de la media, por lo que el ingeniero está bastante seguro de la estimación de la media), quizás esté dispuesto a obtener más información antes de actuar. Por lo tanto, es de interés el valor esperado de la información perfecta (VEIP).

Definamos primero la pérdida de oportunidad condicional. La acción óptima, con base en el valor esperado, es comprar la máquina. Suponga que se compra la máquina y que los ahorros reales son menores de 2150 horas. En este caso, ¿cuánto se pierde? Si X_b representa la cantidad de equilibrio de 2150 horas, la pérdida condicional aumentará ocho dólares por cada hora que falte para llegar al punto de equilibrio. Si X es mayor que X_b, la pérdida de oportunidad es cero si se compra el equipo. Por lo tanto, la pérdida de oportunidad condicional (suponiendo que se compra el equipo) sería:

$$\begin{cases} \$8(X_b - X) & \text{si } X \le X_b \\ 0 & \text{si } X > X_b \end{cases}$$

[3] Véase Cap. 5.

Figura 7-13



donde X = horas ahorradas reales y X_b = 2150, las horas necesarias para el equilibrio. La pérdida de oportunidad condicional de la compra del equipo se presenta en el gráfico de la figura 7-13.

Recuerde que en el capítulo 4 se estableció que el valor esperado de la información perfecta es una medida del valor de un pronóstico perfecto o de la información perfecta; es el valor esperado del valor condicional de la información perfecta.

Hemos decidido que la mejor acción, con base en la información actual y la media de los ahorros, es comprar la máquina. Si un mecanismo de pronóstico perfecto nos dijera que el ahorro real en el número de horas sería 2852, o cualquier otro número mayor que 2150, hubiéramos elegido la misma acción que se eligió sin esta información y el pronóstico no tendría valor. Sin embargo, si el pronóstico nos dijera que los ahorros reales serían de 2029 horas o cualquier cantidad menor que 2150 horas, entonces no se compraría la máquina y se evitarían las pérdidas. Por lo tanto, el pronóstico *sólo* tiene valor si la decisión cambia al obtener la nueva información. El cálculo del **valor condicional de la información perfecta** (VCIP) (suponiendo que se aceptara el equipo si no se tuviera la información) podría resumirse como sigue:

$$\text{VCIP} = \begin{cases} \$8(X_b - X) & \text{si } X \le X_b \\ 0 & \text{si } X > X_b \end{cases}$$

El gráfico de esta relación funcional se presenta en la figura 7-13, la cual muestra que la información perfecta no vale nada si el pronóstico del ahorro en el número de horas es mayor que X_b y que aumenta linealmente a la izquierda del punto de equilibrio (las horas ahorradas son menos de 2150 y se reducen). El VCIP es idéntico a la pérdida de oportunidad condicional de la mejor acción.

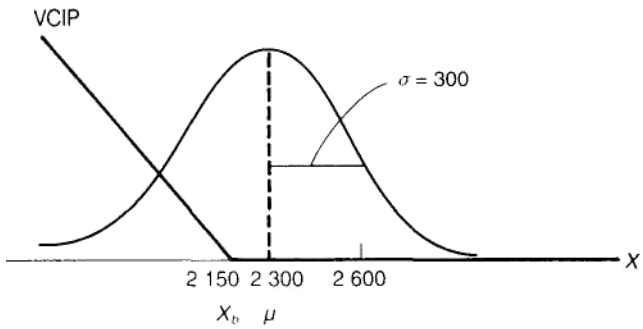
El **valor esperado de la información perfecta** (VEIP) se calcula ponderando el valor condicional de la información perfecta (VCIP) por la distribución de probabilidades y es igual a la pérdida de oportunidad esperada de la mejor acción.

La figura 7-14 muestra la distribución normal de las probabilidades a priori montada sobre el gráfico del valor condicional. El VEIP es la suma del producto de la curva normal y la línea VCIP a la izquierda del punto de equilibrio. Esto sucede porque VCIP = 0 para los valores de X mayores que X_b (2150 horas).

También se puede observar que al aumentar la desviación estándar, σ, es mayor el VEIP. Esto se debe a que con σ mayor se extiende más la curva normal y es mayor el peso en probabilidad que se da a las pérdidas mayores (es decir, los valores más altos de la línea VCIP). Si el ingeniero estuviera seguro de que el valor de la media fuera 2300, el valor esperado de la información perfecta sería muy pequeño o inexistente. La figura 7-15 muestra una situación en la cual el valor déla información es muy pequeño; este caso se presentaría para σ igual a 50 horas.

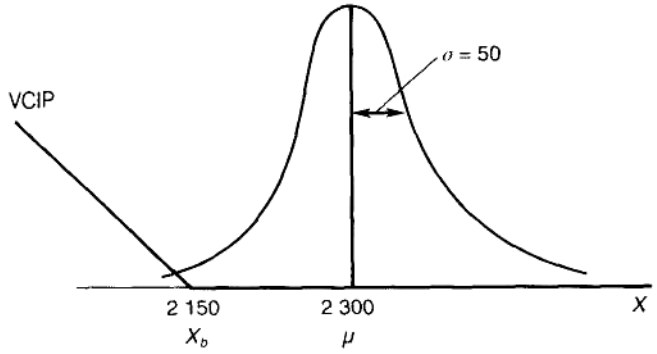
La razón por la cual la información perfecta casi no tiene valor en esta situación es que la σ de la distribución a priori es muy pequeña en comparación con la distancia de la media al punto de equilibrio. Observe que cuanto más cerca esté X_b de μ (dada una σ determinada), mayor será el VEIP. Todo ello se muestra gráficamente en la figura 7-16, donde primero se supone que X_b es el punto de equilibrio y luego que X_c es el punto de equilibrio. Si μ, la media a priori, está cerca de X_b, es más probable que la información perfecta cambie la decisión acerca de la mejor decisión, que en el caso en μ que está relativamente lejos de X_b. Recuerde que para que la información perfecta tenga valor es necesario que exista la posibilidad de que la acción óptima cambie al conocerse la información nueva.

Figura 7-14



Horas de trabajo ahorradas

Figura 7-15



En resumen, suponiendo una distribución normal a priori, el VEIP depende de los tres factores siguientes:

1. La desviación estándar, σ, que es una medida de la "incertidumbre" con respecto a la media a priori de la persona que realiza la estimación.
2. La distancia entre la media a priori y el punto de equilibrio $(X_b - \mu)$. Esta distancia es importante porque ayuda a determinar la posibilidad de que el decisor cambie la decisión al obtener nuevas pruebas.
3. El valor absoluto de la pendiente de la línea VCIP, C. La pendiente de la línea es una medida de la rapidez con la cual aumenta la pérdida cuando el número de horas ahorradas disminuye por debajo del punto de equilibrio.

Al llegar a este punto se emplea una de las características más útiles de la distribución normal. El cálculo del VEIP se puede reducir a una fórmula bastante sencilla cuyos componentes son los tres elementos que se mencionaron antes. La fórmula es:[4]

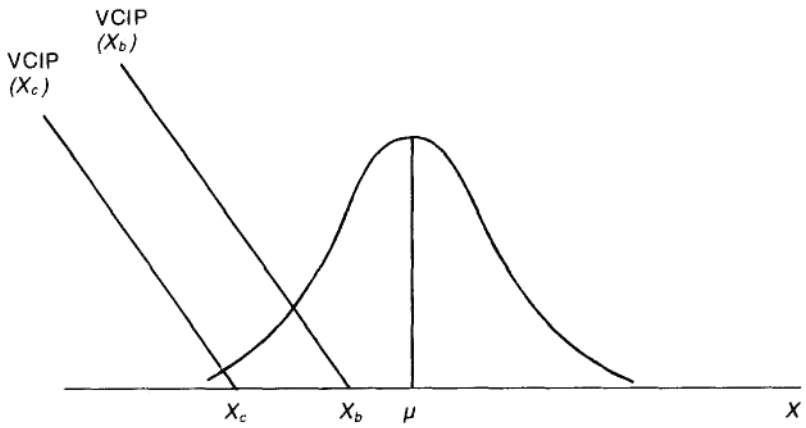
$$\text{VEIP} = C \cdot \sigma \cdot N(D) \qquad (7\text{–}4)$$

C es el valor absoluto de la pendiente de la línea VCIP o la constante de pérdida; σ es la desviación estándar de la distribución normal a priori; la D de $N(D)$ se define como sigue:

$$D = \frac{|X_b - \mu|}{\sigma} \qquad (7\text{–}5)$$

[4] Véase R. Schlaifer, *Probabiltry and Statistics for Business Decisions,* Nueva York, McGraw-Hill, 1959, págs. 452-455.

Figura 7-16



De esta manera, *D* es una medida de la distancia desde la media hasta el punto de equilibrio, en unidades de desviación estándar. Las barras verticales en la fórmula de *D* deben leerse como "valor absoluto". La cantidad *N(D)* se puede obtener de la tabla B (en el apéndice al final del libro). Es la **función de pérdida** para la curva normal estandarizada, evaluada para la medida de distancia *D*.

Hay que señalar que al aumentar el valor de *D* disminuye el valor de *N(D) y,* si todos los demás elementos son iguales, es menor el VEIP.[5] La reducción en el valor de *N(D)* es el resultado del aumento en la distancia $(X_b - \mu)$ y, por lo tanto, es menor la posibilidad de que la información perfecta cambie la decisión óptima. El VEIP se calcula de la siguiente manera para el ejemplo de este capítulo:

$$C = \$8$$
$$\sigma = 300$$
$$D = \frac{|2\,150 - 2\,300|}{300} = \frac{|-150|}{300} = \frac{1}{2} = 0.50$$
$$N(D) = N(0.50) = 0.1978, \text{ de la tabla B}$$
$$\text{VEIP} = C \cdot \sigma \cdot N(D)$$
$$\text{VEIP} = \$8 \cdot 300 \cdot 0.1978 = \$475$$

El lector recordará los problemas que se mencionaron en el capítulo 4 acerca de la dificultad para calcular el VEIP en el caso discreto. Al usar la distribución normal se simplifican considerablemente los cálculos en la mayoría de las aplica-

[5] *N(D)* se define como sigue:

$$N(D) = \int_{-\infty}^{-D} (-D - X)f^*(X)dX = \int_{D}^{\infty} (X - D)f^*(X)dX$$

donde/" (X) es la función de densidad normal estandarizada.

ciones empresariales. En el ejemplo anterior se calculó el valor esperado de la información perfecta, 475 dólares (lo cual también es la pérdida de oportunidad de la mejor acción) y el beneficio esperado de la mejor acción, 1200 dólares. La suma de estos dos valores, 1675 dólares, puede definirse como el **beneficio esperado en condiciones de certidumbre.**

Si dispusiéramos de un pronóstico perfecto, estaríamos dispuestos a pagar hasta 475 dólares para usarlo. No es probable que pueda disponerse de un pronóstico *perfecto,* pero en algunos casos se podrá obtener ayuda de información imperfecta. En el capítulo que sigue se presentan los problemas de la determinación del tamaño óptimo de muestras y la modificación de la distribución a priori normal a la luz de la información adicional.

RESUMEN

Cuando (a) la incertidumbre con respecto a una variable desconocida se puede representar con una distribución normal, *(b)* la decisión implica seleccionar una de dos alternativas, y (c) los beneficios o las pérdidas se pueden expresar como una función lineal de la variable desconocida, entonces el valor esperado de la información perfecta se puede determinar fácilmente con la ecuación 7-4 y la tabla B del apéndice.

Bibliografía

Schlaifer, R., *Probability and Statistics for Business Decisions,* Nueva York, McGraw-Hill, 1959.

Winkler, R. L., *Introduction to Business Inference and Decisión,* Nueva York, Holt, Rinehart & Winston, 1972.

Véase también la bibliografía de los capítulos 3, 4 y 8.

Problemas con respuestas

7-1. Suponga una distribución normal con media de 12 y desviación estándar de 4. Calcule lo siguiente:
a. $P(X \geq 15)$.
b. $P(X < 10)$.
c. $P(IO < X \leq 15)$.
d. $P(X > 17)$.
e. $P(15 < X \leq 17)$.

7-2. Si existe una variable X normalmente distribuida con media 15 y desviación estándar 3, determine el valor de χ en cada uno de los casos siguientes:
a. $P\{x \leq X) = 0.8413$
b. $P(X > x)$ - 0.2946.
c. $P(X > x)$ - 0.02275.

7-3. En los casos siguientes se considera una distribución normal como buena distribución de probabilidad a priori. Determine para cada uno el valor esperado de la información perfecta (VEIP).
a. La media es 100 unidades; la desviación estándar es 20 unidades; C, la constante de pérdidas, es 2000 dólares por unidad; el punto de equilibrio es 80 unidades.
b. La media es 100 unidades; la desviación estándar es 30 unidades; C, la constante de pérdidas, es 20 000 dólares por unidad; el punto de equilibrio es 80 unidades.

7-4. Se sabe que las ventas diarias de un producto tienen una distribución normal de 20 unida-

des por día con desviación estándar de seis unidades diarias.

a. ¿Cuál es la probabilidad de vender menos de 16 unidades en un día cualquiera?

b. ¿Cuál es la probabilidad de vender entre 15 y 25 unidades en un día?

c. ¿Cuántas unidades tendrían que estar disponibles al comenzar el día para que la probabilidad de que se agoten sea menor del 10%?

7-5. La compañía ABC considera la venta de un producto nuevo. Los costos fijos relacionados con el proyecto son 1750 dólares. El producto se venderá a cuatro dólares por unidad y los costos variables son 1.50 dólares. Se espera la venta de mil unidades, pero la demanda tiene una distribución normal de probabilidad con σ igual a 150.

a. ¿Cuántas unidades hay que vender para lograr el equilibrio?

b. ¿Cuál es el beneficio esperado si se pone a la venta el producto?

c. ¿Cuál es el valor esperado de la información perfecta si se pone a la venta el producto?

Problemas

7-6. Escriba las funciones de probabilidad requeridas para las probabilidades de ventas que se indican a continuación:

Ventas (s) (en	*Probabilidad*
1	0.10
2	0.15
3	0.20
4	0.30
5	0.20
10	0.03
15	0.02
	1.00

Funciones de probabilidad requeridas:

$$P(S > s)$$
$$P(S > s)$$
$$P(S < s)$$
$$P(S < s)$$

7-7. Encuentre las siguientes probabilidades para una variable aleatoria distribuida normalmente, *X*. *a*. Media de 0, desviación estándar de 1:

$$P(X > 0.8)$$
$$P(X \leq 0.8)$$
$$P\{X \geq -0.8)$$
$$P(-0.8 \leq X \leq 1.2)$$

b. Media de 6, desviación estándar de 2:

$$P(X > 8)$$
$$P(X \leq 8)$$
$$P(X \geq -8)$$
$$P(-8 \leq X \leq 12)$$

c. Media de 6, desviación estándar de 1:

$$P(X > 8)$$
$$P(X \leq 8)$$
$$P(X \geq 4)$$
$$P(4 \leq X \leq 12)$$

7-8. Encuentre el valor de las siguientes variables aleatorias normalmente distribuidas para las condiciones que se indican.

a. *X* es normal; la media es 0, la desviación estándar es 1.

$$P(X > x) = 0.02068$$

¿Cuánto es *x?*

b. *X* es normal; la media es 8; la desviación estándar es 3.

$$P(Z > z) = 0.1587$$

¿Cuánto es $\chi I Z$ y ζ son los valores estandarizados de X y *x*.

c. *X* es normal; la media es 8 y la desviación estándar es 3.

$$P(Z \leq z) = 0.7224$$

¿Cuánto es χ?

d. *X* es normal, la media es 10 y la desviación estándar es 2.

$$P(Z > z) = 0.2327$$

¿Cuánto es *x?*

7-9. Se sabe que la demanda de un producto se distribuye normalmente con media de 240 unidades por semana y desviación estándar de 40 unidades. ¿Cuántas unidades debe almacenar un minorista para asegurar que la posibilidad de agotar las existencias en una semana sea del 5% o menos? Las

7-10. calificaciones de un examen semestral se distribuyeron normalmente con media de 72 y desviación estándar de 10. El estudiante Wright obtuvo una calificación que estaba dentro del 10% más alto.

a. ¿Cuál es la calificación mínima que pudo recibir Wright?

b. El examen final también tuvo distribución normal, pero la media fue de 150 y la desviación estándar de 15. ¿Cuál es la calificación mínima que debió obtener Wright para mantener su mismo nivel (es decir, para estar en el 10% superior)?

7-11. Un inversor quiere invertir en uno de dos proyectos. En ambos proyectos el rendimiento es incierto y la distribución de probabilidad de los rendimientos se puede expresar como una distribución normal para cada caso. El proyecto A tiene un rendimiento medio de 240 000 dólares con desviación estándar de 20 000 dólares; el proyecto B tiene rendimiento medio de 250 000 dólares con desviación estándar de 40 000.

a. Considere un rendimiento de 280 000 dólares. ¿Qué proyecto tiene mayor posibilidad de generar esta cantidad o más?

b. Considere un rendimiento de 220 000 dólares. ¿Qué proyecto tiene mayor posibilidad de generar esta cantidad o más?

7-12. Un fabricante quiere efectuar una modificación en un producto, para lo cual requiere una inversión de 100 000 dólares. El producto genera beneficios increméntales de cinco dólares por unidad sobre la base del valor actual. El aumento en ventas que se obtendrá de la modificación del producto proviene de la atracción del producto para 5000 nuevas tiendas minoristas; si no se lleva a cabo la modificación, estas tiendas no manejarán el producto. El gerente de ventas cree que la media de las ventas en cada tienda nueva será de unas seis unidades y que hay un 50% de probabilidad de que la media de las ventas sea menos de cinco unidades o más de siete.

a. Ajuste una distribución normal a la situación anterior.

b. Calcule el beneficio esperado de la mejor acción. ¿Debe realizarse la inversión?

c. Calcule el **VEIP.**

7-13. Suponga, en la situación del problema 7-12, que el gerente de ventas cree que la media de las ventas por tienda será seis unidades pero que hay un 50% de probabilidad de que la media real sea menos de cuatro unidades o más de ocho. Calcule el VEIP y explique por qué es mayor que el del problema 7-12. En

7-14. cada una de las situaciones siguientes se considera que una distribución normal es una buena distribución de las probabilidad a priori. Sin embargo, en cada caso se suponen diferentes características de la distribución.

a. Calcule el VEIP.

b. Explique la diferencia entre el VEIP de cada situación y el de la situación (1).

(1) Media: 10 unidades.
Valor de equilibrio: 7 unidades.
Desviación estándar: 2 unidades. *C*, la constante de pérdidas: $5000 por unidad.

(2) Media: 10 unidades.
Valor de equilibrio: 7 unidades.
Desviación estándar: 5 unidades. C, la constante de pérdidas: $5000 por unidad.

(3) Media: 10 unidades.
Valor de equilibrio: 9 unidades.
Desviación estándar: 2 unidades. C, la constante de pérdidas: $5000 por unidad.

(4) Media: 10 unidades.
Valor de equilibrio: 7 unidades.
Desviación estándar: 2 unidades.
C, la constante de pérdidas: $10 000 por unidad.

7-15. Un fabricante considera una inversión de capital necesaria para ingresar en un nuevo segmento del mercado. La inversión que requiere es de 100 000 dólares y el fabricante cree que el valor actual de la media del flujo de efectivo es 150 000 dólares. Sin embargo, también opina que hay un 50% de probabilidad de que el valor actual real sea menos de

80 000 dólares o más de 220 000 dólares. La cifras de 150 000, 80 000 y 220 000 dólares son antes de restar la inversión de 100 000 dólares.

a. ¿Debe efectuarse la inversión?
b. Calcule el VEIP utilizando una distribu ción normal a priori.

7-16. La compañía Bamonite estudia la posibilidad de alquilar una "máquina de escribir inteligente", de la cual se espera que reduzca en un 30% el tiempo de trabajo de la secretaria, para que pueda dedicarlo a otras tareas. La máquina de escribir se alquila por 2000 dólares anuales. La secretaria trabaja 2000 horas al año y se le paga a seis dólares la hora. El gerente estima que hay un 50% de probabilidad de que el ahorro real en el tiempo de la secretaria esté entre el 20 y el 40%.

a. ¿Debe alquilar la máquina de escribir?
b. ¿Cuál es el VEIP?
c. Suponga que el gerente pudiera invertir 10 horas de su tiempo (valorado en 20 dóla res la hora) para realizar un análisis deta llado y determinar exactamente cuál sería el ahorro en el tiempo de la secretaria. En este caso, ¿qué debe hacer el gerente?, ¿por qué?

7-17. La compañía ABC vende un producto a tres dólares la unidad. Los costos increméntales relacionados con el producto son 50 000 dólares y los costos variables son dos dólares por unidad. Hay exceso de capacidad y se pueden producir unidades adicionales sin costos fijos adicionales ni cambios en los costos marginales.

El programa que se muestra a continuación se ha preparado para analizar un cambio posible en el precio.

a. Calcule el beneficio esperado para cada precio.
b. Calcule el número de unidades de equili brio para cada precio.

	Información de:		
	Precio actual	*Precio después de /«*	*Precio después del : aumento*
Precio	$3	$2.50	$4
Ventas esperadas (miles de dólares)	100	250	60
Desviación estándar de la distribución de ventas	20	75	35

c. Calcule la pérdida de oportunidad esperada de cada precio.

7-18. Un constructor evalúa la posibilidad de concursar para obtener el contrato de construcción de una carretera estatal. Ya decidió que si concursa, lo hará con un precio de 8.4 millones de dólares. Sin embargo, para que el trabajo valga la pena, necesitaría beneficios de por lo menos 0.4 millones de dólares; por lo tanto, no concursaría si los costos estimados fueran superiores a 8 millones de dólares. El constructor ha estimado, con base en algunos cálculos preliminares, que puede construir la carretera con 7.8 millones de dólares. Pero, sabe que con frecuencia hay errores en estos cálculos preliminares. Al estudiar los trabajos anteriores, descubrió que el promedio de las estimaciones preliminares se aproximaba al promedio del costo real. Así mismo, aproximadamente dos terceras partes de las estimaciones preliminares estaban dentro del 10% del costo real. Suponiendo que el constructor está dispuesto a basar la decisión en el valor monetario esperado, ¿qué debe decidir? ¿Cuál es el VEIP?

Problemas más difíciles

7-19. Una empresa de ventas por correo pretende incluir anuncios a color en su catálogo, el cual se envía a 100 000 clientes. Las compras actuales por cada cliente que recibe los catálogos en blanco y negro son de seis dólares. La gerencia opina que con el catálogo a color es muy probable que las ventas aumenten a siete dólares por cliente. Sin embargo, hay

bastante incertidumbre con respecto al efecto del color y la gerencia piensa que la estimación de siete dólares por cliente puede variar hasta en un dólar en ambas direcciones, con probabilidad de *Vi*. En otras palabras, la desviación estándar es de un dólar.

La compañía obtiene en promedio un 20% de beneficio sobre las ventas. Cuesta 25 centavos más imprimir un catálogo a color que uno en blanco y negro.

a. ¿Deben usar el catálogo a color?
b. ¿Cuál es el VEIP?

7-20. Una compañía de construcción tiene un contrato para terminar un trabajo en 180 días y tendrá que pagar una multa de 10 000 dólares por cada día que exceda los 180 para terminar el proyecto. Hay incertidumbre acerca de cuánto tardará, por las condiciones del clima, la posibilidad de huelgas, etcétera. La gerencia ha asignado una distribución de probabilidad normal al número de días necesarios p^ra concluir el proyecto. Esta distribución tiene una media de 170 días y desviación estándar de 12 días.

a. ¿Cuál es la probabilidad de que se conclu ya el trabajo a tiempo?
b. ¿Cuál es el costo esperado de penalización?

7-21. Una pieza de equipo tiene un costo de 100 000 dólares. Los beneficios esperados de su uso son sólo 80 000 dólares, por lo que se espera una pérdida de 20 000 dólares si se compra. Los beneficios se distribuyen normalmente con desviación estándar de 20 000 dólares.

a. La empresa puede comprar información perfecta acerca del rendimiento del equi po. ¿Cuánto es lo máximo que debería es tar dispuesta a pagar, suponiendo que sólo considera la adquisición de un equipo?
b. Suponga ahora que si el equipo tiene éxi to, la empresa comprará 100 unidades más, cada una con los mismos resultados económicos. Suponga que la única forma de obtener información es comprar una pieza, con lo cual se obtendría informa ción perfecta. ¿Debe comprarse una pieza?

7-22. Un fabricante de artículos electrónicos se enfrenta al problema de decidir cómo inspeccionar los circuitos integrados que salen de la línea de montaje. Un porcentaje elevado de los circuitos tiene defectos y el fabricante tiene que escoger entre dos sistemas de inspección. Ambos sistemas funcionan bien con circuitos buenos; es decir, nunca clasifican como defectuoso un circuito bueno. Sin embargo, los dos sistemas varían en cuanto a la clasificación de defectuosos. El primer dispositivo, de naturaleza mecánica, comete errores en la clasificación con una tasa promedio del 10%, pero la tasa real de errores en la clasificación se distribuirá normalmente alrededor de 0.10 con desviación estándar de 0.03 (esta variación se debe al ajuste imperfecto de la máquina al inicio de la sesión de producción). Una tasa de 0.10 errores en la clasificación significa que 0.10 de *todo el lote* aún tiene defectos después de la inspección. El tipo de proceso de producción no permite que la máquina se reajuste una vez iniciada la sesión de inspección; el ajuste tiene que realizarse en la siguiente sesión.

El otro sistema de inspección consiste en colocar un trabajador en la línea de montaje. La experiencia anterior indica que este sistema sólo produce 0.01 errores en la clasificación. Si se usa el trabajador, el costo incremental, por encima del de la máquina, será de 25 dólares por sesión de producción (una sesión es de mil circuitos). Cuando un circuito defectuoso se clasifica como bueno, hay un costo de 50 centavos por circuito para realizar trabajo adicional sobre el submontaje.

Calcule lo siguiente (por sesión de producción):

a. El VME de la mejor acción.
b. El VEIP (con respecto a la información perfecta acerca de la tasa de errores de cla sificación de la máquina).
c. El costo esperado en condiciones de certi dumbre.

7-23. Resuelva el problema 7-22 suponiendo que la media de la tasa de errores de clasificación de la máquina es aún 0.10 pero que la desviación estándar es 0.05.

7-24. Resuelva el problema 7-22 suponiendo que la media de la tasa de errores de clasificación de la máquina es 0.07 y que la desviación estándar es 0.03.

7-25. Un empresario ha decidido fabricar un producto nuevo, para lo cual puede alquilar una de dos máquinas disponibles. La máquina A tiene un costo de alquiler de 100 000 dólares y un costo unitario de producción de dos dólares; la máquina B se alquila por 200 000 dólares pero el costo unitario de producción es de sólo un dólar. El empresario cree que la demanda anual del producto será "aproximadamente 150 000 unidades" y que hay alrededor de 2/3 de probabilidad de que la demanda esté entre 100 000 y 200 000 unidades.

a. Calcule el valor de equilibrio para la demanda (es decir, el valor de la demanda necesario para que al empresario le sean indistintas las dos máquinas).

b. ¿Cuál máquina debe alquilar el empresario? ¿Por qué? ¿Cuál es el ahorro en los costos esperados de la opción correcta, comparado con la opción incorrecta?

c. ¿Cuál es el VCIP?

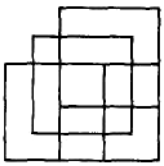
d. ¿Cuál es el VEIP?

7-26. El agente de compras de una cadena de panaderías quiere determinar cuál es la mejor manera de comprar los sacos de trigo que la compañía necesitará en septiembre. Una alternativa es pagar el trigo en el mercado actual al precio de 3.28 dólares por saco, para que lo entreguen en septiembre. Este precio concuerda con las expectativas del agente de compras en lo que se refiere al precio del trigo que se compre en el mercado libre en el mes de septiembre (la otra alternativa). La experiencia indica que el precio del mercado libre puede variar considerablemente en septiembre y que la probabilidad de que el precio en dicho mes esté 25 centavos por encima o por debajo del precio de 3.28 dólares (por saco) es de 2/3.

a. Si el agente tiene aversión al riesgo, ¿qué alternativa escogería: Comprarlo ahora en el mercado para entrega a futuro o comprarlo en el mercado libre en septiembre?

b. ¿Cuál es el VEIP?

CAPÍTULO



8

Modificación de probabilidades normales por muestreo

En los capítulos 3 y 4 se analizó el concepto de modificación de las probabilidades subjetivas mediante la obtención de pruebas nuevas o experimentales. En el capítulo 3 se presentó la modificación de probabilidades y en el capítulo 4 se consideró el esquema general para la introducción de pruebas procedentes de muestras o experimentos. El propósito de este capítulo es ampliar el análisis y aplicarlo en una situación de decisión específica con la distribución normal de probabilidad.

Se usará un problema para ilustrar los conceptos implicados. Suponga que una empresa quiere fabricar un producto nuevo y que lo venderá en una cadena de 5000 tiendas. La empresa no está segura del nivel de ventas del producto y no ha podido decidir si lo lanza al mercado o no.

La primera fuente de información que puede aprovechar la empresa al tomar esta decisión es su propio juicio y su experiencia (que incluye el análisis de la introducción de productos similares en el pasado). Esta experiencia se puede representar con una distribución de probabilidad subjetiva de las ventas medias del producto nuevo en cada tienda. Suponga que la gerencia indica que su distribución de probabilidad subjetiva del promedio de ventas por tienda es normal y que tiene una media de 400 unidades y una desviación estándar de 30.

La empresa podría utilizar la información anterior para tomar la decisión, sin necesidad de otras pruebas; pero también puede llevar a cabo experimentos y obtener información adicional. El experimento podría ser, por ejemplo, un estudio de investigación de mercado en el cual se tome una muestra aleatoria de las 5000 tiendas. Después, el producto nuevo se podría vender a prueba en las tiendas seleccionadas y medir las ventas, para luego utilizar los resultados como estimaciones para las 5000 tiendas.

Los resultados muéstrales están sujetos a cierta incertidumbre. Puede existir un sesgo en las pruebas.[1] Existe además el error aleatorio o de muestreo, por el hecho de que se ha experimentado con una muestra y no con todo el grupo de tiendas. Por lo tanto, no se deben usar las pruebas de la muestra como la única base para tomar la decisión.

Al modificar las probabilidades se pueden combinar las probabilidades subjetivas del fabricante con los resultados de las muestras para obtener una distribución subjetiva *modificada* o *a posteriori,* la cual sirve como base para la toma de decisiones.

El punto focal de este capítulo es la modificación de la media y la desviación estándar de una distribución normal a priori a la luz del conocimiento de los resultados muéstrales. También se analizará si es deseable o no obtener las pruebas, teniendo en cuenta que el proceso de muestreo tiene un costo.

Para comenzar, se describirán varias distribuciones que pueden aparecer al modificar la distribución de probabilidad normal a priori.

Distribuciones de probabilidad

En el análisis se usarán cinco distribuciones de probabilidad:

1. La distribución de la población, donde σ_ρ *= desviación estándar y* μ *= media.* Esta distribución refleja las características de los componentes individuales de la población de la cual se extrae la muestra. En el ejemplo anterior, se trata de la distribución de probabilidad de ventas por tienda, para la población de 5000 tiendas. Si estuvieran disponibles todos los datos, se podrían agrupar las tiendas por las cantidades que venden y luego dividir estas cantidades entre el total de tiendas, de manera que la suma de las proporciones sea igual a 1. En la figura 8.1 se muestra una distribución posible de las ventas de las tiendas de la población.

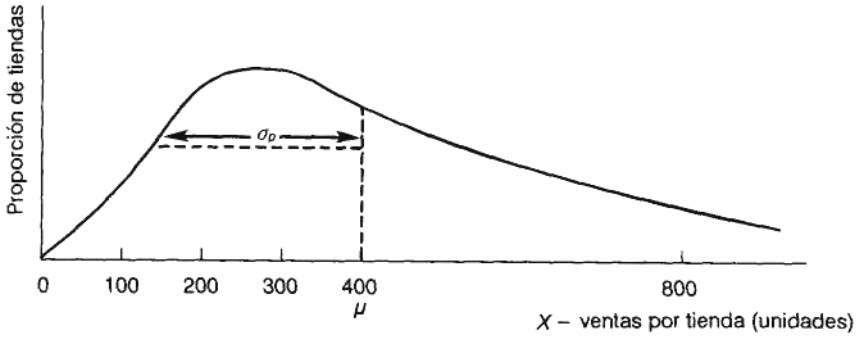
Habría una pequeña proporción de tiendas con ventas cuantiosas (más de 800 unidades), pero la mayoría vendería menos de 800 unidades. Esta distribución, como es típico en muchas de las distribuciones de datos económicos, se inclina hacia la derecha (es decir, tiene una cola larga a la derecha) y la distribución normal no sería una buena aproximación de la curva de la figura 8-1. La empresa supuestamente tiene una buena estimación de σ_ρ, la desviación estándar de la distribución de las ventas de las tiendas, la cual puede basarse en los datos de estudios anteriores o en una muestra. No se conoce la media real de la distribución.

Por lo general se desconocen μ y σ_ρ y se usan la media y la desviación estándar de la muestra como estimaciones de μ y σ_ρ.

2. *Distribución de la muestra.* Suponga que se selecciona una muestra aleatoria de η tiendas. Se podría hacer una distribución de frecuencias, parecida a la que se

[1] En este libro sólo se hará énfasis en el error de muestreo. Si desea conocer un análisis más detallado del procedimiento para tratar algunas de las formas de sesgo, vea R. Schlaifer, *Probability and Statisticsfor Business Decisions,* Nueva York, McGraw-Hill, 1959, Cap. 31.

Figura 8-1 Distribución de población (distribución de ventas por tienda)



hizo antes, de los elementos de la muestra; es decir una distribución de ventas por tienda para las tiendas de la muestra. Hay relaciones muy bien definidas entre esta distribución y la distribución de la población. Específicamente, si X_i corresponde a las ventas de la iésima tienda de la muestra de n tiendas, la media de la

$$\overline{X} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \qquad \textbf{(8-1)}$$

y $\overline{X}$ es una estimación insesgada[2] de la media de la población, μ.

La varianza de la muestra es:

$$\sigma_s^2 = \frac{\sum_{i=1}^{n} (X_i - \overline{X})^2}{n-1} \qquad \textbf{(8-2)}$$

v σ_s^2 es una estimación insesgada de la varianza de la población. σ_p^2. La desviación estándar de la muestra es σ_s y es una estimación de σ_p.

3. Distribución de las medias de las muestras. De una población se pueden obtener muchas muestras aleatorias, cada una de las cuales tendrá una media $\overline{X}$. Si se consideran todas las muestras posibles, $\overline{X}$ es en sí una variable aleatoria y tiene una distribución de probabilidad con media $E(\overline{X})$ y desviación estándar $\sigma_{\overline{x}}$.

muestra es:

[2] Un estadístico de una muestra es insesgado si el valor esperado del estadístico es igual al parámetro correspon diente de la población. En particular, $E(\overline{X}) = \mu$ y $E(\sigma_s^2) = \sigma_p^2$.]La media de la muestra es insesgada, ya que, en promedio, será igual a la media de la población.

[3] En este libro se llamará σ_s^2, como se definió antes, a la varianza de la muestra, aunque otros autores pueden usar el término para referirse a la fórmula anterior sustituyendo n - 1 por n. Al usar n, la varianza de la muestra no es una estimación insesgada de la varianza de la población σ_p^2.

No se conocen $E(\bar{X})$ ni $\sigma_{\bar{X}}$; sin embargo, la distribución de la población y la distribución de las medias de las muestras se relacionan de la siguiente manera:

$$E(\bar{X}) = \mu \tag{8-3}$$

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{n}} \quad \text{o} \quad \sigma_{\bar{x}}^2 = \frac{\sigma_p^2}{n} \tag{8-4}$$

Hay que recordar que $\bar{X}$ representa la media de una muestra y que $E(\bar{X})$ es el promedio de las medias muéstrales.

En las muestras de eran tamaño, la distribución de las medias muéstrales es aproximadamente normal, incluso si la distribución de *X* no lo es.[4] La normalidad de esta distribución será importante en los temas que se verán más adelante. En este libro se dará por hecho que se ha tomado una muestra de tamaño suficiente para asegurar la normalidad de la distribución de las medias de las muestras.[5]

4. Distribución a priori de la media de la población. Antes de tomar una muestra existe una distribución a priori de la media de la población. Se trata de una distribución de probabilidad subjetiva del decisor. En el ejemplo, el gerente tiene una distribución subjetiva a priori de las ventas medias por tienda. Los parámetros de la distribución a priori son la media = 400 unidades (representada por μ_0) y la desviación estándar = 30 unidades (representada por σ_0). Observe que σ_0 es la desviación estándar de la distribución de probabilidad a priori de la estimación de la media de la población *(no* es una estimación de la desviación estándar de la población. σ_p).

La variable aleatoria de la distribución a priori (y también de la a posteriori) es μ, la media de la población. Aunque la distribución real de la población tiene una media específica (como en la figura 8-1), el decisor no conoce esta media y por lo tanto se trata de una variable aleatoria (subjetiva).

El subíndice 0 de los símbolos $\bar{\mu}_0$ y σ_0 indica una distribución a priori. El subíndice 1 se usará para indicar una distribución a posteriori.

5. *Distribución a posteriori de la media de la población.* La distribución a priori de la población se actualiza después de tomar la muestra para obtener la distribución a posteriori con $\bar{\mu}_1$, la media, y σ_1, la desviación estándar. Si la distribución a priori es normal y la distribución de las medias muéstrales también es normal, será normal la distribución a posteriori.

A continuación se indicará cómo actualizar o modificar la distribución a priori con base en la información de la muestra para obtener la distribución a posteriori.

[4] Esto es resultado del teorema central del límite. Véase cualquier libro sobre teoría estadística, como los que se presentan en la bibliografía, al final del capítulo.

[5] La determinación del tamaño de muestra necesario para asegurar la normalidad de la distribución de muestreo de $\bar{X}$ no es sencilla. Si la población es simétrica, son adecuadas las muestras muy pequeñas. Si las distribuciones presentan mucha inclinación, entonces se requieren muestras muy grandes. Para fines prácticos se consideran adecuadas las muestras de 30 a 50 elementos. Véase Schlaifer, *Probability and Statistics,* Cap. 17, para conocer más al respecto.

Modificación de la distribución a priori

Suponga que la distribución a priori de la media de la población es normal y que la media es $\bar{\mu}_0$ y la desviación estándar es σ_0. Se toma una muestra aleatoria de tamaño n; la media de la muestra es $\bar{X}$ y la desviación estándar de la muestra es

σ_s (σ_s es una estimación de σ_p, la desviación estándar de la población). Para simplificar las fórmulas que se usarán, introduciremos el símbolo / para representar la cantidad de **información** que contiene la distribución, y se definirá / como la inversa de la varianza correspondiente; es decir:

$$I_0 = \frac{1}{\sigma_0^2} \tag{8–5}$$

$$I_{\bar{x}} = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}}^2} = \frac{n}{\sigma_p^2} \tag{8–6}$$

$$I_1 = \frac{1}{\sigma_1^2} \tag{8–7}$$

Si la cantidad de información en una distribución es grande, la cantidad de incertidumbre es pequeña, lo cual se indica con una distribución cerrada con poca varianza, y viceversa. Por lo tanto, la varianza de una distribución se relaciona inversamente con la cantidad de información.

La media de la distribución modificada, $\bar{\mu}_1$, se obtiene tomando un promedio ponderado de la media a priori y la media de la muestra, en el cual las ponderaciones son las cantidades relativas de información en las distribuciones:

$$\bar{\mu}_1 = \left(\frac{I_0}{I_0 + I_{\bar{x}}}\right)\bar{\mu}_0 + \left(\frac{I_{\bar{x}}}{I_0 + I_{\bar{x}}}\right)\bar{X} \tag{8–8}$$

Las ecuaciones 8-8 y 8-10 (en la página 225), para las distribuciones normal a priori y de la muestra, son equivalentes al procedimiento de modificación de probabilidad del capítulo 3: determinan la media y la desviación estándar de la distribución normal a posteriori.

Ejemplo Nuestra empresa, que quiere introducir un producto nuevo, posee una distribución a priori normal de las ventas medias del producto por tienda con media $\bar{\mu}_0 = 400$ unidades y desviación estándar de $\sigma_0 = 30$ unidades. Hay 5000 tiendas y se selecciona al azar una muestra de 100 tiendas. El producto se entrega a las 100 tiendas y se mantiene un registro de las ventas. Las ventas promedio por tienda, en las 100 tiendas, son de 420 unidades; es decir, $\bar{X}$ (la media de la muestra) = 420. La desviación estándar de la muestra es 200 unidades; o sea, $\sigma_s = 200$.

Si se usa σ_s como estimación de la desviación estándar de la población, σ_p, se puede estimar $\sigma_{\bar{x}}$ con la ecuación 8-4:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{n}} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{n}} = \frac{200}{\sqrt{100}} = \frac{200}{10} = 20$$

Los valores de la información son, de las ecuaciones 8-5 y 8-6:

$$I_0 = \frac{1}{\sigma_0^2} = \frac{1}{900}$$

$$I_{\bar{x}} = \frac{1}{\sigma_{\bar{x}}^2} = \frac{1}{400}$$

La media modificada, al usar la ecuación 8-8, es:

$$\bar{\mu}_1 = \left(\frac{1/900}{1/900 + 1/400}\right) \times 400 + \left(\frac{1/400}{1/900 + 1/400}\right) \times 420$$

$$= \frac{400/900 + 420/400}{1/900 + 1/400} = \frac{400 \times 400 + 420 \times 900}{400 + 900}$$

$$= \frac{538\,000}{1\,300} = 413.8$$

La media de la distribución a priori era 400, pero como la desviación estándar ($\sigma_0 = 30$) era relativamente grande en comparación con $\sigma_{\bar{x}}$, la cantidad de información en la distribución a priori ($I_0 = 1/900$) era pequeña. La media de la muestra fue 420 y, como la desviación estándar de la media de la muestra fue relativamente pequeña ($\sigma_{\bar{x}} = 20$), la cantidad de información en la muestra ($I_{\bar{x}} = 1/400$) fue relativamente grande. De este modo, la media modificada, 413.8, se aproxima más a la media de la muestra de 420 que a la media anterior de 400. Si la distribución a priori tuviera una desviación estándar relativamente grande, la media a priori estaría ligeramente ponderada y tendría menos efecto sobre la media a posterior! (o modificada).

Observe que en la ecuación 8-6:

$$I_{\bar{x}} = \frac{n}{\sigma_p^2}$$

Por lo tanto, la cantidad de información en la muestra se relaciona directamente con el tamaño de la muestra. Las muestras grandes tienden a ser muy precisas, por lo que si η es grande, la distribución a priori tenderá a tener poco efecto en la distribución a posterior! y, por consiguiente, en la decisión.

Por otra parte, en el caso de muestras pequeñas, la distribución a priori puede tener efectos importantes, sobre todo si la desviación estándar de la población (σ_p) es grande.

Modificación de la desviación estándar

La información de la distribución modificada es igual a la suma de la información en la distribución a priori más la información en la muestra:

$$I_1 = I_0 + I_{\bar{x}} \qquad (8\text{-}9)$$

Ejemplo En el ejemplo de la sección anterior, los valores de I_0 e $I_{\bar{x}}$ fueron:

$$I_0 = \frac{1}{900}$$
$$I_{\bar{x}} = \frac{1}{400}$$

El valor de I_1, por la ecuación 8-9, es:

$$I_1 = \frac{1}{900} + \frac{1}{400} = \frac{1\ 300}{360\ 000}$$

La desviación estándar de la distribución modificada se puede calcular con la definición de I_1, de la ecuación 8-7:

$$I_1 = \frac{1}{\sigma_1^2}$$
$$\frac{1}{\sigma_1^2} = \frac{1\ 300}{360\ 000}$$
$$\sigma_1^2 = \frac{360\ 000}{1\ 300} = 276.9$$
$$\sigma_1 = \sqrt{276.9} = 16.6$$

La desviación estándar modificada ($\sigma_1 = 16.6$) es menor que la desviación estándar de la distribución a prion ($\sigma_0 = 30$) y que la desviación estándar de la media muestral ($\sigma_{\bar{x}} = 20$). Entonces, la distribución a posteriori, al combinar las estimaciones de las dos fuentes (juicio y muestra), contiene más información que cualquiera de las fuentes aisladas.

En vez de usar la fórmula anterior, que utiliza I_1, se puede desarrollar una variación de la fórmula que use sólo las desviaciones estándar relevantes:

$$\frac{1}{\sigma_1^2} = \frac{1}{\sigma_0^2} + \frac{1}{\sigma_{\bar{x}}^2}$$
$$\frac{1}{\sigma_1^2} = \frac{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_0^2}{\sigma_0^2 \times \sigma_{\bar{x}}^2}$$
$$\sigma_1^2 = \frac{\sigma_0^2 \times \sigma_{\bar{x}}^2}{\sigma_{\bar{x}}^2 + \sigma_0^2}$$

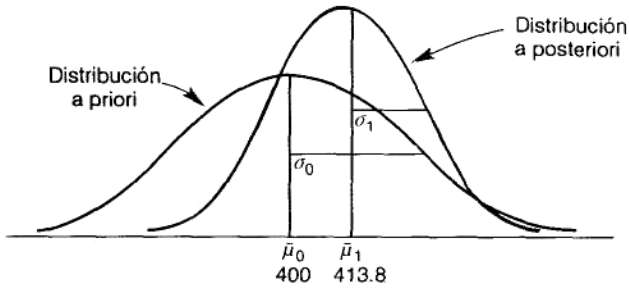
La desviación estándar modificada es igual a:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{\sigma_{\bar{x}}^2 \times \sigma_0^2}{\sigma_0^2 \times \sigma_{\bar{x}}^2}} \qquad \textbf{(8–10)}$$

Al usar esta ecuación para resolver el ejemplo:

$$\sigma_1 = \sqrt{\frac{400 \times 900}{900 + 400}} = \sqrt{276.9} = 16.6$$

Figura 8-2 Distribuciones a priori y a posteriori



lo cual está de acuerdo con la solución anterior.

Si se conoce σ_p, la desviación estándar de la población, entonces, en lugar de estimar $\sigma_{\bar{x}}$ con:

$$\frac{\sigma_s}{\sqrt{n}}$$

se puede calcular $\sigma_{\bar{x}}$ con la relación:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{n}}$$

La figura 8-2 compara la distribución a priori con la distribución a posteriori.

RESUMEN

Si (a) la incertidumbre a priori con respecto a una variable desconocida se puede representar con una distribución normal, y si *(b)* se toma una muestra de tamaño suficiente para que la distribución de las medias muéstrales sea aproximadamente normal, entonces la distribución modificada (a posteriori) de la variable desconocida también estará normalmente distribuida, con la media y la desviación estándar que se indican en las ecuaciones 8-8 y 8-10.

Distribución normal a posteriori y toma de decisiones

La distribución normal a posteriori se obtiene de la combinación de probabilidad subjetiva a priori y resultados muéstrales. La distribución a posteriori es en sí una distribución para la toma de decisiones. Como es normal, pueden aplicarse las técnicas que se presentaron en el capítulo 7. Veamos con detalle algunos de estos puntos.

Suponga que la empresa que considera la introducción de un producto nuevo cuenta con la siguiente información económica: el costo de la maquinaria y de la publicidad del nuevo producto es de 520 000 dólares; el beneficio variable (o

contribución) por unidad que se venda es de 25 centavos y el número de tiendas es 5000.

Después de tomar la muestra, la variable aleatoria a posteriori es

μ_1,

La media de las ventas por tienda. La ecuación del beneficio, en función de μ_1, es:

$$\begin{aligned}\text{Beneficio} = \pi &= -520\,000 + (0.25)(5\,000)\mu_1 \\ &= -520\,000 + 1\,250\mu_1\end{aligned}$$

El valor de equilibrio de la media de las ventas, representado con μ_b, es:

$$\mu_b = \frac{520\,000}{1\,250} = 416$$

Puesto que la media a posteriori, $\bar{\mu}_1 = 413.8$ es aun menor que μ_b, la empresa no debe lanzar el producto al mercado.

Es posible determinar el valor esperado de la información perfecta (VEIP) para la distribución a posteriori, con la ecuación 7-4 del capítulo 7:

$$\text{VEIP} = C \cdot \sigma \cdot N(D)$$

donde $\sigma = \sigma_1$; en este caso:

$$\sigma = \sigma_1 = 16.6$$

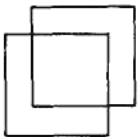
$$C = (0.25)(5\,000) = 1\,250$$

$$D = D_1 = \frac{|\bar{\mu}_1 - \mu_b|}{\sigma_1} = \frac{|413.8 - 416|}{16.6} = 0.13$$

$$N(D_1) = 0.3373$$

$$\text{VEIP} = (1250)(16.6)(0.3373) = \$7000$$

La distribución normal a posteriori se puede usar como cualquier otra distribución normal para tomar decisiones y para determinar el valor esperado de la información perfecta.



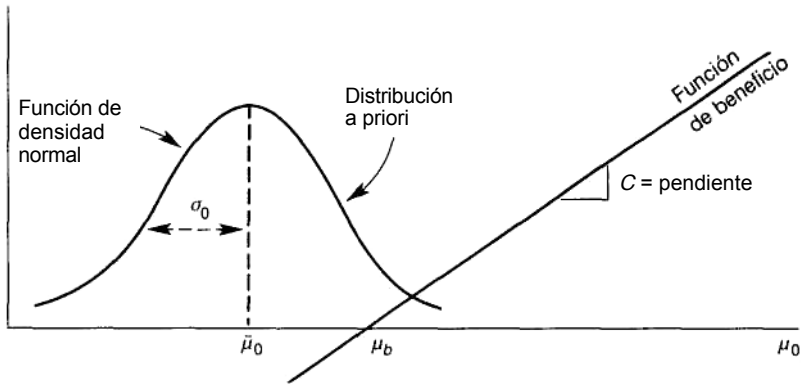
Decisión de muestrear

Veamos ahora si es apropiado el muestreo y cuál debe ser el tamaño de la muestra. El análisis de esta sección difiere del de la sección anterior, por ser *anterior* a la muestra, no *posterior*.

Situación inicial

La gerencia considera la posibilidad de invertir en un producto nuevo. Suponga que el cambio en el beneficio por unidad que se obtendría de la decisión de invertir

Figura 8-3 Distribución a priori de la media de la población



es C (la función de beneficio es lineal) y que la cantidad de equilibrio es μ_b. La media de la distribución a priori de las ventas promedio es $\bar{\mu}_0$.

La figura 8-3 indica que la decisión no es deseable. La media $\bar{\mu}_0$ está a la izquierda de μ_b, el punto de equilibrio; además, la inversión tiene un valor esperado negativo igual a $-C(\mu_b - \bar{\mu}_0)$. Sin embargo, existe la posibilidad de que el valor real de μ esté a la derecha de μ_b.

El valor esperado de la información perfecta es:

$$\mathbf{VEIP} = C \cdot \sigma_0 \cdot N(D_0) \qquad \textbf{(8-11)}$$

donde:

$$D_0 = \frac{|\bar{\mu}_0 - \mu_b|}{\sigma_0}$$

La ecuación 8-11 también mide la pérdida de oportunidad esperada para la decisión de no invertir, ya que ésta es la decisión óptima. Antes de efectuar el muestreo, este valor se basa en el juicio subjetivo de la persona que decide, expresado como una distribución de probabilidad para la media de la población.

Considere el ejemplo que se usó antes, en el cual una empresa investiga la introducción de un producto nuevo. Hay una distribución normal a priori de las medias de las ventas del producto por tienda con $\mu_0 = 400$ unidades y desviación estándar de $\sigma_0 = 30$ unidades. El costo de maquinaria y publicidad del nuevo producto es de $520 000. Hay 5000 tiendas y el beneficio variable (o contribución) por unidad que se venda es de 25 centavos. El beneficio por unidad de cambio en μ; la media de las ventas por tienda es:

$$C = 0.25 \cdot 5\,000 = 1\,250$$

El valor de equilibrio es μ_b = 416 unidades.

La acción óptima que se basa en las probabilidades a priori es rechazar el producto nuevo. Sin embargo, la pérdida de oportunidad esperada de la acción de rechazo (el valor esperado de la información perfecta) es:

$$\text{VEIP} = C\,\sigma_0\,N(D_0)$$

$$D_0 = \frac{|\bar{\mu}_0 - \mu_b|}{\sigma_0} = \frac{|400 - 416|}{300} = 0.53$$

$$N(D_0) = N(0.53) = 0.1887$$

$$\text{VEIP} = (\$1\,250)(30)(0.1887) = \$7{,}076$$

Entonces, estaríamos dispuestos a pagar hasta 7076 dólares por la información perfecta acerca del verdadero nivel de las ventas promedio por tienda para el nuevo producto.

Distribución esperada a posteriori

Antes de tomar la muestra se puede estimar el cambio que ocurrirá en la distribución. Es decir, se puede suponer la distribución a posteriori antes de tomar la muestra y modificar la distribución a priori. No se sabe de antemano cuál será la media de la muestra, $\bar{X}$, y por consiguiente tampoco se sabe con precisión cuál será la media de la distribución a posteriori. Sin embargo, si se puede obtener alguna medida de la varianza de la muestra, se puede estimar la varianza a posteriori y la información en la distribución a posteriori. Recuerde que el error de muestreo (la desviación estándar de la distribución de las $\bar{X}$) es:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{n}}$$

Por lo tanto, se necesita medir la desviación estándar de la población (σ_p) para estimar la varianza de una muestra de tamaño n. Esta estimación de σ_p puede obtenerse de estudios previos, de una opinión fundamentada o de una muestra piloto de la población.

Se usará el símbolo σ^{*} • para indicar la cantidad de reducción en la varianza de la distribución a priori a la posteriori. Es decir:

$$\sigma^{*2} = \sigma_0^{\,2} - \sigma_1^{\,2} \qquad \textbf{(8–12)}$$

$$\sigma_1^{\,2} = \frac{\sigma_{\bar{x}}^{\,2} \cdot \sigma_0^{\,2}}{\sigma_0^{\,2} + \sigma_{\bar{x}}^{\,2}}$$

Al sustituir lo anterior en la ecuación 8-12:

$$\sigma^{*2} = \sigma_0^{\,2} - \frac{\sigma_{\bar{x}}^{\,2} \cdot \sigma_0^{\,2}}{\sigma_0^{\,2} + \sigma_{\bar{x}}^{\,2}} = \frac{\sigma_0^{\,2} \cdot \sigma_0^{\,2}}{\sigma_0^{\,2} + \sigma_{\bar{x}}^{\,2}}$$

de manera que:

$$\sigma^* = \sqrt{\sigma_0^{\,2} \cdot \frac{\sigma_0^{\,2}}{\sigma_0^{\,2} + \sigma_{\bar{x}}^{\,2}}} \qquad \textbf{(8–13)}$$

Valor esperado de la información de la muestra

El valor económico de una muestra resulta del hecho de que reduce la pérdida esperada a posteriori. En otras palabras, la muestra, al proporcionar información adicional, reduce la probabilidad de tomar una decisión errónea. El *valor esperado de la información de la muestra* (VEIM) se calcula en forma análoga al VEIP, con σ^* como desviación estándar. Entonces:

$$\textbf{VEIM} = C\ \sigma^*\ N(D^*) \qquad \textbf{(8-14)}$$

donde:

$$D^* = \frac{|\mu_b - \bar{\mu}_0|}{\sigma^*}$$

Decisión de muestrear

Consideremos, para el ejemplo anterior, la posibilidad de tomar una muestra de tamaño $\eta = 100$. Recuerde que el VEIP = 7076 dólares. Incluso si el costo de la muestra es menor que esta cantidad, no existe la seguridad de que la muestra valga la pena, ya que sólo proporciona información imperfecta.

Suponga que $\sigma_p = 200$ (se sabe por la experiencia anterior). Con tamaño de muestra igual a 100, la desviación estándar de las medias de la muestra es:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{n}} = \frac{200}{10} = 20$$

El valor de σ^* es, de la ecuación 8-13:

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\sigma_0^{\,2} \times \sigma_0^{\,2}}{\sigma_0^{\,2} + \sigma_{\bar{x}}^{\,2}}}$$

$$= \sqrt{\frac{30^2 \times 30^2}{30^2 + 20^2}} = \sqrt{\frac{810\,000}{1\,300}}$$

$$= 24.9 \text{ (aproximadamente)}$$

De la ecuación 8-14

$$\text{VEIM} = C\ \sigma^* N(D^*)$$

$$D^* = \frac{|400 - 416|}{24.9} = 0.64$$

$$N(D^*) = 0.1580$$

$$\text{VEIM} = (\$1\ 250)(24.9)(0.1580) = \$4\ 918$$

En esta situación no se efectuaría un muestreo de 100 unidades si el costo del muestreo fuera mayor que 4918 dólares.

Segundo ejemplo

Suponga ahora que el número de unidades equilibrio es 402 (antes era 416; ahora es más fácil tomar la decisión incorrecta). El valor esperado de la información perfecta, con la ecuación 8-11, es ahora:

$$\text{VEIP} = C\,\sigma_0\,N(D_0)$$

$$D_0 = \frac{|400 - 402|}{30} = \frac{2}{30} = 0.07$$

$$N(D_0) = N(0.07) = 0.3649$$

$$\text{VEIP} = (\$1\ 250)(30)(0.3649) = \$13\ 684$$

De la
tamaño

$$\text{VEIM} = C\,\sigma^* N(D^*)$$

$$D^* = \frac{|400 - 402|}{24.9} = 0.08$$

$$N(D^*) = N(0.08) = 0.3602$$

$$\text{VEIM} = (\$1\ 250)(24.9)(0.3602) = \$11\ 211$$

Si el costo del muestreo de 100 unidades es menor que 11211 dólares, entonces es deseable.

El valor esperado de la información de muestreo ha aumentado considerablemente en este segundo ejemplo al reducir la diferencia entre el número esperado de unidades y el número de unidades de equilibrio. El valor esperado de la información de la muestra también habría aumentado si a_0 hubiera sido mayor (o sea, mayor incertidumbre acerca de la *JJ* verdadera), con lo que aumentaría la posibilidad de tomar la decisión equivocada.

Tercer ejemplo

Supong σ es 150 σ_p es 200.

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{n}} = \frac{200}{10} = 20$$

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\sigma_0^2 \times \sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \sigma_{\bar{x}}^2}} = \sqrt{\frac{150^2 \times 150^2}{150^2 + 20^2}} = \sqrt{\frac{22\ 500 \times 22\ 500}{22\ 900}}$$

$$= \sqrt{22\ 107} = 148.7$$

Suponiendo que el número de unidades necesario para el equilibrio es aún 402, el VEIM es:

$$\text{VEIM} = C\,\sigma^* N(D^*)$$

$$D^* = \frac{|400 - 402|}{148.7} = \frac{2}{148.7} = 0.01344$$

$$N(D^*) = N(0.013) = 0.3923$$

$$\text{VEIM} = (\$1\,250)(148.7)(0.3923) = \$72\,919$$

El VEIM es ahora mucho mayor que en los dos ejemplos anteriores. El valor de 150 para σ_0 implica eran cantidad de incertidumbre acerca de la estimación a pnon $\overline{\mu}_0 = 400$. La muestra reduce notablemente esta incertidumbre y, por lo tanto, tiene gran valor.

Si σ_n fuera menor que 200 unidades, la muestra proporcionaría mas información, ya que los elementos escogidos pertenecerían a una población menos dispersa; σ^* aumentaría. Con esto, habría una tendencia a aumentar el VEIM. Además, el valor de D^* disminuiría y el término $N(D^*)$ aumentaría, con lo que también aumenta el valor esperado de la información de la muestra.

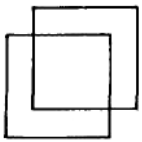
En muchas situaciones no se conocerá el valor de σ_p. Se puede obtener una estimación del valor tomando una pequeña muestra preliminar y usando la relación:

$$\sigma_s = \sigma_{p\,\text{est.}} = \sqrt{\frac{\Sigma(X - \overline{X})^2}{n - 1}} \qquad \textbf{(8–15)}$$

Luego se puede determinar si es deseable continuar el muestreo, utilizando σ_s para calcular $\sigma_{\bar{x}}$:

$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_s}{\sqrt{n}} \qquad \textbf{(8–16)}$$

RESUMEN

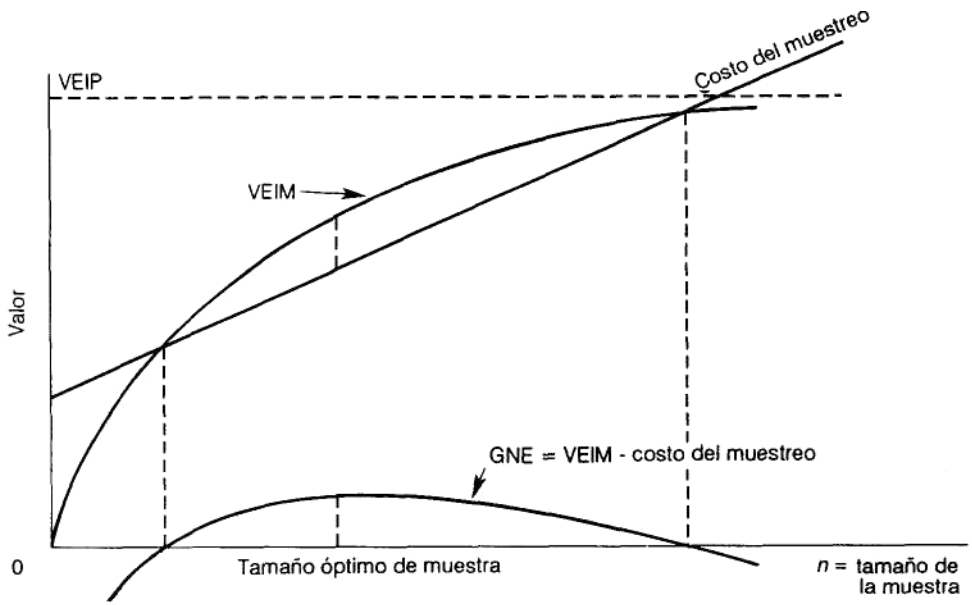


El valor esperado de la información de la muestra (VEIM) representa el beneficio adicional que espera obtener el decisor si actúa de manera óptima después de observar los resultados de una muestra de tamaño determinado, en comparación con el beneficio que se esperaría con base en la información a priori. El VEIM se puede calcular con la ecuación 8-14 en problemas que implican *(a)* dos alternativas, (¿>) funciones lineales de los beneficios, (c) distribuciones a priori normales, y *(d)* una distribución aproximadamente normal de las medias de la muestra.

Tamaño óptimo de la muestra

La diferencia entre el valor esperado de una muestra de tamaño determinado (VEIM) y su costo se define como la ganancia neta esperada (GNE) del muestreo. Si aumenta el tamaño de la muestra, es mayor su valor (VEIM), pero con una tasa cada vez menor. El VEIM nunca podrá ser mayor que el valor esperado de la información perfecta (VEIP). El costo del muestreo se relaciona con el tamaño de la muestra; por lo general, si es mayor la muestra, costará más. Estas relaciones se presentan en forma gráfica en la figura 8-4, para el caso en el cual el costo del muestreo es lineal.

Figura 8-4 Tamaño óptimo de la muestra



La ganancia neta esperada (GNE) primero aumenta y después se reduce. El valor de η que maximiza la GNE es el tamaño óptimo de la muestra. Una muestra mayor tendría menos valor neto; una muestra más pequeña que el tamaño óptimo podría aumentarse, sin que dejara de ser rentable.[6]

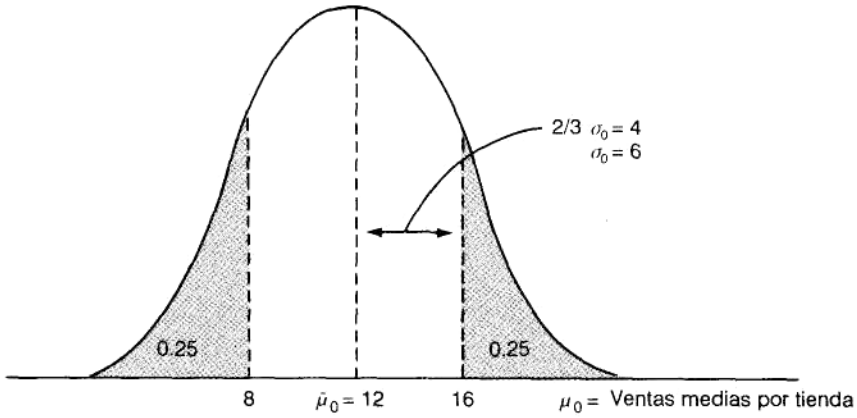
Un ejemplo integral

Suponga que un fabricante de juguetes considera la producción de un juguete nuevo. La inversión necesaria para llevar a cabo la producción del juguete es de 500 000 dólares en el primer año. Los beneficios increméntales (precio de venta menos costo variable) son de un dólar por juguete. Para que la empresa no tenga pérdidas, debe vender por lo menos 500 000 unidades en un año.

El producto se venderá a 50 000 tiendas minoristas a las cuales la compañía vende actualmente sus productos. El punto de equilibrio de las ventas, μ_b, es 10 unidades por tienda (500 000 -s- 50 000). Después de pensarlo con cuidado, el fabricante supone que las ventas medias por tienda serán de 12 unidades (es decir, $\overline{\mu}_0 = 12$) y asigna una probabilidad del 50% de que las ventas medias por tienda

[6] En algunas circunstancias se puede reducir la determinación del tamaño óptimo de la muestra a una fórmula matemática. Véase, por ejemplo, R. Schlaifer, *Probability and Statistics for Business Decisions,* **Nueva York, McGraw-Hill, 1959,** Cap. **34.** En este capítulo se **determinará por tanteo un valor óptimo aproximado.**

Figura 8-5 Distribución subjetiva a priori de las ventas medias por tienda



sean menor que 8 o mayor que 16. Si se acepta una distribución normal como indicación de las probabilidades subjetivas a priori, la distribución se podría ajustar como se muestra en la figura 8-5.

La media de la distribución, $\bar{\mu}_0$, es igual a 12 unidades y la desviación estándar, σ_0, es de seis unidades. Es una distribución que muestra la probabilidad de distintos valores de las ventas medias por tienda.

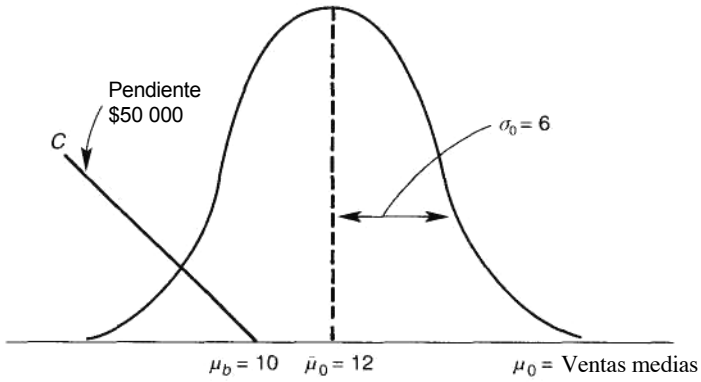
Con base en los datos anteriores, la mejor acción es introducir el juguete. Esto se debe a que las ventas por tienda necesarias para lograr el equilibrio, $\mu_b = 10$, son menores que la estimación de la media, 12. El costo de la incertidumbre, o VEIP, es de 76 650 dólares:

$$
\begin{aligned}
C &= 1 \text{ juguete x } 50\,000 \text{ tiendas } \chi \$1 \text{ por juguete} \\
&= \$50\,000 \\
D_0 &= \frac{|\bar{\mu}_0 - \mu_b|}{\sigma_0} = \frac{|12 - 10|}{6} = 0.333 \\
N(D_0) &= N(0.333) = 0.2555 \\
\text{VEIP} &= C\,\sigma_0\,N(D_0) \\
&= \$50\,000 \times 6 \times 0.2555 \\
&= \$76\,650
\end{aligned}
$$

Hay que determinar si vale la pena efectuar el muestreo y, de ser así, cuál deberá ser el tamaño de la muestra.

Consideremos primero si la acción cambiará después de obtener la información de la muestra. Si se toma una muestra y se observa la media, se modificará entonces la media de la distribución subjetiva a priori. Si la media modificada es mayor que 10 (la media de equilibrio), se mantendrá la decisión de vender el

Figura 8-6



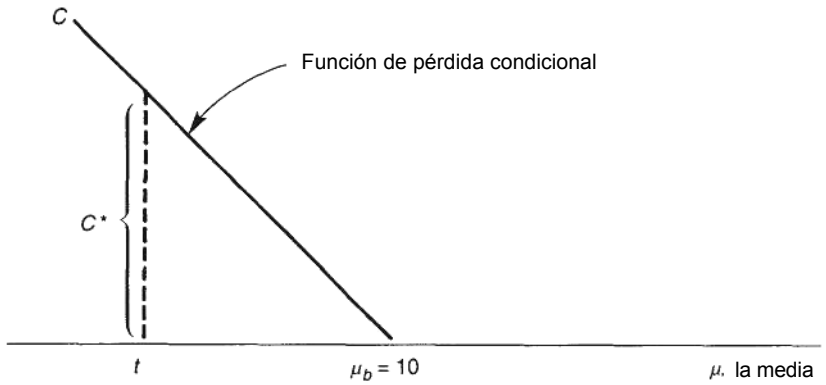
producto y la información de la muestra tendría valor de cero. Por otra parte, si la media de la muestra está por debajo de 10, de forma tal que la media modificada también sea menor que 10, la decisión sería no vender el juguete y, en este caso, la muestra tendría valor. Por lo tanto, el valor de la muestra depende en gran medida del valor de la media modificada.

El análisis anterior se ilustra en las figuras 8-6 y 8-7. Si la media modificada, $\overline{\mu}_1$, cae a la derecha de $\mu_b = 10$, se escoge la misma acción que se hubiera escogido sin la muestra. Por otra parte, si tiene un valor de *t* (véase Fig. 8-7) el muestreo habría evitado una pérdida esperada de C*. No se sabe cuál será el valor de $\overline{\mu}_1$ antes de tomar la muestra, por lo cual se le trata como una variable aleatoria. La mejor estimación de la media modificada es la media de la distribución a priori, ya que $\overline{\mu}_0$ es una estimación insesgada de $\overline{\mu}_1$.

Suponga que $\sigma_p = 10$; es decir, la desviación estándar de la distribución de las compras en las tiendas es 10. La desviación estándar de la población, σ_p, es un elemento importante de la decisión de muestreo. Si σ_p es grande, significa que las compras en las tiendas se dispersan considerablemente con respecto a las ventas medias de todas las tiendas. En este caso, la muestra no proporcionaría mucha información si σ_p fuera pequeña. Como ejemplo extremo, si $\sigma_p = 0$, entonces la muestra de una tienda indicaría al fabricante la cantidad de ventas en cada una de las tiendas de la población, ya que si $\sigma_p = 0$ entonces todas las tiendas de la población comprarían la misma cantidad. Por otra parte, si σ_p es muy grande, una muestra pequeña proporcionaría muy poca información, ya que se pueden obtener observaciones de los extremos de la distribución de la población.

Ahora hay que calcular σ^*, la raíz cuadrada del cambio en la varianza de la distribución de probabilidad a priori. El fabricante ha estimado que σ_p, la desviación estándar de esta población, es 10. Primero se considerará una muestra con tamaño $\eta = 25$. La desviación estándar de las medias muéstrales, $\sigma_{\bar{x}}$, es:

Figura 8-7



$$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{n}} = \frac{10}{5} = 2$$

y

$$\sigma_{\bar{x}}^2 = 4$$

Hay que calcular σ^*:

$$\sigma^* = \sqrt{\frac{\sigma_0^2 \cdot \sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \sigma_{\bar{x}}^2}} = \sqrt{\sigma_0^2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \sigma_{\bar{x}}^2}}$$

donde σ_0^2 es la varianza a priori, y su valor en el ejemplo es 36; $\sigma_{\bar{x}}^2$ es la varianza de las medias de la muestra. Los cálculos son:

$$\sigma^* = \sqrt{36 \cdot \frac{36}{36 + 4}} = \sqrt{36 \cdot \frac{36}{40}} = \sqrt{32.4} = 5.69$$

La estimación de σ^* es 5.69. Recuerde que esta estimación se hace antes de tomar la muestra. Con una muestra de tamaño 25, el valor esperado de la información de la muestra se calcula como sigue:

$$D^* = \frac{|12 - 10|}{5.69} = 0.351$$

$$N(D^*) = N(0.35) = 0.2481$$

$$\text{VEIM} = C \cdot \sigma^* \cdot N(D^*)$$

$$= \$50\,000 \times 5.69 \times 0.248$$

$$= \$70\,556$$

Tabla 8-1 Cálculo del tamaño óptimo de la muestra

Tamaño de la muestra n	$\sigma_{\bar{x}}^2$ *Varianza de las medias de la muestra* $\frac{\sigma_p^2}{n} = \frac{100}{n}$	σ^*	D^* $\frac{\lvert 12 - 10 \rvert}{\sigma^*}$	$N(D^*)$	*VEIM* $50{,}000 \times \sigma^* N(D^*)$	*Costo de la muestra*	*GNE* *(VEIM — costo de la muestra)*
20	5.00	5.62	0.356	0.246	$69 126	$2 000	$67 126
25	4.00	5.69	0.351	0.248	70 556	2 500	68 056
35	2.85	5.75	0.346	0.250	72 125	3 500	68 625
40	2.50	5.77	0.345	0.251	72 739	4 000	68 739
45	2.22	5.80	0.344	0.251	73 099	4 500	68 599

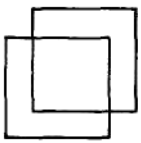
Como se puede ver en el cálculo anterior, el VEIM con $n = 25$ es bastante grande. Si el costo del muestreo de cada tienda fuera de 100 dólares, el costo de la muestra es de 2500 dólares. La ganancia neta esperada (GNE) del muestreo de 25 unidades es el VEIM menos el costo del muestreo. Entonces:

$$\begin{aligned} GNE_25 &= \text{VEIM - costo del muestreo} \\ &= 70\ 556 - 2500 = \$68\ 056 \end{aligned}$$

Como la GNE es positiva, es deseable tomar una muestra de 25. Sin embargo, podemos aumentar la GNE ajusfando el tamaño de la muestra. Por medio de procedimientos iterativos (tanteo) se puede aproximar el valor de n óptimo, realizando cálculos a ambos lados de $n = 25$ y aproximando al mejor valor de n hasta maximizar la GNE. Al aumentar n, también aumentará el VEIM, pero el costo de la muestra será mayor. Por esto, hay que encontrar el equilibrio adecuado entre el valor de la información adicional y el aumento en costo que ocasiona el aumento en el tamaño de la muestra, n.

La tabla 8-1 presenta el cálculo de la GNE del muestreo para varios tamaños de muestras, entre 35 y 45. La GNE crece hasta que el tamaño de la muestra llega aproximadamente a 40 y luego comienza a decrecer. Por lo tanto, se supone que el tamaño óptimo de la muestra está entre 35 y 45. El cambio en la GNE es muy pequeño, incluso si se duplica el tamaño de la muestra. En este ejemplo, la GNE no es muy sensible a cambios en el tamaño de la muestra en el intervalo 20 a 45.

RESUMEN



El tamaño óptimo de una muestra es el que produce la mayor ganancia neta esperada (GNE), es decir, la mayor diferencia entre el VEIM y el costo de la muestra.

Conclusión

Este capítulo y el anterior han contemplado la toma de decisiones con probabilidades normales y funciones de pérdida lineales. Estas hipótesis de normalidad y linealidad implican que se ha considerado un caso especial, pero en realidad son muchas las aplicaciones. Se han desarrollado otros métodos para distribuciones y funciones de pérdida diferentes; sin embargo, estos métodos quedan fuera del alcance de este libro. El caso de la distribución normal y la función de pérdida lineal ilustran correctamente los conceptos que forman parte de la toma de decisiones en condiciones de incertidumbre.

Bibliografía

Jones, J. M., *Introduction to Decisión Theory,* Homewood, 111., Richard D. Irwin, 1977.

Pratt, J. W., H. Raiffa y R. Schlaifer, *Introduction to Statistical Decisión Theory,* Nueva York, McGraw-Hill, 1965.

Raiffa, H. y R. Schlaifer, *Applied Statistical Decisión Theory,* Boston, División of Research, Harvard Business School, 1961.

Schlaifer, R., *Probability and Statistics for Business Decisions,* Nueva York, McGraw-Hill, 1959.

Spurr, W. A. y C. P. Bonini, *Statistical Analysis for Business Decisions,* Homewood, 111., Richard D. Irwin, 1973.

Winkler, R. L., *Introduction to Bayesian Inference and Decisión,* Nueva York, Holt, Rinehart & Winston, 1972.

Problemas con respuestas

8-1. Sea una distribución normal a priori con $\mu_0 = 10$ y $\sigma_0 = 2$. Se toma una muestra de tamaño $n = 36$, con $\bar{X} = 12$ y $\sigma_s = 6$. Calcule la media y la desviación estándar de la distribución a posterior!.

8-2. Un auditor cree que el saldo pendiente promedio de las tarjetas de crédito es superior a 10 dólares. Para ser más específico, cree que se puede representar el saldo promedio con una distribución normal con media de 12 y desviación estándar de 2. Se selecciona al azar una muestra de 25 cuentas y el saldo promedio de estas cuentas es de nueve dólares. La desviación estándar de los saldos de la muestra es de cinco dólares. ¿Cuál debe ser la distribución a posteriori del auditor? ¿Qué probabilidad debe asignar a la posibilidad de que el saldo promedio sea menor de 10 dólares?

8-3. Una empresa se había propuesto introducir un producto al mercado, y distribuirlo a través de 5000 mayoristas independientes. La gerencia expresó una opinión anterior acerca de las ventas promedio por mayorista en función de una distribución normal con media $\mu_0 = 4$ cajas por mes y desviación estándar $\sigma_0 = 1.5$ cajas por mes.

Se llevó a cabo un lanzamiento experimental del nuevo producto y después se solicitó a 36 de los 5000 mayoristas que probaran el producto. Se omitieron las ventas del mes en el cual se introdujo el producto, pero se registraron con cuidado las del segundo mes. La opinión era que las ventas repetidas (es decir, las ventas del segundo mes) serían un buen indicador de las ventas futuras.

El promedio de ventas por mayorista en la muestra de 36 fue 3.6 cajas en el segundo mes, con desviación estándar de 2.4 cajas por mes.

a. ¿Qué distribución a posteriori, después de la muestra, debe asignar la gerencia

al promedio de ventas por mes de cada mayorista?

b. Suponga que para introducir el producto a todo el mercado se requieren 200 000 dólares para comprar equipo y para la publicidad. Debido a ciertos aspectos financieros, la gerencia no quiere llevar a cabo la introducción del producto si los beneficios no recuperan el costo de 200 000 dólares en el primer año. La empresa obtendrá un dólar de beneficio por cada caja que venda. ¿Qué decisión se debe tomar después de la muestra? ¿Cuál es el VEIP a posteriori?

8-4. Suponga una distribución normal con $\mu_0 = 20$ y σ_0 - 10 y que $a_p = 20$. El costo de una muestra de tamaño η es 10 + 2*n*, $\mu_{\tilde{v}}$ - 15 y C - 100 dólares.

a. Calcule el VEIP antes de la muestra.

b. Calcule el VEIM para η - 10, π - 25 y «-50.

c. ¿Cuál es el tamaño óptimo de muestra de las tres opciones anteriores y cuál es la GNE?

8-5. Remítase al problema 8-3. Suponga que la empresa aún no toma la muestra. Sin embargo, con base en su juicio y en su experiencia, la desviación estándar de las ventas mensuales por mayorista se estima en 2.5 cajas por mes.

a. Calcule el **VEIM** de una muestra de 36 mayoristas.

b. Suponga que cuesta 2500 dólares fabricar, con procesos especiales, el producto que se usará en la prueba de muestreo y otros mil dólares en costos fijos. El costo varia ble es de 100 dólares por mayorista de la muestra. ¿Deben realizar el muestreo? ¿Cuál es la GNE?

c. ¿Cuál es la GNE de una muestra de 50 mayoristas?

d. ¿Cuál es la GNE de una muestra de 75 mayoristas?

e. Con base en *(tí)*, (c) y *(d)*, ¿cuál es el tamaño óptimo aproximado de la muestra?

Problemas

8-6. Sea una distribución normal a priori con $\mu_0 = 500$ y $\sigma_0 = 30$. Se toma una muestra de tamaño $n = 441$, con $\bar{X} = 450$ y $\sigma_s = 210$. Calcule la media y la desviación estándar de la distribución a posteriori. Cuál de las muestras

8-7. siguientes contiene más información:

a. Una muestra de tamaño 100 de una población con desviación estándar de 50.

b. Una muestra de tamaño 64 de una población con desviación estándar de 40. Explique su respuesta.

El controlalor del taller ABC se quejaba de

8-8. que los vendedores de la compañía hacían pedidos que no eran rentables. La gerencia superior creía que un margen de beneficio razonable era el 15% del monto total de la factura. La queja del controlalor confundió a la gerencia, ya que éstos creían que estaban cerca de su objetivo de 15%. Específicamente, tenían una distribución normal para el "porcentaje de beneficios promedio" con una media del 15% y desviación estándar del 2%. Se seleccionó al azar una muestra de 50 trabajos; en la muestra, el beneficio promedio era del 10% y la desviación estándar era del 5%. Calcule la distribución normal apropiada a posteriori de la muestra. Remítase al

8-9. problema 7-16. Suponga ahora que el gerente pudiera efectuar una muestra de 10 instalaciones donde se usa la máquina de escribir inteligente. El costo del muestreo es de 10 dólares por observación (100 dólares para la muestra de 10). Suponga que σ_p - 400 horas.

a. ¿Cuál es el VEIM?

b. ¿Cuál es la GNE?

c. ¿Qué debe hacer el gerente?

8-10. Remítase al problema 7-19. Suponga que antes de decidir qué catálogo se usará, se imprimen 100 catálogos en color y se envían a una muestra de 100 clientes. El promedio de las

ventas a estos clientes fue de 7.40 dólares, con desviación estándar de cinco dólares. Con base en esta información y las probabilidad a priori del problema 7-19, ¿qué decisión debe tomarse? ¿Cuál es el VEIP a posteriori?

8-11. Remítase a los problemas 7-19 y 8-10. Suponga que no se ha llevado a cabo la muestra que se mencionó en el problema 8-10 y que la empresa de ventas por correo puede imprimir unos cuantos catálogos a color y enviarlos a una muestra de clientes. Entonces, las compras de estos clientes se podrían medir y sería posible obtener información acerca del efecto del catálogo a color. Por la experiencia de la empresa, se sabe que la desviación estándar aproximada de las compras de los clientes es de cinco dólares. Suponga que el costo del muestreo es de 500 dólares más cinco dólares por cada elemento de la muestra. ¿Cuál es el tamaño óptimo de la muestra? Para que el problema sea más sencillo, considere únicamente los siguientes valores de η: η - 0 (no hay muestra), $\eta = 64$, $\eta = 100$ y η - 225. Remítase a los problemas 7-19, 8-10 y 8-11.

8-12. Considere sólo una muestra de tamaño $\eta = 100$. ¿La diferencia entre el VEIP a priori de la muestra (problema 7-19) y el VEIP a posteriori a la muestra (problema 8-10) es igual al valor esperado de la información de la muestra (VEIM del problema 8-11)? ¿Deberían ser iguales? Explique su respuesta.

8-13. La Compañía Papelera Nacional (CPN) compra madera a productores independientes. Sus compradores tienen una distribución a priori de la producción por hectárea de pino con media = 100 000 metros de tabla y desviación estándar = 10 000 metros de tabla. Uno de los proveedores ha argumentado que su madera es mejor que el promedio; un estudio independiente de 25 hectáreas de su propiedad seleccionadas al azar indica un promedio de producción de 110 000 metros de tabla con desviación estándar de 5000 metros. El proveedor potencial vendería todo su terreno a CPN por 1080 dólares la hectárea. El precio normal que paga CPN es de 1000 dólares por hectárea, con lo que compra la madera a un promedio de un centavo por metro de tabla. ¿Deberá comprar CPN el terreno del proveedor a 1030 dólares la hectárea?

8-14. La compañía de manufactura ACMÉ se propone implantar un procedimiento de control de inventarios más elaborado para sus 10 000 artículos diferentes. La gerencia estima que el porcentaje promedio de ahorro en costo con los nuevos métodos será del 20%. También cree que una distribución a priori normal con media del 20% y desviación estándar del 8% describe de manera adecuada su opinión acerca de los ahorros en costo que se obtendrán realmente.

Los analistas de la compañía han estudiado los ahorros en costo de una muestra aleatoria de 100 artículos del inventario. El promedio de ahorro en costo en la muestra fue del 15%, con desviación estándar de 12%.

a. ¿Qué distribución a posteriori debe asig nar la gerencia al porcentaje promedio de ahorro en costo después de la muestra?
b. Suponga que el nuevo procedimiento cos tará aproximadamente un 5% de los cos tos anuales relacionados con el inventario. ¿Deberá implantarse el nuevo procedi miento?
c. ¿Cuál es el VEIP de la distribución a priori?
d. ¿Cuál es el VEIP de la distribución a pos teriori?

8-15. Remítase al problema 8-14. Suponga ahora que el costo para obtener el equilibrio es el 14%, en lugar del 5%.

a. ¿Debe implantarse ahora el nuevo procedi miento? ¿Por qué?
b. ¿Cuál es el VEIP de la distribución a prio ri?
c. ¿Cuál es el VEIP de la distribución a pos teriori?

8-16. Considere el problema 7-18. Suponga que el contratista puede hacer una estimación detallada de los costos antes de presentar la oferta. El costo de la estimación detallada es de 18 000 dólares. Con base en la experiencia en estas estimaciones detalladas, hay una probabilidad de % de que una estimación esté dentro del 3% del costo real.

¿Debe realizar la estimación detallada? ¿Cuál es la GNE?

Recomendación: Considere (0.03)(7.80) - 0.234 como $\sigma_{\bar{x}}$ y luego calcule el VEIM.

Problemas más difíciles

8-17. Una compañía que fabrica herramientas especiales pretende introducir un producto nuevo. La gerencia cree que cada uno de los mil centros de distribución de la compañía podría vender un promedio de 150 unidades; así mismo, hay una probabilidad de *Vi* de que las ventas promedio estén entre 100 y 200 unidades.

La herramienta nueva se vendería a cinco dólares cada una. La máquina A tiene un costo de alquiler de 100 000 dólares y un costo unitario de producción de dos dólares; la máquina B se alquila por 200 000 dólares y su costo unitario de producción es de un dólar.

En un intento por estimar la demanda con mayor precisión, el fabricante envió prototipos de la herramienta a 50 centros de distribución. El promedio de las ventas en cada centro fue de sólo 90 unidades, con desviación estándar de 60.

a. Antes de recopilar la información de la muestra, ¿cuál era la mejor decisión que podía tomar el fabricante? ¿Cuál era el VEIP?

b. ¿Cuál es la distribución a posteriori, des pués de la muestra, de la demanda prome dio por centro de distribución? ¿Cuál es la mejor acción? ¿Cuál es el VEIP posterior?

c. ¿Cuál era el VEIM antes de llevar a cabo la muestra?

8-18. Suponga que el costo total de tomar una muestra de cualquier tamaño es una cantidad fija, *K*. ¿Cuál sería el tamaño óptimo de la muestra?

8-19. El VEIP del ejemplo de las páginas 229-230 es de 7076 dólares (antes del muestreo); el VEIM es de 4918 dólares; pero, como se calculó en la página 227, el VEIP a posteriori para una muestra de tamaño η - 100 es 7000 dólares. Resuelva la paradoja aparente de este caso.

8-20. El editor de una revista deseaba publicar una edición en pasta dura de una selección de fotografías de su revista. La edición fotográfica se vendería principalmente por correo a las personas cuyos nombres aparecían en el directorio de la revista. El directorio no sólo incluía a los suscriptores, sino también a personas consideradas como posibles suscriptores. La gerencia creía que se podían vender gran cantidad de ejemplares, por la reputación de la revista y las excelentes críticas que habían recibido las secciones fotográficas cuando se publicaron por primera vez en la revista. Es más, muchas personas habían enviado cartas para proponer que se presentara una edición de este tipo.

Ya se había invertido dinero en la edición cuando se prepararon las fotografías y el texto para la revista. Sin embargo, se estimaba que ¿e gastarían otros 10 000 dólares. Además, se consideraba que el costo del diseño y la impresión del material publicitario y del envío por correo sería de 250 000 dólares. El directorio de la revista incluía cerca de dos millones de nombres (algunos de los cuales, por supuesto, estaban duplicados). Se propuso hacer dos envíos, con un costo por nombre de cinco centavos por concepto de correo. También se invertirían unos 50 000 dólares para el desarrollo del material publicitario.

El costo variable de manufactura del libro sería de dos dólares por ejemplar. El precio de venta se fijaría en tres dólares.

La gerencia aun no decidía acerca del proyecto editorial, por los altos costos iniciales. Las mejores estimaciones giraban alrededor de 250 000 ejemplares vendidos. La gerencia opinaba que había *Vi* de probabilidad de que las ventas estuvieran entre 200 000 y 300 000 ejemplares.

La gerencia se oponía a abandonar el proyecto, ya que la edición podría tener un alto valor en cuanto a prestigio. Por ello, se consideró la posibilidad de realizar un estudio de mercado antes de tomar la decisión final. Sería bastante sencillo seleccionar una muestra de personas del directorio de la revista y evaluar la aceptación de la edición.

Los costos de correo y otros costos variables sumaban 25 centavos por individuo de la

muestra. Sin embargo, era necesario imprimir material publicitario especial, a un costo de 13 000 dólares, sin importar el número de personas de la muestra. Se consideró adecuada una muestra de 2000 personas. Los especialistas en estadística de la compañía estimaron que el error estándar de la muestra de 2000 personas sería 10 000 libros (o sea, $\sigma\text{-}_{\gamma} = 10\,000$).

a. Con base en la información anterior, ¿cuá les son los beneficios esperados de la pu blicación de este libro? Si no toma en cuenta beneficios adicionales, como el va lor del prestigio, ¿debe publicarse el li bro? ¿Cuál es el valor esperado de la información perfecta (VEIP)?

b. ¿Cuál es el valor esperado de la informa ción de la muestra (VEIM)? ¿Cuál es la ganancia neta esperada del muestreo **(VEIM** —costo del muestreo)? ¿Debe lle varse a cabo el muestreo?

c. Suponga que la inversión de 13 000 dóla res en material publicitario reducirá el costo estimado del desarrollo de 50 000 a 40 000 dólares, si se lleva a cabo el envío completo (es decir, pueden recuperarse 10 000 de los 13 000 dólares si se publica el libro). El punto de equilibrio es ahora 250 000 libros. ¿Cuál es el VEIM de este caso? ¿Cuál es la ganancia neta del mues treo? *Recomendación:* Observe que si se toma la muestra, cambia la función de be neficios a posteriori y por lo tanto también varía el punto de equilibrio a posteriori.

8-21. La Superintendencia de Tránsito de la Bahía de Massachusetts (STBM) ha sido autorizada por la legislatura estatal para construir una vía de circulación rápida entre la ruta 128 y el centro de la ciudad de Boston, pasando por Cambridge. La legislatura ha ofrecido subsidiar los costos de construcción y operación de la vía, pero las leyes estatales exigen que la vía no incurra en pérdidas (tomando en cuenta el subsidio). La STBM ha calculado que si 10 000 viajeros utilizaran la vía cada día hábil (viaje de ida y vuelta), lograrían el equilibrio, si hay subsidio. La variación en el valor actual de los ingresos es de 150 dólares por cada viajero por encima o debajo del punto de equilibrio.

Los funcionarios de la STBM estiman que del total de 100 000 personas que viajan diariamente del área en cuestión a la ciudad de Boston, aproximadamente el 12% (12 000) usaría la nueva vía; sin embargo, no están muy seguros de su estimación del número de viajeros, por lo que consideran que una distribución a priori con $\mu_0 = 0.12$ y $\sigma_0 = 0.04$ describe en forma adecuada lo que saben.

La STBM piensa tomar muestras de la población de viajeros para obtener mejor información. Las muestras se toman en grupos de 100 y la desviación estándar de las proporciones muéstrales se han estimado como $\sigma_{\rho} =$ 0.08 para cada grupo de 100; por ejemplo, si se hacen 16 muestras de grupos de 100, la $\sigma\text{-}_{\bar{}}$ apropiada sería σ_{Σ} - O.O8//Ī7Γ = 0.08/4 = 0.02. El costo de entrevistar a cada grupo de cien viajeros es de 900 dólares.

a. Si no toma en cuenta la ley estatal contra las pérdidas y supone que hay que tomar de inmediato una decisión (no puede efec tuarse el muestreo), ¿deberá la STBM construir la vía? ¿Cuál es la pérdida de oportunidad esperada de la mejor acción?

b. Considere una muestra de 16 grupos (de 100 viajeros cada uno). ¿Cuál es el VEIM antes de tomar la muestra?

c. Calcule la GNE para *(b).*

d. Considere ahora los siguientes tamaños de muestras (todos se refieren a grupos de 100): 1, 9, 16. Calcule el VEIM y la GNE. ¿Cuál de los tamaños anteriores es el ópti mo para la muestra?

e. Si se usa el tamaño óptimo de la muestra, ¿se *asegurará* que de construirse la vía, no operará con pérdidas? Comente acerca del efecto de la ley estatal sobre este tipo de decisión?

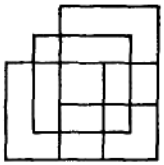
8-22. Remítase al problema 8-21. Suponga que las entrevistas muéstrales se realizan secuencialmente a grupos de 100 personas y que la STBM puede detener las entrevistas en cualquier momento. Para ser más específicos, suponga que se entrevistó a los primeros cuatro grupos y que el promedio de viajeros de los cuatro grupos es el 20% (0.20). *a.* ¿Cuáles son los parámetros de la distribución a posteriori de la fracción de viajeros?

b. Con base en la distribución a posteriori, ¿cuál es el VEIP?

c. Compare el VEIP actual (de *b)* con el costo de entrevistar a los siguientes 100 viajeros. No efectúe los cálculos del VEIM; ¿puede "adivinar" si sería económico que la STBM cancelara las entrevistas siguientes y tomara en este momento la decisión?

d. Calcule ahora el VEIM del siguiente grupo de 100 viajeros. ¿Es mayor o menor que el costo del muestreo?

CAPÍTULO



9 Teoría de juegos

En este capítulo se desarrollará un modelo de decisión que se aplica principalmente a las relaciones entre dos entidades (individuos u organizaciones) independientes que compiten entre sí. Este análisis se deriva de la monumental obra de J. von Neumann y O. Morgenstern, *Theory of Games and Economic Behavior* (Teoría de juegos y comportamiento económico).[1]

Aunque la teoría de juegos no se usa mucho en la industria, es conveniente conocer el tema, pues presenta conceptos que pueden ser de utilidad para la toma de decisiones. Hay que tomar muy en cuenta las hipótesis de cada uno de los modelos de la teoría de juegos, ya que con frecuencia limitarán la aplicación del modelo.

Juegos

En el contexto de este capítulo, la palabra *juegos* es un término genérico que incorpora situaciones de conflicto de un tipo particular. En estas situaciones, el éxito de una de las partes tiende a estar a expensas de las otras, por lo que tienen una relación de conflicto o competitiva. Sin embargo, desde el punto de vista de todos los involucrados, es preferible aceptar uno de los muchos acuerdos posibles que no lograr ningún acuerdo, por lo cual la cooperación es de interés mutuo. Las características esenciales de esta situación las comparten muchos casos de conflicto social o de negocios, por lo cual los aspectos matemáticos de los juegos son de interés general.

En este capítulo se presentará un juego de dos personas con suma cero y juegos de dos personas con suma no constante. Las matemáticas se complican con rapidez como respuesta a pequeñas modificaciones del problema, por lo que se analizarán situaciones relativamente sencillas.

---

[1] J. von Neuman y O. Morgenstem, *Theory of Games and Economic Behavior,* Princeton, Princeton University Press, 1944.

Juegos de dos personas con suma cero

En un juego de dos personas con suma cero, los intereses de los dos contrincantes se oponen de tal manera que la suma de sus beneficios es cero para todos los resultados del juego. Un ejemplo de un juego con suma cero sería el caso de dos personas que apuestan monedas, en el cual cada persona tiene una función lineal de la utilidad con respecto al dinero para un intervalo de pérdidas y ganancias factibles. La cantidad de dinero (utilidad) que gana uno es igual a la cantidad de dinero (utilidad) que pierde el otro.

Una solución importante que debe estudiarse es la **solución minimax,** que minimiza la máxima pérdida posible (o maximiza la mínima ganancia posible). Una de las características de los juegos de dos personas con suma cero es que existe una solución minimax única. La mayor ventaja de la solución minimax en esta situación es que *es la mejor opción del decisor si el otro participante ha escogido una solución minimax*. A diferencia de lo que sucede en un juego contra la naturaleza, donde la única ventaja de la solución minimax es una forma de conservadurismo, es muy probable que el procedimiento minimax sea deseable en un juego contra un oponente inteligente. Sin embargo, puede ser que no se obtenga el mejor resultado si el oponente no utiliza una solución minimax.

Utilizaremos una tabla de pagos (Tabla 9-1) para mostrar el beneficio del participante cuyas estrategias se presentan en la columna de la izquierda. El beneficio del oponente (cuyas estrategias o acciones se presentan en la fila superior) no se indica, ya que son los valores negativos de los pagos que se especifican.

En los márgenes de la tabla se encuentran los mínimos de las filas y los máximos de las columnas. La solución minimax intenta maximizar un nivel de seguridad para los jugadores (minimizar la máxima pérdida posible o maximizar la mínima ganancia posible).

Para cada una de las estrategias del jugador I se encuentra la ganancia mínima que se obtendría de enfrentarse a la mejor estrategia del jugador Ií (los mínimos de las filas) y para cada estrategia del jugador II se encuentra la ganancia máxima del jugador I (que es también la pérdida máxima del jugador II), la cual se presenta como máximo de la columna. El jugador I escogerá el mayor de los valores mínimos de las filas (la estrategia I, en este caso) y el jugador II escogerá el valor

Tabla 9-1 Ganancias del jugador I

II / *I*	*Estrategia 1*	*Estrategia 2*	*Mínimo de la fila*
Estrategia 1	10	14	10
Estrategia 2	7	12	7
Máximo de la columna	10	14	

menor de los máximos de las columnas (la estrategia 1). Puesto que el máximo iguala al minimax (los dos valen 10), hay un equilibrio y se dice que estos valores son un par "de equilibrio". Si uno de los jugadores trata de salir del equilibrio sin que el otro cambie de posición, el que se mueve pasará a una posición inferior. Una **estrategia pura** (es decir, que cada uno de los jugadores elija sólo una estrategia) lleva a un juego estrictamente determinado en el cual el valor máximo de los mínimos de las filas es igual al mínimo de los máximos de las columnas.[2] Al valor 10 se le llama **punto de silla.**

Hay que observar que los márgenes de la tabla 9-1 indican el beneficio mínimo garantizado del jugador I o los costos máximos garantizados del jugador II. Puesto que los valores de la tabla pueden ser expectativas, éstas pueden ser valores esperados.

Ejemplo: Compañía contra sindicato

Dentro de poco tiempo vencerá el contrato entre su compañía y el sindicato, por lo cual hay que negociar uno nuevo, preferentemente antes de que concluya el otro. Usted forma parte del grupo de gerentes que está a cargo de seleccionar a los representantes de la compañía y determinar la estrategia que deben seguir durante las negociaciones. Después de considerar la experiencia en otros años, el grupo está de acuerdo en que las estrategias factibles para la compañía son:

Cj = Ataque sin miramientos; negociaciones agresivas

C_2 = Método lógico, de razonamiento C_3 = Estrategia

legalista C_4 = Estrategia conciliatoria

¿Cuál es la mejor estrategia para la compañía? La respuesta depende de la estrategia que elija el sindicato, la cual no se conoce. Pero se puede suponer, por los antecedentes del sindicato, que puede usar uno de los siguientes procedimientos:

í/i = Ataque sin miramientos; negociaciones agresivas

U_2 = Método lógico, de razonamiento $í/_3$ = Estrategia

legalista $í/_4$ = Estrategia conciliatoria

Ahora hay que considerar las consecuencias de cada una de las estrategias, condicionadas por el hecho de que el sindicato adopte una de sus estrategias posibles. Con la ayuda de un mediador externo, se construye la tabla 9-2.

---

[2] Este enunciado es válido mientras las estrategias del decisor, cuyas ganancias positivas se describen en la matriz de pagos, se indiquen en la columna de la matriz; de lo contrario se tendrá que modificar la descripción de un juego estrictamente determinado por estrategias puras.

Tabla 9-2 Ganancias condicionales del sindicato (costos para la compañía)

Estrategias del sindicato	*Estrategias de la compañía* C_1	C_2	C_3	C_4	*Mínimos de las filas*	
U_1	+20¢	+15¢	+12¢	+35¢	+12¢	←
U_2	+25	+14	+ 8	+10	+ 8	
U_3	+40	+ 2	+10	+ 5	+ 2	
U_4	− 5	+ 4	+11	0	− 5	
Máximos de las columnas	+40¢	+15¢	+12¢	+35¢		
			↑			

Si la compañía adopta la estrategia C_v y el sindicato escoge la estrategia t/,, el contrato final supondrá un aumento de 20 centavos por hora en los salarios y prestaciones del trabajador promedio. Si el sindicato elige la estrategia *Ui* como respuesta a *C*, asegurará un aumento de 25 centavos por hora; la estrategia t/$_3$ es aún mejor para el sindicato frente a la estrategia C_x de la compañía, ya que genera un aumento de 40 centavos por hora. Si el sindicato usa £/$_4$ frente a C_u terminará con una reducción de 5 centavos por hora en los salarios. Las otras entradas de la tabla tienen significado similar. La compañía y el sindicato deben decidir cuál será la estrategia global antes de comenzar las negociaciones; no se puede escoger una estrategia y luego cambiarla cuando se comprometa la otra parte. Suponga que la función de utilidad del dinero que usa la compañía es aproximadamente lineal, por lo cual estas cifras pueden servir como índice de utilidad para la compañía.[3] El mediador informa que la dirección del sindicato también ha considerado estrategias alternativas y los resultados que pueden obtener de cada una. También informa que el sindicato ha elaborado una tabla bastante parecida a la tabla 9-2 y que posee información similar. Suponga que el sindicato también tiene una función de utilidad lineal.

En estas condiciones, ¿qué deben hacer los negociadores? La compañía preferiría que el sindicato fuera conciliador (í/$_4$) como respuesta a su ataque agresivo *(C{),* con el resultado de la reducción de 5 centavos por hora en salarios. Pero si la compañía usa C_u es muy posible que el sindicato elija un método legalista (l/$_3$) y "golpee" a la compañía con un aumento de 40 centavos. Desde el punto de vista de la compañía, la segunda mejor solución sería que tanto la compañía como el sindicato sean amables (C_4, í/$_4$); pero, si la compañía escoge C_4, el sindicato puede seleccionar una estrategia agresiva (t/j) y obtener una aumento de 35 centavos en los salarios.

El sindicato tiene los mismos problemas: Si adopta í/$_3$ con la esperanza de un aumento de 40 centavos, la compañía puede seleccionar un método de razona-

[3] Por lo general, éste no será el caso, a menos que los costos totales sean una parte relativamente sin importancia de los costos totales de la compañía y las negociaciones no tengan mucha importancia emotiva o simbólica. Es probable que no sea así cuando la compañía y el sindicato sean grandes; en este caso hay que cambiar las posibles modificaciones en salarios a términos de utilidad.

miento (C_2) que sólo genere dos centavos para el sindicato. Es obvio que el sindicato nunca seguirá la estrategia conciliadora (í/$_4$), ya que siempre ganaría más con U_u sin importar la estrategia que use la compañía. Puede decirse que U_x *domina* a la estrategia U_4.

La estrategia minimax es una regla que pueden seguir los participantes en esta situación. La compañía podría adoptar la estrategia que minimice el mayor aumento de salarios que tendría que otorgar, sin importar la acción del sindicato. Si el sindicato sigue esta regla, escogería la estrategia que maximizara el aumento mínimo de los salarios. En el ejemplo, la estrategia minimax para la compañía es C_3, con aumento de salarios máximo de 12 centavos; para el sindicato sería U_u con aumento mínimo de 12 centavos. En la tabla 9-2, los 12 centavos son el máximo de la columna C_3 y el mínimo de la fila í/$_1$; por lo que es la solución de equilibrio para esta situación. En términos de la teoría de juegos, 12 es el valor del juego. Las estrategias puras (í/,, C_3) proporcionan el equilibrio de este caso, ya que si la compañía usa C_3, la mejor defensa del sindicato es U_i; si el sindicato escoge U_x, C_3 es la mejor defensa de la compañía.[4]

Estrategias mixtas

No todas las situaciones de conflicto tienen un equilibrio minimax que puede lograrse con estrategias puras. Podemos modificar la tabla 9-2 a este caso con sólo cambiar una de las cantidades. Si la intersección de C_3 y í/$_3$ fuese ahora +19 centavos, en lugar de +10 centavos, +12 centavos ya no sería el máximo de la columna, como se muestra en la tabla 9-3. Ahora C_2 es la estrategia que minimiza la pérdida máxima de la compañía; el máximo del sindicato es aún U_x. Sin embargo, la intersección de estas estrategias no es un punto de equilibrio, porque +15 centavos no es el máximo de la columna y el mínimo de la fila. Si el sindicato adoptara la estrategia {/,, la compañía preferiría la estrategia C_3, no C_2. Pero, si la compañía escoge la estrategia C_3, al sindicato le gustaría más U_3 que U_1 Si el sindicato selecciona í/$_3$, la estrategia óptima de la compañía será C_2, pero C_2 es la opción contra la cual el sindicato usaría U_u como se señaló al principio. Se ha cerrado el círculo. Las estrategias puras *(U_u* C_2) ya no son un par de equilibrio; no son las mejores contra la otra.

Reduzcamos la tabla 9-3 a las estrategias que se muestran en la tabla 9-4. Esto se hace por medio de la eliminación sucesiva de las *estrategias dominadas*. La estrategia í/$_4$ del sindicato es dominada por U_u por lo cual U_4 puede eliminarse. La estrategia C, de la compañía es dominada por C_2 o C_3; por lo tanto, también C_f puede eliminarse. Con lo anterior, queda la estrategia U_2 del sindicato, dominada por U_u y las únicas estrategias que quedan para el sindicato son U, y U_3. Al llegar a este punto, la estrategia C_2 domina a C_4 y las únicas estrategias para la compañía son C_2 y C_3.

[4] Un juego con suma cero puede tener más de un par de equilibrio; no obstante, todos los pares de equilibrio tendrán el mismo valor y los jugadores serán indiferentes ante ellos.

Tabla 9-3 Ganancias condicionales para el sindicato (costos para la compañía)

Estrategias del sindicato	*Estrategias de la compañía*				*Mínimos de las filas*	
	C_1	C_2	C_3	C_4		
U_1	+20¢	+15¢	+12¢	+35¢	+12¢	←
U_2	+25	+14	+ 8	+10	+ 8	
U_3	+40	+ 2	+19	+ 5	+ 2	
U_4	− 5	+ 4	+11	0	− 5	
Máximos de las columnas	+40¢	+15¢	+19¢	+35¢		
		↑				

Tabla 9-4 Estrategias no dominadas

Estrategias del sindicato	*Compañía*	
	C_2	C_3
U_1	+15¢	+12¢
U_3	+ 2	+19

Ahora el objetivo es obtener una *mixtura de probabilidad* de las estrategias (es decir, una **estrategia mixta)** que mejore la posición de las dos partes con respecto a las estrategias puras disponibles. Supongamos que la compañía puede usar la estrategia C_2 la mitad del tiempo, al azar, y la estrategia C_3 la otra mitad del tiempo, también al azar. Entonces, si el sindicato usara la estrategia U_1 el aumento esperado de los salarios sería:

$$\tfrac{1}{2}(+15¢) + \tfrac{1}{2}(+12¢) = +13\tfrac{1}{2}¢$$

Si el sindicato usara U_3, el aumento esperado sería:

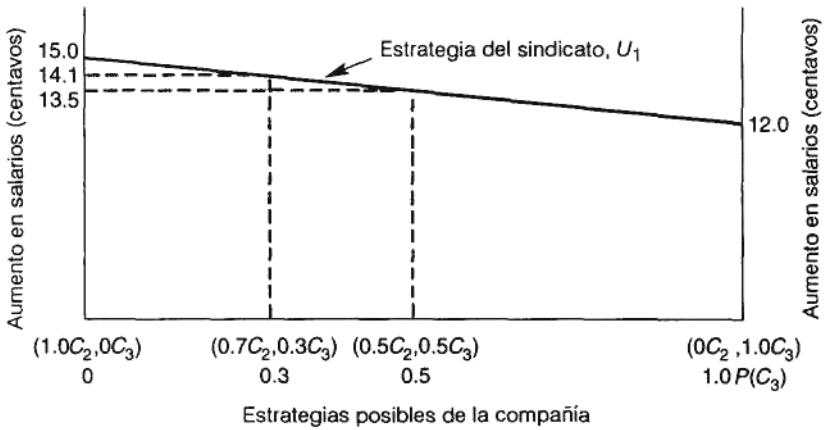
$$\tfrac{1}{2}(+2¢) + \tfrac{1}{2}(+19¢) = +10\tfrac{1}{2}¢$$

Ambas opciones son preferibles para la compañía a los +15 centavos que indica la regla minimax. Por supuesto, el sindicato también puede adoptar una estrategia mixta. Una de las grandes aportaciones de Von Neumann fue la demostración de que todo juego de dos personas con suma cero tiene un valor de equilibrio único, cualquiera que sea el número de estrategias disponibles para los participantes. En un caso especial, la solución comprenderá estrategias puras, como ocurrió al principio; si no sucede así, se sabe que existe el equilibrio para algún par de estrategias *mixtas*.

Solución gráfica

Un método sencillo e instructivo para encontrar la solución del caso de dos personas y dos estrategias es el método geométrico propuesto por Luce y Raif-

Figura 9-1

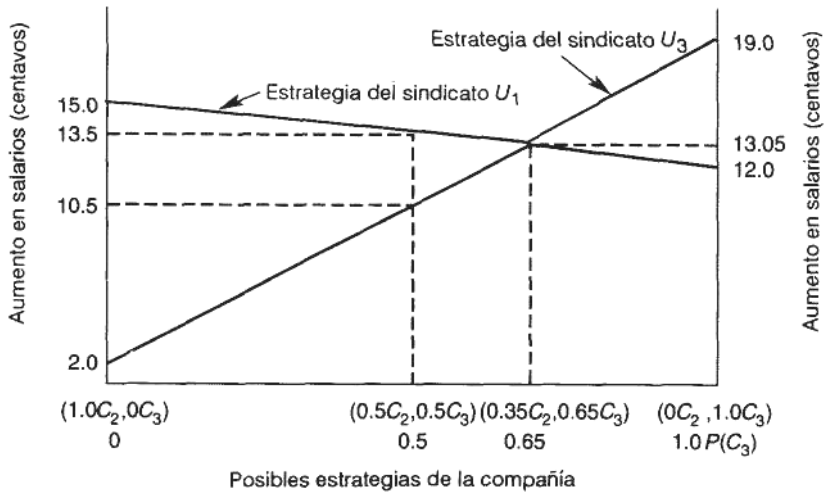


fa.[5] Primero se obtiene la estrategia mixta óptima para la compañía. Considere la figura 9-1, en la cual pueden evaluarse las estrategias mixtas posibles para la compañía contra la estrategia U_1 del sindicato. Los aumentos posibles se muestran en los ejes verticales, mientras que la escala del eje horizontal está en función de las estrategias mixtas de la compañía, desde el límite de $(1.0C_2,0C_3)$, la estrategia pura C_2, hasta el límite $(0C_2, 1.0C_3)$, la estrategia pura C_3. Las ganancias en los extremos son +15 y +12 centavos, como se indica en la tabla 9-4. La estrategia mixta permite seleccionar cualquier punto de la línea que una +15 centavos y +12 centavos como pago en respuesta a la estrategia U_f del sindicato. Por ejemplo, si quisiéramos escoger +13.5 centavos como respuesta a U, seleccionaríamos una estrategia mixta $(0.5C_2, 0.5C_3)$. Si se escogiera la estrategia mixta $(0.7C_2,0.3C_3)$, el resultado sería +14.1 centavos. Cualquier punto de la recta de la figura 9-1 es factible si el sindicato sigue la estrategia U,.

En la figura 9-2 se construye la línea de resultados de las estrategias mixtas para U_3 y se le considera en conjunto con la línea U_x que se desarrolló en la figura 9-1. La nueva línea indica las ganancias para el sindicato con la estrategia U_3, suponiendo que la compañía elige una estrategia mixta entre $(1.0C_2,0C_3)$ y $(0C_2, 1.0C_3)$. Por ejemplo, si la compañía adopta $(0.5C_2,0.5C_3)$, el aumento es de 13.5 centavos si el sindicato adopta la estrategia U_x y de 10.5 centavos si escoge í/$_3$. Desde el punto de vista de la compañía, el resultado máximo de esta estrategia es 13.5 centavos. Para las estrategias mixtas entre $(1.0C_2, 0C_3)$ y $(0.35C_2, 0.65C_3)$, el sindicato obtiene el mayor aumento si sigue la estrategia Uy, en el caso de las estrategias mixtas entre $(O.35C_2, 0.65C_3)$ y $(0C_2, 1.0C_3)$, el aumento máximo del

[5] R. D. Luce y H. Raiffa, *Games and Decisions,* Nueva York, John Wiley & Sons, 1957.

Figura 9-2

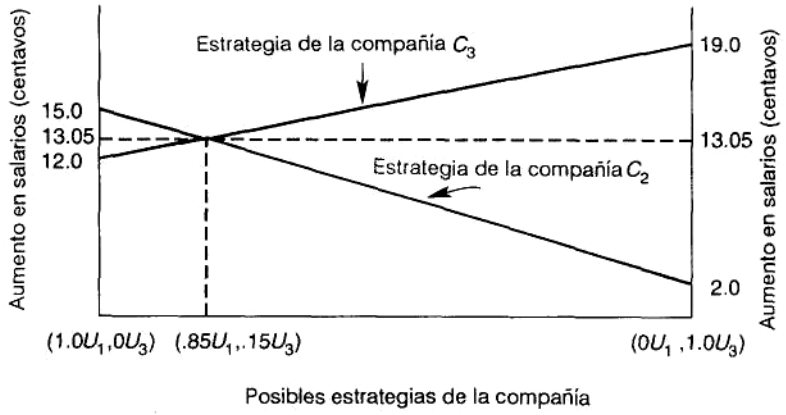


sindicato se relaciona con la estrategia t/3. Las líneas punteadas en la figura 9-2 indican el conjunto de aumentos máximos que la compañía tendría que otorgar, suponiendo que el sindicato siempre adopte la estrategia más favorable como respuesta a una estrategia mixta de la compañía. Si la compañía siguiera la regla de minimización del máximo aumento que ofrecería, adoptaría la estrategia mixta ($0.35C_2$, $0.65C_3$) y daría al sindicato un aumento de O.35(15Φ) + 0.65(12Φ) = 13.05Φ si el sindicato escogiera U_u o de 0.35(2Φ) + 0.65(19Φ) = 13.05Φ si la opción del sindicato fuera U_3. Cualquiera que sea la acción del sindicato, no puede obtener más de 13.05 centavos de aumento salarial por hora (es decir, el mejor aumento promedio es de 13.05 centavos).

¿Qué estrategia se espera que siga el sindicato? Según la filosofía minimax, el sindicato supondrá que la compañía erigirá la defensa más sólida posible contra la estrategia que seleccione el sindicato. En la figura 9-3 se muestran las estrategias disponibles para el sindicato y el conjunto de aumentos mínimos que se relacionan con ellas. Si la compañía adopta la estrategia C_3, los aumentos que obtiene el sindicato para las distintas estrategias mixtas se indican con la línea que une 12 centavos con 19 centavos. Esta línea indicaría el aumento mínimo para las estrategias entre *(1.0*U_u 0í/3) y (0.15 U_u 0.15t/3). La línea que une 15 centavos con 2 centavos define los aumentos que se obtendrían como respuesta a varias estrategias mixtas del sindicato si la compañía elige la estrategia C_2. Esta estrategia ofrece el menor aumento de salarios para una acción del sindicato en el intervalo (0.85 U_1, O.15U_3) a (0. U_u 1.0U_3). Si el sindicato quiere maximizar el aumento mínimo, adoptará la estrategia (0.85U_1 , 0.15U_3), con lo que obtiene un aumento esperado de:

$$0.85(15¢) + 0.15(2¢) = 13.05¢$$

Figura 9-3



si la compañía adopta la estrategia C_2, y de:

$$0.85(12¢) + 0.15(19¢) = 13.05¢$$

si la compañía selecciona la estrategia C_3. La cantidad de 13.05 centavos es un punto de silla de este juego y representa la solución de equilibrio.

Hay que recordar que en el ejemplo se supone que las medidas monetarias son también medidas de la utilidad. La cifra 13.05 es la utilidad esperada del costo de la compañía al seguir la estrategia mixta y también es la utilidad esperada del aumento en salarios para el sindicato. Si no se toma en cuenta que 13.05 es una medida de la utilidad esperada (y el valor monetario esperado), entonces se puede caer en la trampa de creer que la estrategia mixta no es una estrategia minimax, porque uno de los sucesos posibles es un aumento de 19 centavos con la estrategia mixta pero el aumento máximo que se obtiene al seguir la estrategia C_2 es de sólo 15 centavos. Por ejemplo, la utilidad esperada del costo para la compañía de í/$_3$ es igual a:

$$0.35l/(2C) + 0.65í/(19Φ) = 0.35(2) + 0.65(19) = 13.05$$

La cifra de 13.05 es una medida de la utilidad esperada y, como tal, nos lleva a la conclusión de que la estrategia mixta da como resultado el menor costo máximo para la compañía y el mayor aumento mínimo para el sindicato (en función de la utilidad esperada o, lo que es igual en este ejemplo, el valor monetario esperado).

Solución algebraica

Se puede obtener una solución algebraica, en vez de gráfica, para determinar la probabilidad que dará lugar a que la utilidad esperada, desde el punto de vista del

sindicato, sea independiente de la estrategia de la compañía. Así, no importa cuál sea la estrategia que use la compañía, la utilidad esperada de la estrategia del sindicato será la misma. Suponga que el sindicato usa un mecanismo aleatorio que genera una probabilidad de ρ para la estrategia U_x y de $(1 - p)$ para U_3.

Si la compañía usa la estrategia C_2, la utilidad esperada para el sindicato es (la Tabla 9-4 es la fuente de las cifras):

$$E(U\backslash C_2) = 0.15/\text{J} + 0.02(1 - p)$$ Si la compañía

emplea la estrategia C_3, la utilidad esperada del sindicato es:

$$E(U\backslash C_3) = 0.12/7 + 0.19(1 - p)$$

Iguale los dos beneficios esperados y resuelva para p:

$$\begin{aligned} 0.15p + 0.02(1 - p) &= 0.12p + 0.19(1 - p) \\ 0.03p &= 0.17(1 - p) \\ p &= \frac{17}{20} = 0.85 \end{aligned}$$

La utilidad esperada de la estrategia mixta del sindicato con $p = 0.85$ es:

$$\begin{aligned} E(U|C_2) = E(U|C_3) &= 0.15\left(\frac{17}{20}\right) + 0.02\left(\frac{3}{20}\right) = \frac{2.55 + 0.06}{20} \\ &= \frac{2.61}{20} = 0.1305 \text{ o } 13.05¢ \end{aligned}$$

Este valor esperado es mayor que los valores mínimos que se obtendrían al seguir una estrategia pura.

Al resolver el mismo problema desde el punto de vista de la compañía, sea ahora ρ la probabilidad de que la *compañía* escoja la estrategia C_2. Los costos esperados para las dos estrategias del sindicato son:

$$\begin{aligned} E(C|U_1) &= 0.15p + 0.12(1 - p) \\ E(C|U_3) &= 0.02p + 0.19(1 - p) \end{aligned}$$

Al igualar las dos expresiones y resolver para p:

$$\begin{aligned} 0.15p + 0.12(1 - p) &= 0.02p + 0.19(1 - p) \\ 0.13p &= 0.07(1 - p) \\ p &= \frac{7}{20} = 0.35 \\ 1 - p &= 0.65 \end{aligned}$$

Con una p de $^{7}/_{20}$ para la estrategia mixta de la compañía, el costo esperado para la compañía es igual al valor esperado para el sindicato:

$$\begin{aligned} E(C|U_1) = E(C|U_3) &= 0.15\left(\frac{7}{20}\right) + 0.12\left(\frac{13}{20}\right) = \frac{1.05 + 1.56}{20} \\ &= 0.1305 \text{ o } 13.05¢ \end{aligned}$$

Este costo esperado es independiente de la estrategia del sindicato.

El método de solución algebraica puede usarse para resolver estrategias mixtas cuando hay más de dos acciones posibles, mientras que la solución gráfica que se mostró antes se limita a juegos en los que por lo menos uno de los jugadores sólo tiene dos opciones.

Solución de programación lineal

El problema de encontrar la estrategia mixta de equilibrio también se puede formular como un problema de programación lineal. Con esto se obtienen grandes ventajas en lo que se refiere a cálculos si el número de estrategias puras disponibles para los jugadores es muy grande, ya que existen programas de computación eficientes para la resolución de problemas de programación lineal.

Evaluación de la estrategia minimax

El criterio de decisión minimax no es muy deseable cuando se toman decisiones en situaciones de incertidumbre (juegos contra la naturaleza) (véase Cap. 5). Pero, sí es razonable en un juego de dos personas con suma constante en contra de un oponente inteligente, ya que ofrece al participante la máxima seguridad. A usted le asegura un resultado mínimo y uno máximo para su oponente, sin importar el comportamiento del contrincante. Usted permanece indiferente ante la estrategia que seleccione su oponente, pues está preparado para cualquier contingencia.

La estrategia minimax tiene un atractivo especial para los estudiantes becados que se preparan para exámenes, los entrenadores de fútbol y la mayoría de funcionarios de crédito y banqueros. Pero, no es una buena estrategia para aquellas personas que piensan que pueden superar al contrincante y están dispuestas a aceptar el riesgo de tomar la ofensiva en juegos con suma distinta de cero.

Algunos analistas critican la idea de usar una estrategia mixta para decisiones empresariales "únicas". Por ejemplo, usted podría imaginar la reacción de un gerente experto si le recomienda adoptar una estrategia de ventas contra un competidor (cambios en precios, presupuesto para publicidad, etcétera) en la cual la decisión dependa del giro de una ruleta o de otra herramienta generadora de números aleatorios.

Aunque no hay respuestas directas a esta crítica, sí hay aspectos importantes de la teoría de juegos que deben tomarse en cuenta. Recuerde que una de las hipótesis de la teoría de juegos indicó la existencia de información perfecta para ambos oponentes acerca de las estrategias y ganancias (o beneficios) del otro. En esta situación la estrategia mixta es una forma de ocultar sus intenciones. Pocas veces existe esta información perfecta en el mundo real. Su oponente no sabe cuáles son sus estrategias y resultados, por lo cual no es necesario ocultarlos. La incertidumbre que existe sirve, de cierta manera, como proceso aleatorio.

En segundo lugar, si no hay una solución de estrategia pura, el jugador es, en cierta forma, explotable. Es decir, si usted adopta una estrategia pura, hay alguna

Tabla 9-5 Tabla de resultados que presenta las ganancias de las dos empresas

I \ II	*No anunciarse*	*Anunciarse*
No anunciarse	+ 2 + 2	+ 5 − 15
Anunciarse	− 15 + 5	− 10 − 10

estrategia que puede usar su oponente para explotarle o hacerle daño. A la estrategia mixta se le puede considerar como un medio de compromiso o de precaución contra la explotación.

Juegos con suma distinta de cero

En la mayoría de las situaciones de conflicto entre dos personas, la suma de los beneficios de los participantes no será una constante para todos los resultados del juego. Algunas soluciones ofrecerán mayor satisfacción conjunta que otras. A estos juegos se les denomina juegos con suma distinta de cero. En este capítulo (véase Problema 9-18) se presenta un ejemplo famoso de este tipo de problemas, llamado el "dilema del prisionero".

Suponga que dos empresas se enfrentan a una decisión acerca de anunciarse o no anunciarse. Ambas empresas sólo tienen dos decisiones posibles: no anunciarse o anunciarse. La tabla 9-5 indica los resultados.

Los números de la tabla se refieren a los beneficios de las dos empresas para cada par de decisiones: la utilidad de la empresa I se muestra en la parte inferior izquierda de los cuadros y la utilidad de la empresa II se muestra en la parte superior derecha. Si la empresa I se anuncia y la empresa II no lo hace, la empresa I tendrá utilidad de 5 y la empresa II, utilidad de -15.

Cualquiera que sea la decisión de la empresa I, le irá mejor a la empresa II si se anuncia. Es decir, si la empresa I no se anuncia, sí lo hará la empresa II, ya que prefiere un resultado de cinco a un resultado de dos. Si la empresa I se anuncia, también lo hará la empresa II, pues prefiere un resultado de -10 a uno de -15. De esta manera, la estrategia de anunciarse domina a la de no anunciarse en el caso de la empresa II, por lo que ésta elegirá la decisión de anunciarse. Sucede exactamente lo mismo con la empresa I, ya que la decisión que debe tomar es la misma que la de la empresa II. Tanto la empresa I como la II están dirigidas a anunciarse por un proceso de decisión racional e incurrir en pérdidas de -10 cada una. Si no fueran tan "racionales", podrían seguir la estrategia dominada de no anunciarse y obtener resultados de +2 cada una.

Por supuesto, el análisis anterior presupone que las dos partes no pueden cooperar (es decir, comunicar sus intenciones), ya que esto cambiaría la naturaleza

del juego. También supone que es un juego único y que las partes no pueden tener un proceso de aprendizaje. Es posible que las empresas I y II aprendan de la desafortunada experiencia de su primer juego y cooperen en un juego posterior, incluso si no hubiera comunicación.

Este ejemplo ilustra un juego de dos personas con suma distinta de cero. Aunque existe un tipo de solución, porque la decisión de anunciarse domina a la de no anunciarse, no es una solución satisfactoria. Un par de jugadores no racionales podrían llegar a la solución más deseable en la cual ninguno se anuncia. Los juegos con suma distinta de cero muchas veces no tienen soluciones satisfactorias tan fáciles de determinar.

Resultados inciertos

En el ejemplo anterior los resultados eran cantidades seguras, pero es posible que los resultados de un juego estén sujetos a distribuciones de probabilidad. Por ejemplo, en vez de que la empresa II sepa que perdería 10 si las dos empresas se anuncian, se podría decir que el resultado sería una pérdida de 40 con probabilidad de 0.5 o una ganancia de 20 con probabilidad de 0.5. El valor esperado es:

$$0.5(-40) + 0.5(20) = -10$$

Cuando los resultados se obtienen de procesos probabilísticos se requiere un cálculo adicional. Antes de analizar las decisiones posibles, el valor esperado de cada par de decisiones se calcula y se introduce en la tabla. Hay que recordar que se usan valores medios de utilidad y no valores monetarios esperados.

Oferta competitiva: Maldición del ganador[6]

Imagine que tiene un frasco lleno de dinero (monedas) y que cada persona del aula de clases puede ofrecer una cantidad de dinero por el privilegio de ser dueño del frasco. El profesor Richard Thaler ha realizado varias veces este experimento en Cornell University. En todos los casos la oferta ganadora ha sido mayor que el valor de las monedas del frasco. Éste es un ejemplo de la maldición del ganador: el ganador tiene una probabilidad elevada de perder dinero en una situación de ofertas competitivas en las cuales no se conoce con certeza el valor del artículo.

En la realidad, las empresas hacen ofertas para obtener el derecho de perforar pozos petroleros y la empresa más optimista es la que gana el concurso. La empresas también hacen ofertas para apoderarse de otras empresas; una vez más, gana la que sea más optimista.

El monto de la sobreoferta es una función del número de oferentes. Al aumentar el número de participantes, será mayor la tendencia del ganador a exceder el valor

[6] Para conocer el análisis teórico, vése J. H. Kagel y D. Levin, "The Sinner's Curse and Public Information in Common Valué Auctions", *The American Economic Review,* págs. 894-920, diciembre de 1986.

del bien que se subasta. Por esta razón, muchas compañías petroleras se unirán para presentar ofertas conjuntas, en vez de que cada empresa compita por su cuenta. Así reducen en un 50 a 75% el número de ofertas.

Otra estrategia que se sigue es determinar un valor estimado y luego establecer el monto inicial de las ofertas muy por debajo del valor esperado. Aunque la probabilidad de ganar se reduce, sí aumenta la probabilidad de estar satisfecho si se gana (y se obtiene una ganancia neta). El objetivo debe ser obtener una ganancia económica, no ganar la subasta.

Algunas de las empresas que participan en negocios de compras y fusiones de empresas no participan en situaciones de ofertas competitivas. Si una compañía se interesa por vender sus acciones, esta empresa presentará lo que considera una oferta justa sólo si la compañía en venta está de acuerdo en aceptar o rechazar la oferta antes de buscar una segunda. Naturalmente, la compañía que vende quizás ya tenga información acerca de la población de posibles compradores y sus probables precios de oferta; sin embargo, deberá decidir acerca de la oferta sin buscar (o aceptar) otras ofertas. Si el comprador potencial sabe que otros compradores ya han efectuado ofertas, deberá reducir la cantidad que está dispuesta a ofrecer.

La maldición del ganador se presenta en muchas situaciones. Por ejemplo, en un mercado inmobiliario de mucho movimiento, si una casa ha estado en el mercado por más de un año, habría que suponer que muchos compradores han rechazado el precio que solicitan por la casa. Una forma de la maldición del ganador sería comprar la casa al precio solicitado, dado el gran número de compradores que la han rechazado. Es posible que sea una casa única y justo lo que usted desea y que a los otros compradores no les gusten las características exclusivas; también es posible que los compradores potenciales que la rechazaron supieran lo que estaban haciendo.

Conclusiones

El lector debe considerar si en la realidad existen situaciones en las cuales compiten dos o más partes y las ganancias se aproximan a una suma cero (lo que pierde uno es lo que gana el otro) o tienen suma distinta de cero. ¿Son beneficiosos para la sociedad los resultados de estos juegos?

Los ejemplos de "juegos" de la vida real van desde guerras (donde sólo puede ganar uno a expensas del otro y donde es muy probable que ambos pierdan) hasta la industria de los automóviles y los juegos colegiales de fútbol, donde la escalación en los gastos "para vender" muchas veces dan como resultado que todas las partes se hallen en una situación peor de la que estarían con estrategias diferentes.

Es posible que en la realidad no puedan aplicarse las soluciones exactas a las situaciones de juego, por lo cual no pueden aplicarse con precisión las teorías. Por otra parte, la teoría de juegos ayuda a aprender cómo enfrentar una situación de conflicto y comprenderla, además de cómo mejorar el proceso de toma de decisiones.

RESUMEN

Todos los juegos de dos personas con suma cero tienen una solución de equilibrio minimax, la cual será un par de estrategias puras o un par de estrategias mixtas. Los juegos con suma distinta de cero pueden llegar a soluciones de equilibrio que no son satisfactorias.

La maldición del ganador propone que, cuando no hay certeza acerca del valor de un artículo, es posible que la persona que presenta la oferta más alta exceda el valor del artículo, y que el monto de la sobreoferta es una función creciente del número de personas que realizan ofertas.

Bibliografía

Davis, M. D., *Game Theory, a Nontechnical Introduction,* Nueva York, Basic Books, 1970.

Englebrecht-Wiggans, R., "Auctions and Bidding Models: A Survey",*Management Science,* febrero de 1980.

Englebrecht-Wiggans, R., P. R. Milgrom y R. J. Weber, "Competitive Bidding and Proprietary Information", *Journal of Mathematical Economics* 11, 1983.

Kagel, J. H. y D. Levin, "The Winner's Curse and Public Information in Common Valué Auctions", *The American Econontic Review,* diciembre de 1986.

Luce, R. D. y H. Raiffa, *Games and Decisions,* Nueva York, John Wiley & Sons, 1957.

McDonald, J., *The Game of Business,* Garden City, N.Y., Doubleday, 1975.

Owen, G., *Game Theory,* Filadelfia, W. B. Saunders, 1968.

Shubik, M, editor, *Game Theory and Related Approaches to Social Behavior,* Nueva York, John Wiley & Sons, 1964.

Shubik, M., *Game Theory in the Social Sciences: Concepts and Solutions,* Cambridge, Mass., MIT Press, 1983.

Vickrey, W., "Counterspeculation, Auctions, and Competitive Sealed Tenders", *The Journal ofFinance,* marzo de 1961.

Von Neumann, J. y O. Morgenstern, *Theory of Games and Econontic Behavior,* Princeton, Princeton University Press, 1944.

Williams, J. D., *The Compleat Strategyst,* edición modificada, Nueva York, McGraw-Hill, 1966.

Wilson, R. B., "Competitive Bidding with Disparate Information", *Management Science,* marzo de 1969; y "Competitive Bidding with Asymmetrical Information", *Management Science,* julio de 1967.

Problemas con respuestas

9-1. Prepare la matriz de resultados de una apuesta común, centavo contra centavo, jugador 1 contra jugador 2. ¿Qué hipótesis hay acerca de los beneficios de los dos jugadores?

9-2. En este tipo de apuesta, ¿es pura una estrategia minimax?

9-3. Si un jugador sigue una estrategia pura en una apuesta de uno por uno, ¿cuánto es lo máximo que puede perder el jugador en una serie de η juegos?

9-4. Suponga que se tiene la siguiente matriz de resultados para dos oponentes, A y B, en la cual las cantidades son la utilidad que gana A y pierde B en cualquier intersección de estrategias:

	B_1	B_2
A_1	10	6
A_2	8	2

a. ¿Qué estrategia seguiría A?

b. ¿Qué estrategia seguiría B?
c. ¿Cuál es el "valor" del juego?
d. Elabore un gráfico de los pagos de estas estrategias, desde el punto de vista del ju gador A.

9-5. Suponga que la siguiente matriz de resultados es adecuada para las estrategias de mercadotecnia de dos oponentes:
a. ¿Qué estrategia seguiría A? ¿Por qué?
b. ¿Qué estrategia seguiría B? ¿Por qué?
c. ¿Qué resultado pronosticaría para esta si tuación?

Estrategias de A \ Estrategias de B	B_1	B_2
A_1	0 / **0**	1 / **2**
A_2	4 / **1**	5 / **3**

Problemas

9-6. En la siguiente matriz de resultados para A y B, las cantidades son la utilidad que gana A y pierde B para cualquier intersección de estrategias:

	B_1	B_2
A_1	10	6
A_2	8	12

a. ¿Cuál es la mayor ganancia mínima segu ra que puede obtener A si sigue una estra tegia pura?
b. ¿Cuál es la menor pérdida máxima en que puede incurrir B si sigue una estrate gia pura?
c. ¿Cuál es la estrategia mixta para A?
d. Elabore el gráfico de las estrategias mix tas para A y B.
e. Si A y B usan estrategias mixtas, ¿cuál es el valor del juego?

9-7. ¿Qué tipo de situación de conflicto es más probable: un juego con suma cero o un juego con suma distinta de cero?

9-8. Dos empresas, *f* y *g*, tienen como resultados los beneficios que se muestran en la siguiente tabla, para dos estrategias alternativas de mercadotecnia.
a. ¿Qué estrategia seguirá *f*? ¿Por qué?
b. ¿Qué estrategia seguirá g? ¿Por qué?
c. ¿Cuál es la solución del juego?
d. Identifique el par de equilibrio, si existe.

Estrategias de g \ Estrategias de f	f_1	f_2
g_1	8 / **8**	1 / **10**
g_2	10 / **1**	1 / **2**

9-9. Si el problema 9-8 se repitiera diariamente durante η días, donde η es un número de gran magnitud, ¿cree usted que los jugadores seguirían una estrategia de equilibrio? ¿Qué sugiere esto?

9-10. La compañía ABC y la compañía XYZ distribuyen automóviles en el país de Akro, a través de una subsidiaria. Los beneficios anuales de las subsidiarias son: ABC, 10 millones de dólares; XYZ, 20 millones. La compañía ABC pretende establecer una planta de manufactura en Akro. Un analista ha proyectado beneficios de 38 millones de dólares después de que entre en operación la planta (esto supone que la compañía XYZ sigue con la distribución de automóviles, pero no los fabrica en el país). Un analista de la compañía XYZ ha oído hablar de los planes de ABC y su proyección es que, si ABC construye la planta, los benefi-

cios de XYZ descenderán a cuatro millones de dólares. Si XYZ construye una planta y ABC no la construye, él prevé que los beneficios serán de 38 millones de dólares y que los beneficios de ABC bajarán a cuatro millones de dólares.
Si las dos compañías construyeran plantas, se espera que ambas ganen cinco millones de dólares por año. ¿Qué deben hacer las compañías?

9-11. Realice el siguiente experimento: Tome un frasco con monedas y pida a dos personas (por separado) que hagan una estimación del valor de las monedas. Luego haga la misma pregunta a otras cuatro personas. ¿Cómo se compara la estimación más alta de la primera muestra (rc = 2) con la de la segunda (n = 4)? ¿Su experimento apoya o contradice la maldición del ganador?

Problemas más difíciles

9-12. Dos fabricantes de computadores, A y B, quieren vender sistemas de computación a dos bancos, 1 y 2. La compañía A tiene cuatro vendedores y la compañía B sólo dispone de tres. Las compañías de computación deben decidir cuántos vendedores asignar para atender a cada banco. Así, la compañía A puede asignar cuatro vendedores al banco 1 y ninguno al banco 2, o tres al banco 1 y dos al banco 2, etcétera.

Cada banco comprará un sistema de computación. La probabilidad de que el banco compre a una compañía en particular se relaciona directamente con el número de vendedores de esa compañía que atienden al banco, con respecto al número total de vendedores. Por ejemplo, si la compañía A asignara tres personas al banco 1 y la compañía B asignara dos, la probabilidad de que el banco 1 compre el sistema de computación de la compañía A es de tres en cinco. Como caso especial, si no acude ningún vendedor de ambas compañías, la probabilidad de que compre el sistema de computación de una compañía o de la otra es del 50%.

Puede considerarse que el resultado será el número medio de sistemas de computación que venda la compañía A. Entonces, el número esperado de ventas de la compañía B es dos menos este resultado.

¿Qué estrategia debe usar la compañía A para asignar sus vendedores? ¿Cuál debe usar la compañía B? ¿Cuál es el valor del juego para la compañía A? ¿Cuál es el significado del valor del juego en este problema?

9-13. Remítase al problema 9-12. Suponga que el banco 1 comprará dos sistemas de computación y que el banco 2 sólo comprará uno. En este caso, ¿cuál es la estrategia óptima para la compañía A? ¿Cuál para la compañía B? ¿Cuál es el valor del juego?

9-14. Remítase al problema 9-12. Suponga que los bancos comprarán el sistema de computación a la compañía que envíe el mayor número de vendedores. Si las dos compañías envían el mismo número, la decisión se tomará lanzando una moneda legítima. En este caso, ¿cuál es la estrategia óptima para la compañía A? ¿Para la compañía B? ¿Cuál es el valor del juego?

9-15. Las empresas I y II compiten por hacer negocios. Lo que gana I es lo que pierde II. La tabla de la siguiente página muestra los beneficios de la empresa I para distintas cuotas del mercado (suponga que el juego tiene suma cero). Encuentre una solución de equilibrio. Las

9-16. compañías A y B están en competencia directa y cada una tiene cuatro alternativas de campañas publicitarias; la tabla de la siguiente página muestra la ganancia para la compañía A para cada par de campañas que se elijan. Como es una situación con suma cero, las ganancias para la compañía B son el negativo de las ganancias de la compañía A. Encuentre una solución de equilibrio. En un

9-17. juego de dos persona con suma cero, X_{ij} representa el resultado para el jugador I, donde i representa la estrategia del jugador I y y representa la estrategia del jugador II. Suponga que cada jugador tiene tres estrategias,

Utilidad de la empresa I (problema 9-15)

I \ II	*Sin publicidad*	*Publicidad media*	*Publicidad*	*Mínimos de las filas*
Sin publicidad	60	50	40	40
Publicidad media	70	70	50	50
Publicidad cuantiosa	80	60	75	60
Máximos de las columnas	80	70	75	

Ganadas para la compañía A (problema 9-16)

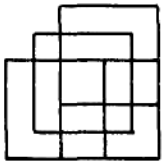
Alternativas de la compañía A \ *Alternativas de la compañía B*	B_1	B_2	B_3	B_4
A_1	10	30	25	15
A_2	5	40	10	30
A_3	15	25	5	10
A_4	20	20	15	40

ninguna de las cuales está dominada. Si p_i representa la probabilidad de la estrategia mixta óptima de que el jugador I use la estrategia i, escriba tres ecuaciones que comprendan />,, *PiyPy*

9-18. El nombre "dilema del prisionero" que se da a una clase de problemas de la teoría de juegos, proviene de la siguiente historia:

> Dos prisioneros son arrestados por un crimen que cometieron juntos. Sin embargo, las pruebas contra ellos no son muy sólidas, por lo que el fiscal separa a los prisioneros y ofrece a cada uno un trato: confiese y acceda a testificar en contra de su socio y usted quedará libre. El prisionero sabe que si rehúsa a confesar y su socio testifica contra él, recibirá una sentencia dura, ya que el juez interpretará el rechazo a la confesión como una prueba de que es un criminal incorregible. Si los dos prisioneros confiesan, ya no tendrán que testificar contra el otro y ambos recibirán sentencias regulares. Si ninguno confiesa, el fiscal podrá condenarlos por cargos técnicos y los dos recibirán sentencias leves.

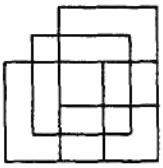
Elabore la tabla de resultados de cada prisionero. ¿Qué debe hacer cada uno, suponiendo que no pueden colaborar? ¿Qué pasaría si pudieran colaborar?



PARTE III

Programación matemática

CAPÍTULO 10



Introducción a la programación lineal

Como se describió en los capítulos anteriores de este libro, los gerentes construyen modelos como instrumentos de ayuda para resolver problemas de decisión. Un modelo de programación lineal es un tipo especial de modelo matemático en el cual las relaciones entre variables son lineales y donde hay un solo objetivo o medida del rendimiento. Una ventaja de este tipo de modelo es que existe una técnica matemática, llamada **programación lineal,** que puede determinar la decisión óptima o mejor, incluso si existen miles de variables y relaciones. En este capítulo se considera la formulación de modelos de programación lineal; en los capítulos posteriores se tratan la resolución de los problemas y la interpretación de resultados.

En el modelo de programación lineal hay un conjunto de **variables de decisión,** $X_1, X_2, \ldots X_N$. El modelo de programación lineal está diseñado para maximizar (o minimizar) una **función objetivo** de la forma:

$$f = C_1X_1 + C_2X_2 + \ldots + C_NX_N$$

donde/es un objetivo económico, como los beneficios, la producción, los costos, las semanas de trabajo o las toneladas de envío. Por lo general se prefiere tener más beneficios que menos beneficios, costos más bajos que más altos, etcétera. El gerente quiere seleccionar los valores para las variables de decisión que permitan obtener mayores beneficios, menor costo, mayor producción, etcétera. Todos los coeficientes C_u C_2,. . ., C_N son constantes y todas las X aparecen con potencia uno (es decir, no hay cuadrados ni cubos, por ejemplo). Por lo tanto, la función/es una función **lineal.**

En la mayoría de los casos el gerente no puede determinar arbitrariamente los valores para las variables de decisión, X. Más bien, la elección está limitada por un conjunto de relaciones o restricciones. Las restricciones que se aplican a X son también lineales y son **desigualdades lineales** o **igualdades lineales:**

$$A_1X_1 + A_2X_2 + \ldots + A_NX_N \leq B_1$$

Los coeficientes *A* son constantes, mientras que la constante B_x restringe a /, (la función objetivo) como resultado de la restricción de las variables de decisión X_u X_2, .., X_N (en vez de $\leq$, podría ser $\geq$ o una igualdad). La solución que proporciona la programación lineal es el conjunto de valores de las variables de decisión con el cual se logra el máximo (o mínimo) deseado dentro de las restricciones.

La programación lineal no permite incertidumbre en las relaciones; no puede haber probabilidades o variables aleatorias. Por lo tanto, el problema de maximización de la función objetivo sujeto a las restricciones es conceptualmente sencillo. Si hay pocas variables, bastan el sentido común y un poco de aritmética para resolver el problema, algo que se ha hecho durante siglos. Sin embargo, como sucede con frecuencia, la intuición no es muy útil cuando el problema es más complejo; si el número de variables de decisión ya no es tres o cuatro, sino cientos o miles, el problema desafía los procedimientos empíricos. La programación lineal ha permitido manejar de manera ordenada problemas con gran número de restricciones.

Esta técnica tiene gran poder y generalidad. Puede aplicarse a diversos problemas de una organización empresarial moderna y puede manejarse de manera rutinaria con ayuda de los computadores modernos. Es una de las técnicas cuantitativas que ha proporcionado a la gerencia gran fuerza para tratar problemas para los cuales no había solución hace algunos años.

Como ejemplo sencillo, considere el siguiente problema, que puede resolverse con sentido común o análisis marginal. Suponga que el beneficio marginal del producto A es cinco dólares por unidad, el beneficio del producto B es dos dólares por unidad y se puede vender toda la producción de ambos productos; además, los dos productos se pueden fabricar con el mismo equipo. Podemos calcular cuál de los productos hay que fabricar una vez que se conoce la capacidad de las instalaciones en función de A y B (véase Tabla 10-1). El equipo puede producir 100 unidades de A o 600 unidades de B por día.

En este sencillo ejemplo, el producto B es evidentemente más deseable que A, ya que es mejor el beneficio de 1200 dólares diarios que el de 500 dólares. Considere ahora un problema más complicado, en el cual la planta es capaz de producir 20 productos distintos en 15 departamentos y que cada producto requiere distinto tiempo de producción en cada departamento. Si aún no le impresiona la dificultad del problema, suponga que cada departamento contiene 10 procesos y que cada producto requiere distinto tiempo de producción en cada proceso. ¿Cómo se determina la combinación de productos óptima? La mejor forma de resolver un problema de este tipo es la programación lineal. El término lineal es apropiado, ya que se supone que todas las relaciones entre producción y beneficio son proporcionales o lineales; es decir, el mayor grado de cualquier variable es 1 y no hay variables que se multipliquen por otra.

Hay varios métodos para resolver problemas de programación lineal. En el capítulo 11 se presentará una solución gráfica y en el capítulo 12 se presentará el método simplex, un método algebraico para obtener la solución.

Tabla 10-1

Producto	***Capacidad (unidades por día)***	***Beneficio por unidad***	***Beneficios marginales totales por día***
A	100	$52	$ 500 1
B	600		200

En algunos de los ejemplos que se mostrarán a continuación las respuestas serán evidentes; esto se debe a que los ejemplos se diseñaron para que fueran sencillos. En otros ejemplos se tratarán problemas más complejos y algunos de los ejercicios son bastante complicados. El lector debe tener presente que se pretende ilustrar una técnica que puede aplicarse a problemas muy complejos, pero que se aplica a situaciones sencillas para su mejor comprensión. En la práctica, los cálculos de los problemas complejos de programación lineal se realizarían en un computador. En la actualidad existen diversos programas de computación para la resolución de problemas de programación lineal, incluso para microcomputadores.

Formulación de problemas de programación lineal

Antes de entrar en detalles acerca de cómo resolver problemas de programación lineal, es importante aprender cómo definir las variables y las ecuaciones, en términos generales, cómo presentar un problema empresarial en forma de maximización (o minimización) de una función lineal/sujeta a restricciones lineales. Usaremos el término **formulación** para representar la traducción de un problema real a un formato de ecuaciones matemáticas. Con frecuencia la formulación es la parte más difícil del análisis de un problema empresarial.

Ahora estudiaremos diversos problemas, para ofrecer un poco de experiencia con respecto a la formulación y para mostrar una parte de la gran variedad de problemas que se pueden analizar con la programación lineal.

Ejemplo 1: Problema de mezcla de productos

Una empresa de manufactura fabrica dos productos, A y B, cada uno de los cuales debe procesarse en dos máquinas diferentes. Una máquina tiene 24 horas de capacidad disponibles y la otra sólo tiene 16 horas. Cada unidad del producto A requiere dos horas en cada máquina, mientras que una unidad del producto B necesita tres horas en la primera máquina y una hora en la segunda. Los beneficios marginales son de seis dólares por unidad del producto A y siete dólares por unidad del producto B y la empresa puede vender todas las unidades que puede fabricar de los dos productos.

El objetivo de la empresa es maximizar los beneficios. El problema es determinar cuántas unidades de los productos A y B deben producirse dentro de los límites de las capacidades disponibles de las máquinas.

Formulación. Sea:

X_x = Número de unidades del producto A que se fabricarán
X_2 = Número de unidades del producto B que se fabricarán
P = Beneficios adicionales totales para la empresa

La función objetivo es:

Maximizar: $P = 6X_X + 7X_2$

Esta ecuación establece que los beneficios totales de la empresa se forman con los beneficios del producto A (seis dólares multiplicados por el número de unidades vendidas) más los beneficios del producto B (siete dólares multiplicados por el número de unidades vendidas).

La primer restricción se refiere a la disponibilidad de tiempo en la primera máquina. Esto se puede expresar como sigue:

$$\mathbf{2X, + 3X_2 \leq 24}$$

Cada unidad del producto A utiliza dos horas de esta máquina y cada unidad del producto B emplea tres horas. Por lo tanto, el total de horas utilizadas se expresa con el primer miembro de la expresión anterior y debe ser igual o menor que el total de horas disponibles de la primera máquina (24). Para la segunda máquina hay una restricción similar:

$$2X, + 1X_2 \leq 16$$

Así mismo, en toda formulación de programación lineal está implícita la restricción de que X_x y X_2 no sean negativas. En términos del problema, esto quiere decir que la empresa sólo puede producir cantidades positivas o cero.

La formulación total es:

Maximizar: $P = 6X_1 + 7X_2$

Sujeto a:
$$2X_1 + 3X_2 \leq 24$$
$$2X_1 + 1X_2 \leq 16$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Este ejemplo es sencillo y no se requeriría programación lineal para resolverlo. Sin embargo, los problemas que implican docenas de productos y varias restricciones no pueden resolverse en forma intuitiva; la programación lineal ha demostrado su utilidad en estos casos.

Tabla 10-2 Requerimientos de los almacenes

Ubicación del almacén	*Ventas anuales (miles de cajas)*
Nueva York	50
Boston	10
Chicago	60
Los Ángeles	30
Dallas	20
Total	170

Tabla 10-3 Costos de envío de 1000 cajas de jabón

De \ *A*	*Nueva York*	*Boston*	*Chicago*	*Los Ángeles*	*Dallas*
Cincinnati	$120	$150	$ 80	$250	$180
Denver	210	220	150	100	110
Atlanta	150	170	150	240	200

Ejemplo 2: Problema de transporte

Un fabricante de jabón y detergentes tiene tres plantas, localizadas en Cincinnati, Denver y Atlanta. Los almacenes principales se encuentran en Nueva York, Boston, Chicago, Los Ángeles y Dallas. En la tabla 10-2 se proporcionan los requerimientos de ventas del próximo año para cada almacén.

En la compañía es necesario determinar cuál de las fábricas debe abastecer a cada almacén. La capacidad de las fábricas está limitada. Cincinnati tiene capacidad anual para 100 000 cajas; Denver para 60 000 y Atlanta para 50 000.

En la tabla 10-3 se muestra el costo de envío del jabón de las fábricas a los almacenes. La compañía quiere determinar un programa de entregas que minimice los costos totales de transporte de la compañía (representados con Q.

Formulación. Sea:

X_n = Número de cajas enviadas de la primera fábrica (Cincinnati) al primer almacén (Nueva York), en miles de cajas.

Análogamente:

$X_{12}, X_{13}, X_{14}, X_{15},$ = Número de cajas enviadas de la primera fábrica (Cincinnati) al segundo, tercero, etc., almacén (Boston, Chicago, etcétera)

$X_{21}, X_{22}, X_{23}, X_{24}, X_{25}$ = Número de cajas enviadas de la segunda fábrica (Denver) al primero, segundo, etc., almacén.

$X_{31}, X_{32}, X_{33}, X_{34}, X_{35}$ = Número de cajas enviadas de la tercera fábrica (Atlanta) al primero, segundo, etc., almacén.

El objetivo es, entonces:

Minimizar: $C = 120X_{11} + 150X_{12} + 80X_{13} + 250X_{14} + 180X_{15} + 210X_{21} + 220X_{22} + 150X_{23} + 100X_{24} + 110X_{25} + 150X_{31} + 170X_{32} + 150X_{33} + 240X_{34} + 200X_{35}$

El costo total es la suma de los productos, para cada ruta de envío posible (de la fábrica al almacén), del costo de envío de la tabla 10-3 multiplicado por el número de millares de cajas que se envían.

Hay dos conjuntos de restricciones para este problema. El primero garantiza que se cumplirán las necesidades del almacén, Entonces, para Nueva York:

$$X_{11} + X_{21} + X_{31} = 50$$

Lo anterior estipula que la suma de las cajas que se envían a Nueva York de la primera fábrica (Cincinnati), la segunda (Denver) y la tercera (Atlanta) debe ser 50 000 cajas, el requerimiento de ventas de Nueva York. Para los otros almacenes se tiene:

Boston : $X_{12} + X_{22} + X_{32} = 10$
Chicago : $X_{13} + X_{23} + X_{33} = 60$
Los Ángeles : $X_{14} + X_{24} + X_{34} = 30$
Dallas : $X_{15} + X_{25} + X_{35} = 20$

El segundo conjunto de restricciones garantiza que las fábricas no excedan sus capacidades de producción. De esta manera, para la fábrica de Cincinnati:

$$X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} \leq 100$$

Esta expresión indica que la cantidad que se envía de la primera fábrica al primer almacén, al segundo, al tercero, etc., no debe exceder la capacidad de 100 000 cajas de la fábrica.

En forma similar:

Denver: $X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} \leq 60$
Atlanta: $X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} \leq 50$

Por último, todas las *X* deben ser mayores o iguales que cero.

La solución de este problema de programación lineal ofrecerá el programa óptimo de envíos (es decir, el de menor costo) para la compañía. Es un ejemplo de un tipo de especial de problema, conocido, de manera bastante natural, como el **problema de transporte.** El capítulo 13 se dedica a un procedimiento especial para resolver este tipo de problemas.

En resumen, la formulación completa de este problema es:

Minimizar: $$C = 120X_{11} + 150X_{12} + 80X_{13} + 250X_{14} + 180X_{15} + 210X_{21} + 220X_{22} + 150X_{23} + 100X_{24} + 110X_{25} + 150X_{31} + 170X_{32} + 150X_{33} + 240X_{34} + 200X_{35}$$

Sujeto a:

$$\left.\begin{aligned} X_{11} + X_{21} + X_{31} &= 50 \\ X_{12} + X_{22} + X_{32} &= 10 \\ X_{13} + X_{23} + X_{33} &= 60 \\ X_{14} + X_{24} + X_{34} &= 30 \\ X_{15} + X_{25} + X_{35} &= 20 \end{aligned}\right\}$$ Restricciones de requerimientos de almacenes

$$\left.\begin{aligned} X_{11} + X_{12} + X_{13} + X_{14} + X_{15} &\leq 100 \\ X_{21} + X_{22} + X_{23} + X_{24} + X_{25} &\leq 60 \\ X_{31} + X_{32} + X_{33} + X_{34} + X_{35} &\leq 50 \end{aligned}\right\}$$ Restricciones de capacidad de fábricas

$$X_{11}, X_{12}, \ldots, X_{35} \leq 0$$

Ejemplo 3: Problema de mezcla

Se obtienen distintos tipos de gasolina mezclando ciertas gasolinas que se obtienen directamente de las operaciones de refinería. En un proceso de refinamiento real hay varias gasolinas para mezcla, varias gasolinas que son productos finales (por ejemplo, distintos grados de gasolina para aviación y para motores) y varias características de importancia para la composición química de los diversos grados de gasolina (por ejemplo, octanaje, presión de vapor, contenido de azufre, contenido de goma). En este ejemplo simplificado se supondrá que la refinería sólo tiene dos tipos de gasolina para mezcla, con las características que se presentan en la tabla 10-4.

Estas gasolinas para mezcla pueden combinarse para obtener dos productos finales: gasolina para aviación y gasolina para motores. En la tabla 10-5 se presentan las características que requieren estos productos finales.

Al mezclar las gasolinas, el octanaje y la presión de vapor de la mezcla que se obtiene están en proporción directa con el volumen de cada una de las gasolinas que se mezclan. Por ejemplo, si se mezclaran 1000 barriles de la gasolina 1 con 1000 barriles de la gasolina 2, la gasolina que se obtendría tendría octanaje 99:

$$\frac{1\,000 \cdot 104 + 1\,000 \cdot 94}{2\,000} = 99$$

y presión de vapor de 7:

$$\frac{1\,000 \cdot 5 + 1\,000 \cdot 9}{2\,000} = 7$$

La empresa desea maximizar los ingresos de la venta de la gasolina que se obtiene como producto final.

Tabla 10-4 Características de las gasolinas para mezcla

Mezclas disponibles	*Octanaje*	*Presión de vapor*	*Cantidad disponible*
Gasolina pata mezcla, tipo 1	104	5	30 000 barriles 9
Gasolina para mezcla, tipo 2	94		70 000 barriles

Tabla 10-5 Características de las gasolinas finales

Productos finales	*Octanaje mínimo*	*Presión de vapor máxima*	*Ventas máximas*	*Precio de venta (por barril)*
Gasolina para aviación	102	6	20 000 barriles	$45.10
Gasolina para motores	%	8	Cualquier cantidad	32.40

Formulación. Sea:

X_1 = Número de barriles de gasolina para la mezcla 1 utilizados en gasolina para aviación
X_2 = Número de barriles de gasolina para la mezcla 2 utilizados en gasolina para aviación
X_3 = Número de barriles de gasolina para la mezcla 1 utilizados en gasolina para motores
X_4 = Número de barriles de gasolina para la mezcla 2 utilizados en gasolina para motores

La función objetivo es maximizar P = Ingresos totales:

Maximizar: $$P = 45.10(X_1 + X_2) + 32.40(X_3 + X_4)$$
$$= 45.10X_1 + 45.10X_2 + 32.40X_3 + 32.40X_4$$

Observe que $X_1 + X_2$ es la cantidad total de gasolina para aviación mezclada (en barriles); como se vende a 45.10 dólares por barril, los ingresos por este producto son $45.10(X_1 + X_2)$. De manera análoga, los ingresos por la gasolina para motor son de $32.40(X_3 + X_4)$ y la suma de estos términos representa los ingresos totales, P.

Hay varios tipos de restricciones que afectan la forma en que la refinería mezclará su gasolina. La primera es el nivel de ventas o tamaño de la demanda, el hecho de que no pueden venderse más de 20 000 barriles de gasolina para aviación (véase Tabla 10-5). Lo anterior puede expresarse así:

$$X_1 + X_2 \leq 20\,000$$

Otro conjunto de restricciones se refiere a las cantidades disponibles de las gasolinas para mezcla (véase Tabla 10-4). Entonces:

$$X_1 + X_3 \leq 30\,000$$

Observe que $X_1 + X_3$ representa la cantidad total de gasolina para mezcla 1 (la suma de la cantidad utilizada en gasolina para aviación, X_1, y la cantidad usada en gasolina para motores, X_3). La ecuación anterior establece que la cantidad de gasolina para mezcla 1 no debe exceder la cantidad disponible, 30 000 barriles. Hay una restricción similar para la gasolina para mezcla 2:

$$X_2 + X_4 \leq 70\,000$$

Otro conjunto de restricciones tiene que ver con el octanaje de las gasolinas finales. Recuerde que la cantidad total de la gasolina para aviación es $X_x + X_2$ y su octanaje estará definido por las cantidades relativas de $X_1 + X_2$, de acuerdo con la siguiente fórmula:

$$\text{Octanaje de la gasolina para aviación} = \frac{104 \cdot X_1 + 94 \cdot X_2}{X_1 + X_2}$$

Las cifras 104 y 94 provienen de la tabla 10-4 y son los octanajes de las gasolinas para mezcla 1 y 2, respectivamente. En la tabla 10-5 se observa que el octanaje de la gasolina para aviación debe ser por lo menos 102, por lo cual se tiene la siguiente restricción:

$$\frac{104X_1 + 94X_2}{X_1 + X_2} \geq 102$$

Al acomodar la expresión para convertirla en restricción lineal, se tiene:

$$104X_1 + 94X_2 \geq 102X_1 + 102X_2$$

o

$$(104X_1 - 102X_1) + (94X_2 - 102X_2) \geq 0$$

o

$$2X_1 - 8X_2 \geq 0$$

Análogamente, para la gasolina para motores, se tiene:

$$104X_3 + 94X_4 \geq 96(X_3 + X_4)$$

o

$$8X_3 - 2X_4 \geq 0$$

El último conjunto de restricciones tiene que ver con los requisitos de presión de vapor de las gasolinas finales. En el caso de la gasolina para aviación, la restricción es:

$$5X_1 + 9X_2 \leq 6(X_1 + X_2)$$

o

$$-X_1 + 3X_2 \leq 0$$

y el requisito de presión de vapor de la gasolina para motores es:

$$5X_3 + 9X_4 \leq 8(X_3 + X_4)$$

o

$$-3X_3 + X_4 \leq 0$$

En resumen, la formulación total del modelo de programación lineal es:

Maximizar: $P = 45.10X_1 + 45.10X_2 + 32.40X_3 + 32.40X_4$

Sujeto a:

$X_1 + X_2 \leq 20\,000$	Restricción de la demanda
$X_1 + X_3 \leq 30\,000$ $X_2 + X_4 \leq 70\,000$	Restricciones de disponibilidad de gasolina para mezclas
$2X_1 - 8X_2 \geq 0$ $8X_3 - 2X_4 \geq 0$	Restricciones de octanaje
$-X_1 + 3X_2 \leq 0$ $-3X_3 + X_4 \leq 0$	Restricciones de presión de vapor
$X_1, X_2, X_3, X_4 \geq 0$	

La mezcla de gasolina fue una de las primeras aplicaciones de la programación lineal en problemas empresariales. Nuestro ejemplo es, por supuesto, una simplificación del problema real, pero comprende los elementos esenciales. El problema que se formuló se denomina problema de mezcla y este tipo de problemas se presenta en varios contextos. Como muestra está la producción de alimentos para animales. Por ejemplo, una mezcla de alimentos para gallinas puede estar compuesta por distintos tipos de granos. El fabricante de alimentos quiere usar los granos más baratos; sin embargo, tiene la restricción de que el alimento debe satisfacer ciertos requisitos de nutrición (similares a las restricciones de presión de vapor y octanaje en nuestro ejemplo de gasolinas). Es más, también hay que añadir algunas restricciones estéticas, ya que las gallinas no comerán las mezclas sólo con base en las restricciones de nutrición.

Los tres ejemplos que se han presentado hasta ahora han tenido que ver con problemas en un solo periodo, y con frecuencia se les conoce como problemas

estáticos. La programación lineal también se ha aplicado a problemas **dinámicos,** es decir, a aquellos que se extienden por varios periodos.[1] Considere el siguiente ejemplo.

Ejemplo 4: Problema de programación de actividades

Una empresa tiene un programa estricto de compromisos de entrega de un producto para los próximos seis meses. El costo de producción varía por mes, por los cambios anticipados en costos de materiales. La capacidad de producción de la compañía es de 100 unidades por mes con tiempo normal y hasta 15 unidades adicionales por mes con tiempo extra.

La tabla 10-6 muestra los requerimientos de entrega y los costos de producción por mes.

El costo de almacenar en inventario una unidad que no se vende es de dos dólares por mes. El problema de la compañía es determinar el número de unidades que debe producir cada mes en tiempo normal y tiempo extra para cubrir los requerimientos con el menor costo. La empresa no tiene unidades disponibles al iniciar el mes 1 y no quiere que sobren unidades al terminar el mes 6.

Formulación. Sea:

$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6$ = Número de unidades producidas en tiempo normal cada mes

$Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6$ = Número de unidades producidas en tiempo extra cada mes

$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6$ = Número de unidades en almacén (no vendidas) al final de cada mes

El objetivo es entonces:

$$\text{Minimizar: } C = 30X_1 + 30X_2 + 32X_3 + 32X_4 + 31X_5 + 32X_6 + 35Y_1 + 35Y_2 + 37Y_3 + 37Y_4 + 36Y_5 + 37Y_6 + 2I_1 + 2I_2 + 2I_3 + 2I_4 + 2I_5 + 2I_6$$

La primera parte de esta expresión es el costo de la producción en tiempo normal (de la Tabla 10-6) multiplicado por las cantidades producidas en tiempo normal cada mes. La segunda parte representa el costo de producción en tiempo extra multiplicado por las cantidades que se producen en tiempo extra cada mes. La tercera parte es el costo de almacenamiento de las unidades que no se vendan, multiplicado por el número de unidades no vendidas cada mes.

---

[1] La programación dinámica también trata los problemas dinámicos (véase Cap. 22). En ocasiones es posible formular una situación como un problema de programación lineal y de programación dinámica. Véase los ejercicios al final del capítulo 22.

Tabla 10-6 Requerimientos y costos

	Mes					
	1	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*
Compromisos de entrega (unidades)	95	85	110	115	90	105
Costo por unidad en tiempo normal	$30	30	32	32	31	32
Costo por unidad en tiempo extra	$35	35	37	37	36	37

Las restricciones de la producción en tiempo normal son:

$$\begin{aligned} X_1 &\leq 100 \\ X_2 &\leq 100 \\ X_3 &\leq 100 \\ X_4 &\leq 100 \\ X_5 &\leq 100 \\ X_6 &\leq 100 \end{aligned}$$

Las restricciones de la producción en tiempo extra son:

$$\begin{aligned} Y_1 &\leq 15 \\ Y_2 &\leq 15 \\ Y_3 &\leq 15 \\ Y_4 &\leq 15 \\ Y_5 &\leq 15 \\ Y_6 &\leq 15 \end{aligned}$$

Por último, se requiere un grupo de *restricciones de enlace* o de equilibrio para unir los periodos y asegurar que se cumplan los compromisos de entrega. Estas restricciones tienen la siguiente forma:

(Fuentes de las unidades) = (Usos de las unidades) o

$$\begin{bmatrix}\text{Inventario}\\ \text{inicial}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Producción en}\\ \text{tiempo normal}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Producción en}\\ \text{tiempo extra}\end{bmatrix} = \begin{bmatrix}\text{Compromisos}\\ \text{de entrega}\end{bmatrix} + \begin{bmatrix}\text{Inventario}\\ \text{final}\end{bmatrix}$$

Para el mes 1, esto es:

$$0 + X_1 + Y_1 = 95 + I_1$$

puesto que no hay inventario inicial. Al acomodar la ecuación:

$$X_1 + Y_1 - I_1 = 95$$

Para el mes 2:

$$I_1 + X_2 + Y_2 = 85 + I_2$$

o

$$I_1 + X_2 + Y_2 - I_2 = 85$$

Para los otros meses:

Mes 3: $I_2 + X_3 + Y_3 - I_3 = 110$
Mes 4: $I_3 + X_4 + Y_4 - I_4 = 115$
Mes 5: $I_4 + X_5 + Y_5 - I_5 = 90$
Mes 6: $I_5 + X_6 + Y_6 - I_6 = 105$

Puesto que el inventario final debe ser cero, la última restricción es:

$$I_6 = 0$$

En resumen, la formulación es:

Minimizar: $C = 30X_1 + 30X_2 + 32X_3 + 32X_4 + 31X_5 + 32X_6 + 35Y_1 + 35Y_2 + 37Y_3 + 37Y_4 + 36Y_5 + 37Y_6 + 2I_1 + 2I_2 + 2I_3 + 2I_4 + 2I_5 + 2I_6$

Sujeto a:

$$\left.\begin{aligned} X_1 + Y_1 - I_1 &= 95 \\ I_1 + X_2 + Y_2 - I_2 &= 85 \\ I_2 + X_3 + Y_3 - I_3 &= 110 \\ I_3 + X_4 + Y_4 - I_4 &= 115 \\ I_4 + X_5 + Y_5 - I_5 &= 90 \\ I_5 + X_6 + Y_6 - I_6 &= 105 \end{aligned}\right\} \text{Restricciones de balance de inventario}$$

$$\left.\begin{aligned} X_1 &\le 100 \\ X_2 &\le 100 \\ X_3 &\le 100 \\ X_4 &\le 100 \\ X_5 &\le 100 \\ X_6 &\le 100 \end{aligned}\right\} \text{Restricciones de producción en tiempo normal}$$

$$\left.\begin{aligned} Y_1 &\le 15 \\ Y_2 &\le 15 \\ Y_3 &\le 15 \\ Y_4 &\le 15 \\ Y_5 &\le 15 \\ Y_6 &\le 15 \end{aligned}\right\} \text{Restricciones de producción en tiempo extra}$$

$$I_6 = 0 \quad \text{Restricción de inventario final}$$

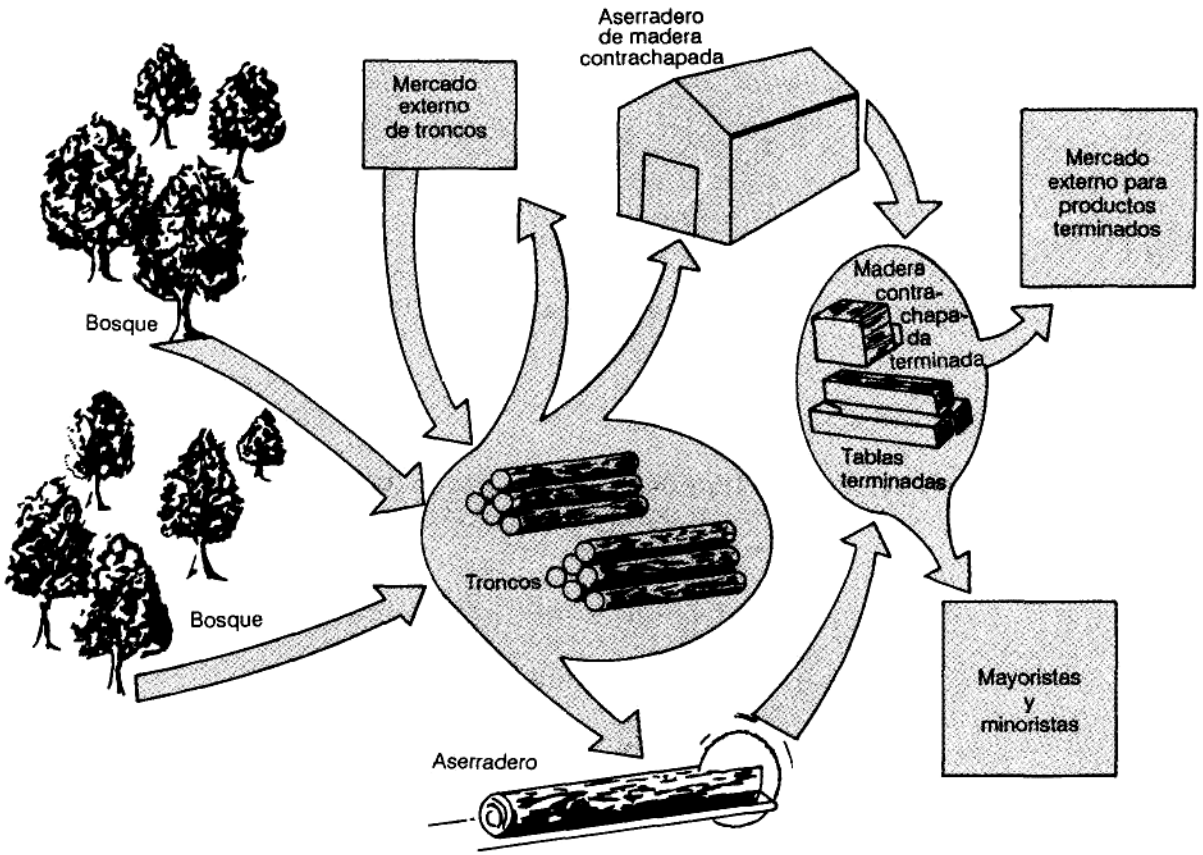
$$X_1, X_2, X_3, X_4, X_5, X_6, Y_1, Y_2, Y_3, Y_4, Y_5, Y_6 \ge 0$$

$$I_1, I_2, I_3, I_4, I_5, I_6 \ge 0$$

Ejemplo 5: Modelo integrado de planificación corporativa

Este ejemplo tiene que ver con la formulación de un modelo a gran escala o de sistema, diseñado principalmente para planificar las actividades integradas de un empresa. El ejemplo, cuyo diagrama se muestra en la figura 10-1, está muy simplificado e incluye sólo dos especies de árboles, dos productos de tablas y madera contrachapada y sólo algunas de las restricciones tecnológicas que com-

Figura 10-1 Modelo simplificado de una empresa de productos de madera



prende la producción de tablas y madera contrachapada (véase Tabla 10-7). La función objetivo no se muestra en la tabla 10-7; se obtendría multiplicando los precios de los productos terminados por el volumen de producción de los productos y restando los costos operativos (o de explotación) variables de todo el sistema.

El arte de formular modelos de programación lineal

La formulación de un modelo cuantitativo significa seleccionar los elementos importantes del problema y definir cómo se relacionan. No es una tarea fácil en el caso de problemas reales y comprende pruebas por tanteo y el juicio común. De hecho, es más un arte que un procedimiento sistemático. Sin embargo, hay algunos pasos que han demostrado ser útiles para formular modelos de programación lineal. Estos pasos son:

Tabla 10-7 Restricciones para la empresa de productos de madera

	Disponibilidad de tablas	*Embarques de tablas*	*Restricciones del aserradero*	*Tecnología de producción*	*Envíos a mercados*	*Demanda del mercado*
Abeto	$X_1 \leq A_1$	$X_7 + X_9 = X_1 + X_3 - X_5$	$X_7 + X_8 \leq A_3$	$X_{11} = a_5X_7 + a_6X_8$	$X_{11} + X_{12} = X_{15} + X_{16}$	$X_{15} \leq D_1$
			$a_1X_7 + a_2X_8 \leq A_4$	$X_{12} = a_7X_7 + a_8X_8$		$X_{16} \leq D_2$
			etc.		$X_{13} + X_{14} = X_{17} + X_{18}$	$X_{17} \leq D_3$
Pino	$X_2 \leq A_2$	$X_8 + X_{10} = X_2 + X_4 - X_6$	$X_9 + X_{10} \leq A_5$	$X_{13} = a_9X_9 + a_{10}X_{10}$		$X_{18} \leq D_4$
			$a_3X_9 + a_4X_{10} \leq A_6$	$X_{14} = a_{11}X_9 + a_{12}X_{10}$		
			etc.			

Símbolos (MPT significa millares de pies de tabla)

X_1 = MPT de corte de abeto
X_2 = MPT de corte de pino
X_3 = MPT de abeto comprados fuera
X_4 = MPT de pino comprados fuera
X_5 = MPT de abeto vendidos fuera
X_6 = MPT de pino vendidos fuera
X_7 = MPT de abeto al aserradero
X_8 = MPT de pino al aserradero
X_9 = MPT de abeto al aserradero de madera contrachapada
X_{10} = MPT de pino al aserradero de madera contrachapada
X_{11}, X_{12} = Producción en MPT de dos tipos de tabla (por ejemplo, 2 × 4 y 2 × 6)
X_{13}, X_{14} = Producción de hojas de dos tipos de madera terciada (por ejemplo, ½ pulgada y ⅜ de pulgada)
X_{15} = Tablas vendidas a distribuidores cautivos
X_{16} = Tablas vendidas al mercado externo
X_{17} = Madera contrachapada vendida a distribuidores cautivos
X_{18} = Madera contrachapada vendida al mercado externo
A_1 = MPT de abeto disponibles para corte
A_2 = MPT de pino disponibles para corte
A_3 = Capacidad global del aserradero
A_4 = Capacidad de una parte del aserradero (por ejemplo, de la sierra principal)
A_5 = Capacidad global del aserradero de madera contrachapada
A_6 = Capacidad de una parte del aserradero de madera contrachapada (por ejemplo, del torno)
$a_1, a_2, \ldots, a_{12}$ = Coeficientes tecnológicos
D_1, D_2, D_3, D_4 = Límites de la demanda del mercado

1. Defina en términos verbales el objetivo que trata de alcanzar con la resolución del problema. Seleccione sólo un objetivo, como "reducir los costos" o "aumentar la contribución a los beneficios".

2. Elabore una lista de las decisiones que deben tomarse, de la manera más específica posible.

3. Elabore una lista de los factores de restricción que afectan estas decisiones.

Trate de ser preciso y completo. A continuación se presenta una lista con varios tipos generales de restricciones. Vea si su problema presenta alguna de estas condiciones. Observe que también pueden existir otros tipos de restricciones. Por lo general un problema no presentará todos los tipos de restricciones.

- *Restricciones de la capacidad*. Son límites que se deben a la cantidad de equipo, de espacio o de mano de obra disponible. Una muestra sería la restricción que se refiere al tiempo disponible en la máquina del ejemplo 1.

Restricciones de mercado. Son límites (inferiores, superiores o ambos) de la cantidad de producto que puede venderse o usarse. Véase el límite de las ventas de gasolina para aviación en el ejemplo 3.

- *Restricciones de disponibilidad*. Son límites ocasionados por la escasez de materias primas, de fuerza de trabajo, de financiamiento o de otros recursos.
  Véanse las restricciones que se refieren a la disponibilidad de gasolina para mezcla en el ejemplo 3.
- *Restricciones de calidad o de mezcla*. Son restricciones que limitan la mezcla de ingredientes y que por lo general definen la calidad de los productos resultantes. Véanse las restricciones del octanaje y la presión de vapor del ejemplo 3.
- *Restricciones de tecnología de producción o de equilibrio de materiales*. Son restricciones que definen la salida de un proceso como una función de las entradas, muchas veces con una pérdida por desperdicios. Véanse las restricciones del ejemplo 5 que relacionan la producción de las hojas de madera contrachapada y las entradas de madera de pino y abeto que se usan.
- *Restricciones de definición*. Son restricciones que definen a una variable. Muchas veces estas restricciones provienen de definiciones contables. Véase la restricción del inventario del ejemplo 4.

4. Defina específicamente las variables de decisión. Con frecuencia es el paso más difícil. Lo que se requiere es una lista de variables, es decir, las *X y* sus definiciones, incluyendo la especificación de las unidades de medida. En algunos problemas puede haber más de una forma de definir las variables. Un enfoque es comenzar tratando de definir variables específicas que se ajusten a la lista de decisiones del paso 2. Por ejemplo, si va a decidir "cuál será la mezcla de productos", entonces un conjunto viable de variables de decisión podría ser:

X_1 para las unidades del primer producto
X_2 para las unidades del segundo producto

Y así para todos los productos. Observe que al especificar los valores para todas las X_j define de hecho la mezcla de productos.

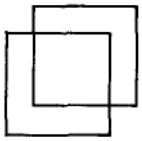
Otro método que en ocasiones sirve para definir las variables de decisión es dibujar un diagrama de flujo que muestre cómo se relacionan las diversas partes del problema; la figura 10-1 es un ejemplo de este método. Después se definen las variables que representen el flujo de los bienes, de los materiales, etc., entre las diversas partes. Observe que las variables de la tabla 10-7 están asociadas con las flechas de la figura 10-1. Por ejemplo, una flecha muestra el flujo de los troncos al aserradero de madera contrachapada, y las variable X_g (MPT de abeto al aserradero de madera contrachapada) y X_{i0} (MPT de pino al aserradero de madera contrachapada) son las variables de decisión que corresponden a este flujo de madera.

5. Defina específicamente las restricciones, con base en las variables de decisión. Tome la lista de restricciones que definió en el paso 3 y use las variables de decisión del paso 4 para obtener restricciones detalladas. El resultado es un conjunto de restricciones como las que se ilustraron en los cinco ejemplos del capítulo.

6. Defina con detalle la función objetivo. Hay que definir un coeficiente de costo o de beneficio para cada variable de decisión del paso 4. Es importante incluir sólo los costos o los beneficios que varíen con las decisiones que se consideran. Siempre hay que excluir los costos fijos.

Por ejemplo, el costo de mano de obra por unidad puede parecer razonable para incluirse en la formulación de programación lineal que define la mezcla de productos que debe producir una empresa. Sin embargo, si la empresa tiene una política de pagar a sus empleados por tiempo completo, sin importar el tiempo real que se utilice, entonces el costo de mano de obra es fijo. No varía con la decisión de mezcla de productos y debe excluirse de la función objetivo.

Aunque estos seis pasos son un esquema general para formular modelos lineales, no son un sustituto de la práctica y la experiencia. Usted debe probar varios de los ejercicios al final del capítulo para aumentar su habilidad para formular modelos.



RESUMEN

En un modelo de programación lineal hay una función objetivo lineal que debe maximizarse o minimizarse, sujeta a un conjunto de restricciones lineales. Todas las variables de decisión son no negativas. La formulación de un modelo de programación lineal consiste en traducir un problema de decisión empresarial a terminología de programación lineal, definiendo variables, especificando una función objetivo y escribiendo todas las restricciones como desigualdades o igualdades. Los ejemplos y pasos que se proporcionaron antes están diseñados para ayudarle a formular problemas de programación lineal.

Limitaciones de la programación lineal

Aunque la programación lineal ha probado ser una herramienta valiosa para la resolución de problemas grandes y complejos de las empresas y del sector público, existen limitaciones.

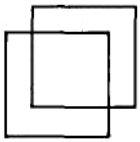
En primer lugar, no hay ninguna garantía de que la programación lineal ofrezca soluciones con valores enteros. Por ejemplo, una solución puede requerir 8.241 camiones y el gerente sólo puede comprar 8 o 9, pero no 8.241. En muchos casos el redondeo brindará soluciones razonablemente buenas, pero en otros casos los resultados pueden ser malos. Por ejemplo, en una decisión acerca de abrir una planta nueva (una variable que sólo puede asumir valores de 0 y 1), una respuesta fraccionaria no serviría de nada. Por fortuna, existen algunos métodos llamados *técnicas de programación entera* que pueden manejar este tipo de problemas. En el capítulo 14 se analizan algunas de estas técnicas.

Otra limitación importante de la programación lineal es que no se permite la incertidumbre. El modelo supone valores conocidos para los costos, para las restricciones de requerimiento, etc., cuando en realidad estos factores pueden ser desconocidos. Aquí también hay algunos métodos para tratar este problema, con técnicas conocidas como *programación lineal en condiciones de incertidumbre* o *programación restringida por probabilidades*. Algunas de las referencias avanzadas que se presentan en la bibliografía del capítulo tratan estos temas.

La tercera limitación es la suposición de la linealidad. En ocasiones el objetivo o las restricciones de los problemas empresariales reales no se relacionan linealmente con las variables. Una vez más, hay una técnica avanzada, denominada *programación no lineal,* que sirve para tratar los problemas de este tipo.

Estas limitaciones indican que la programación lineal no puede aplicarse a todos los problemas empresariales. Sin embargo, ha demostrado ser una herramienta poderosa y útil en aquellos problemas para los cuales es aplicable.

RESUMEN



La programación lineal no es útil para problemas que requieren soluciones enteras, que implican incertidumbre o que tienen restricciones o una función objetivo no lineal, pero sí es aplicable a una amplia gama de decisiones empresariales.



Bibliografía

Baumol, W. J., *Economic Theory and Operations Analysis,* cuarta edición, Englewood Cliffs, N. *J*,, Prentice Hall, 1977. Bradley, S. P., A. C. Hax y T. L. Magnanti, *Applied Mathematical Prograinming,* Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing, 1977. Chames, A. y W. W. Cooper, *Management Models and Industrial Applications of Linear Programming,* dos vols., Nueva York, John Wiley & Sons, 1963. Dantzig, G. B., *Linear Prograinming and Extensions,* Princeton, N. J., Princeton University Press, 1963.

Eppen, G. D., F. J. Gould y C. Schmidt, *Quantitative Concepts for Management,* tercera edición, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1988.

Geoffrion, Arthur M., "Better Distribution Planning with Computer Models", *Harvard Business Review,* julio-agosto de 1976.

Hillier, F. y G. J. Lieberman, *Introduction to Operations Research,* quinta edición, Nueva York, McGraw-Hill, 1990.

Savage, Sam L., *What's Best,* Oakland, Calif., Holden-Day, 1986.

Schrage, L., *Linear, Integer and Quadratic Prograinming with LINDO,* cuarta edición, South San Francisco, Calif., Scientific Press, 1989.

Shapiro, R. O., *Optimizationfor Planning and Allocation: Text and Cases in Mathematical Programming,* Nueva York, John Wiley and Sons, 1984.

Wagner, H., *Principies of Operations Research,* segunda edición, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1975.

Problemas con respuestas

10-1. Un empresa fabrica cuatro productos: A, B, C y D. Cada unidad del producto A requiere dos horas de fresado, una hora de montaje y 10 dólares de inventario en proceso. Cada unidad del producto B necesita una hora de fresado, tres horas de montaje y un costo de cinco dólares de proceso de inventariado. Una unidad del producto C requiere *2Vi* horas de fresado, 2 Vi horas de montaje y dos dólares de proceso de inventariado. Por último, cada unidad del producto D requiere cinco horas de fresado, no necesita montaje y cuesta 12 dólares de proceso de inventariado.

La empresa tiene 120 horas de fresado y 160 horas de montaje disponibles. Además, no puede disponer de más de mil dólares para proceso de inventario.

Cada unidad del producto A genera un beneficio de 40 dólares; una unidad del producto B genera un beneficio de 24 dólares; las unidades del producto C generan 36 dólares y las del producto D, 23 dólares. No se pueden vender más de 20 unidades del producto A, ni más de 16 unidades del producto C; puede venderse cualquier número de unidades de los productos B y D. Sin embargo, hay que producir y vender por lo menos 10 unidades del producto D para satisfacer un requisito contractual.

Formule el problema anterior como un problema de programación lineal. El objetivo de la empresa es maximizar los beneficios que resultan de la venta de los cuatro productos. No intente resolver el problema.

10-2. La compañía de préstamos U-Save planifica sus operaciones para el año entrante. Ofrece cinco tipos de préstamos, descritos a continuación, junto con el rendimiento anual (porcentaje) para la compañía.

Los requisitos legales y la política de la compañía imponen los siguiente límites a las cantidades que pueden entregarse en los distintos tipos de préstamos.

Tipo de préstamo	*Rendimiento anual (porcentaje)*
Préstamos personales	15
Préstamos para muebles	12
Prestamos para automóviles	9
Segunda hipoteca de casa	10
Primera hipoteca de casa	7

Los préstamos personales no pueden exceder el 10% de la cantidad total de los préstamos. La cantidad de préstamos personales y para muebles, en conjunto, no debe ser mayor del 20%. Las primeras hipotecas deben constituir por los menos el 40% de todas las hipotecas y por lo menos el 20% del total de préstamos. Las segundas hipotecas no pueden exceder el 25% del total de préstamos.

La compañía desea maximizar los ingresos de los intereses de los préstamos, sujetándose a las restricciones anteriores. La empresa puede prestar como máximo 1.5 millones de dólares.

Formule este problema como uno de programación lineal. No lo resuelva.

10-3. Una compañía vende dos productos diferentes, A y B. La información del precio de venta y de los costos unitarios es la siguiente:

	Producto A	*Producto B*
Precio de venta	$60	$40
Costo unitario	30	10
Beneficios unitarios	$30	$30

Tabla 10-8

	Mes					
	Ene.	*Feb.*	*Mar.*	*Abr.*	*Mayo*	*Jun.*
Pedidos (unidades) Costo por unidad con tiempo regular (miles de dólares) Costo por unidad con tiempo extra (miles de dólares)	58	36	34	69	72	43
	$18.0	17.0	17.0	18.5	19.0	19.0
	$20.0	19.0	19.0	21.0	22.0	22.0

Tabla 10-9

Mina	*Capacidad (m^3 de tierra procesada)**	*Costos de tratamiento (rands por m^3)*	*Grado (quilates por m^3)*	*Recuento de gemas (número de piedras por m^3)*
Planta 1	83 000	R0.60	0.36	0.58
Planta 2	310 000	R0.36	0.22	0.26
Planta 3	190 000	R0.50	0.263	0.21

*m^3 es metros cúbicos

t Observe que estas cifras no incluyen loe costos de extracción. Suponga que son los mismos para cada mina.

10-4. Los dos productos se fabrican en un proceso de producción común y se venden a dos mercados distintos. El proceso de producción tiene capacidad de 30 000 horas de trabajo. Se requieren tres hor-· s para producir una unidad A y una hora para producir una unidad B. El mercado se ha estudiado y los funcionarios de la compañía consideran que el número máximo de unidades de A que pueden vender es 8000; el máximo de B es 12 000 unidades. Los productos se pueden vender en cualquier combinación, con las limitaciones anteriores. Formule el problema anterior como un problema de programación lineal; es decir, escriba las ecuaciones apropiadas. Mangus Electric Products Co. (MEPCO) produce grandes transformadores eléctricos para la industria eléctrica. La compañía tiene pedidos (Tabla 10-8) para los próximos seis meses. Se espera que el costo de manufactura de un transformador varíe un poco en los próximos meses, por cambios esperados en los costos de los materiales y en las tarifas de trabajo. La compañía puede producir hasta 50 unidades al mes con tiempo normal y hasta 20 unidades adicionales si utiliza tiempo extra. En la tabla 10-8 se muestran los costos del tiempo normal y los del tiempo extra.

El costo de almacenamiento en inventarios de los transformadores que no se vendan es 500 dólares por mes. Al 10 de enero, la compañía tiene 15 transformadores en existencias y desea tener no menos de cinco en existencias para el 30 de junio.

10-5. Formule un problema de programación lineal para determinar el programa de producción óptimo para MEPCO. La compañía de diamantes Transvaal extrae diamantes de tres minas de Sudáfrica. Las tres difieren en cuanto a capacidad, número, peso de las gemas y costos; estos datos se presentan en la tabla 10-9.

Según las consideraciones de mercadotecnia, se requiere una producción mensual exacta de 148 000 gemas, mientras que otro requisito exige por los menos 130 000 quila-

tes (así, el tamaño promedio de las gemas es, por lo menos, de 130/148 = 0.88 quilates).

El problema para el gerente de la compañía es cumplir con las exigencias de mercadotecnia al menor costo.

Formule un modelo de programación lineal para determinar cuánto debe extraerse de cada mina. No resuelva el problema.

Problemas

Queremos seleccionar una estrategia de publicidad para llegar a dos tipos de clientes: amas de casa de familias con ingresos anuales superiores a 10 000 dólares y amas de casa de familias con ingresos anuales inferiores a 10 000 dólares.[2] Consideramos que las personas del primer grupo comprarán dos veces más nuestro producto que las personas del segundo grupo, y nuestro objetivo es maximi-zar las compras. Podemos anunciar el producto en televisión o en una revista; una unidad de publicidad en televisión cuesta 20 000 dólares y llega a aproximadamente 2000 personas del primer grupo y a 8000 del segundo. Una unidad de publicidad en la revista cuesta 12 000 dólares y llega a 6000 personas del primer grupo y a 3000 del segundo.[3] Hay que usar por lo menos seis unidades de publicidad en televisión y no podemos usar más de 12 unidades de publicidad en la revista, por cuestiones de política. El presupuesto para publicidad es de 180 000 dólares.

Formule este problema como un problema de programación lineal, definiendo todas las variables que utilice. En fechas recientes,

10-7. Super Sausage Com-pany (SSC) ha experimentado cambios radicales en los precios de las materias primas, y el gerente ha dado instrucciones a un analista para que examine las proporciones de mezcla de ingredientes que usa SSC para fabricar salchichas.

La fabricación de salchichas debe cumplir con dos requisitos clave para el producto. El porcentaje de proteína en peso debe ser por lo menos del 15% y el porcentaje de grasas en peso no puede exceder el 30% (el peso restante es de relleno). SSC dispone de las cuatro materias primas siguientes para sus mezclas, con las características que se indican:

Ingredient	*Porcentaje de proteína*	*Porcentaje de grasas*	*Costo por kilogramo*
A	40	10	$1.80
B	20	15	0.75
C	10	35	0.40
D	5	40	0.15

Formule un modelo de programación lineal que ayude a SSC a determinar el programa de mezclas más deseable. No resuelva el problema.

10-8. Remítase al ejemplo 1 de este capítulo. Suponga que la empresa tiene un tercer producto, C, que puede producirse en la primera o en la segunda máquina. Si se produce en la primera máquina se requiere una hora; si se hace en la segunda máquina, se necesitan dos horas. El producto C tiene beneficios marginales de nueve dólares por unidad.

Modifique la formulación del ejemplo 1 para incluir el producto C. El Consejo de Seguridad

10-9. de Estados Unidos debe asignar su presupuesto para los próxi-

[2] Este problema es una adaptación de F. M. Bass y R. T. Lonsdale, "An Exploration of Linear Programming in Media Selection", *Journal ofMarketing Research* 3, 1966.

[3] En este problema se supone que no se sobreponen el público lector de la revista y el público espectador de la televisión.

mos tres años. Ya se han tornado decisiones irrevocables con respecto a varias "áreas programadas" y a su financiamiento total; por ejemplo, se ha asignado un total de 110 000 dólares a la prevención de fallecimientos y a la reducción en daños a propiedades por accidentes automovilísticos. Pero hay que tomar decisiones detalladas acerca de los *proyectos* específicos para alcanzar los objetivos de los programas. En el caso de la prevención de fallecimientos y de la reducción en daños a propiedades, la tabla 10-10 contiene los proyectos que recomendaron los analistas del consejo, junto con los datos apropiados. Los miembros del consejo quieren que usted los ayude a tomar las decisiones sobre la asignación del presupuesto (o sobre la elección y la magnitud de los proyectos). Al preguntarles cuál de los objetivos específicos es más importante, dijeron: "¡Es una pregunta difícil! Por una parte, la vida humana es sagrada y no puede comprarse con ninguna cantidad de dinero. Por otra parte, si hay dos maneras de ahorrar *el mismo número de vidas*, obviamente preferiríamos el proyecto que dé como resultado la menor cantidad de daños a propiedades".

Al preguntarles en forma específica cuál sería la "compensación" entre vidas salvadas y daños a propiedades que les sería indiferente, su respuesta fue: "¡Esta pregunta es aún más difícil! Sin embargo, somos conscientes de que un organismo de gobierno ha establecido, para fines internos de asignación de recursos, un valor monetario implícito de 300 000 dólares por una vida humana que se salve (creemos que otro organismo también usa esta cifra para tomar decisiones acerca de la incorporación de características de seguridad adicionales en su equipo)".

Formule un modelo de programación lineal cuya solución represente una asignación óptima del presupuesto de 110 000 dólares, con base en la información anterior. Asegúrese de definir todas las variables que utilice. *No* tiene que resolver el problema formulado.

10-10. Delight Dairy Company (DD) produce una amplia gama de productos lácteos. Los productos se han separado en dos categorías principales, con el fin de planificar la producción: helados (varios sabores y tamaños) y especialidades (helado en palito, emparedados de helado, conos de helado, etcétera). Cada clase de producto tiene su propio equipo de empaquetado, pero ambas usan una misma máquina de fabricación de helado; también emplean el mismo grupo de trabajadores para producir y empaquetar cada clase de producto.

Los helados requieren dos horas de la máquina de fabricación de helados, una hora en su propia línea de empaquetado y tres horas de trabajo para producir 4000 litros de producto terminado.

Las especialidades requieren una hora de la máquina de fabricación de helado, una hora en su propia línea de empaquetado y seis horas de trabajo para producir el equivalente de 4000 litros de producto terminado. DD puede vender 4000 litros de helado en 300 dólares, y 4000 litros de especialidades en 500 dólares. Los costos de materias primas son aproximadamente iguales para ambas clases de productos.

En la actualidad, la compañía tiene un turno de trabajo (40 horas por semana) y emplea tres trabajadores de tiempo completo y un empleado de $^3/4$ de tiempo, para un total de 120 + 30 = 150 horas de trabajo a la semana.

Formule un modelo de programación lineal para la planificación de la producción de Delight Dairy.

10-11. Empire Abrasive Company (EAC) produce polvo de óxido de aluminio que utiliza en sus afiladoras y en sus abrasivos. Hay dos tipos de producto terminado: polvo fino y polvo grueso. Existen además dos tipos de insumos, llamados crudo de Surinam y crudo chino (según el país de donde proviene la bauxita de la cual se obtiene el crudo). Por último, hay dos modos de procesamiento, llamados *rápido y lento*, que pueden aplicarse a cualquiera de los materiales de entrada para producir diversos porcentajes de los productos terminados. La tabla 10-11 describe los porcentajes de cada producto terminado que se obtienen de las posibles

Tabla 10-10

Proyecto	*Limite superior de gastos para el proyecto (en dólares)*	*Prevención esperada de fallecim ientos por cada 1000 dólares gastados*	*Reducción esperada en daños a propiedades por cada 1000 dólares gastados*
1. Publicidad para el uso de cinturones de seguridad	$80 000	0.33	$ 0
2. Investigación para mejorar el diseño de carreteras	20 000	0.25	20 000
3. Investigación para mejorar el diseño de automóviles	75 000	0.15	30 000
4. Dólares gastados para promover leyes estatales más severas para conductores ebrios	100 000	0.27	10 000

Tabla 10-11 Porcentajes de salida para el polvo fino y para el grueso

	Entrada de crudo de Surinam		*Entrada de crudo chino*	
	Primer proceso	*Segundo proceso*	*Primer proceso*	*Segundo proceso*
Porcentaje de polvo grueso	45	25	35	20
Porcentaje de polvo fino	50	70	60	80
Pérdidas en la producción	5	5	5	0

combinaciones de los materiales de entrada y de los modos de procesamiento.

La tonelada de crudo de Surinam cuesta 300 dólares, mientras que la de crudo chino cuesta 350. Una tonelada de procesamiento *rápido* cuesta 50 dólares, y una de procesamiento *lento* cuesta 40 dólares. La tonelada de polvo grueso se vende a 500 dólares y la de polvo fino a 325. La planta de EAC puede procesar 1000 toneladas de crudo por semana. No hay límites en cuanto al volumen de producto terminado que puede venderse.

Formule un modelo de programación lineal para este problema que indique cómo puede llegar EAC a la situación más rentable. *Nota:* EAC puede usar ambos tipos de crudo y ambos tipos de procesos; es decir, pueden existir soluciones fraccionarias. La compañía Consolidated ha contratado el envío de sus productos de la fábrica a los

10-12. almacenes. El volumen de entregas se mide en toneladas-kilómetro (toneladas de producto multiplicadas por el número de kilómetros hasta el punto de entrega). Consolidated tiene que entregar aproximadamente 400 000 toneladas-kilómetro por mes.

Actualmente, Consolidated paga a Speedie Trucking Company 50 centavos por tonelada-kilómetro para que entregue el producto, pero quiere comprar una flotilla de camiones para hacerse cargo de todo o de una parte del servicio de entrega.

Se consideran tres tipos de camiones: grandes camiones remolque, camiones medianos y camionetas. En la tabla 10-12 se presentan los detalles de cada tipo.

Speedie Trucking ha indicado que seguiría entregando los productos que Consolidated no pueda distribuir con sus camiones, a la misma tarifa de 50 centavos por tonelada-kilómetro.

En Consolidated hay escasez de fondos de capital para equipo, y sólo se dispone de 380 000 dólares para las compras.

Además de la limitación del presupuesto, existen otras restricciones con respecto a los tipos de camiones que se compren. El primer punto es el área de carga disponible. Debido a las limitaciones del espacio de almacenamiento y de las maniobras de carga, no caben más de 28 camiones. Un remolque o un camión mediano ocuparía un espacio; dos camionetas ocuparían un espacio.

Además, como consecuencia de los tipos y tamaños de las entregas, por lo menos dos terceras partes de los vehículos que se compren tendrán que ser remolques o camiones medianos.

Formule este problema como un problema de programación lineal. No lo resuelva. Tenga cuidado en la especificación del objetivo y en la definición de las variables.

10-13. El sistema escolar de la ciudad de GOT-HAM tiene tres escuelas secundarias que atienden las necesidades de cinco áreas vecinales. Las capacidades de las escuelas son:

Escuela	*Capacidad (máximo de alumnos)*
A	4 000 3
B	000 2
C	000
Total	9 000

El tamaño (número de estudiantes de escuela secundaria) y la composición racial de cada vecindario se muestran a continuación:

Vecindario	*Porcentaje de estudiantes*	*Número de estudiantes de minorías*
1	2 100	30
2	2 400	80
3	1 300	20
4	800	10
5	1 600	20
Total	8 200	

Las distancias (en kilómetros) de cada vecindario a cada escuela son:

	Vecindario				
Escuela	*I*	2	*3*	*4*	5
A	1.2	0.4	2.6	1.4	2.4
B	0.8	2.0	0.5	0.7	3.0
C	1.3	2.2	1.6	2.0	0.2

Un juez federal ha dictaminado que ninguna escuela federal de la ciudad tenga más del 50% ni menos del 30% de alumnos pertenecientes a las minorías. Suponga que la cantidad de estudiantes que proceden de cada vecindario tiene la misma composición racial que todo el vecindario. Usted desea elaborar un plan que minimice el número total de kilómetros de transporte de los estudiantes, que cumplan las exigencias de integración del juez, y que garantice que no se transporte a ningún estudiante más de 2.5 kilómetros. Formule un modelo de programación lineal para resolver este problema.

10-14. Un fabricante elabora un producto en tres plantas y lo distribuye a través de cuatro almacenes de servicio al mercado. Se proporcionan los datos en la siguiente página: *a*. Suponga que el gerente de *mercadotec-nia* quiere *cumplir con toda la demanda a costo mínimo*. Elabore una formulación de programación lineal de este problema que genere las decisiones óptimas de producción y envíos.

Tabla 10-12

Tipo	*Costo de compra*	*Costo operativo (tonelada-kilómetro)*	*Capacidad (toneladas-kilómetro por mes)*
Remolque	$15 000	$0 28	10
Mediano	8 000	0 32	(XX)
Camioneta	5 000	0.40	8 000
			6 000

Almacén	*Precio de venta (por unidad)*	*Demanda anual (unidades)*
1	$1.00	40 (XX)
2	1.10	20 (XX)
3	1.00	25 (X)O
	0.60	

Planta	*Costo variable de producción por unidad*	*Capacidad anual (unidades)*
A	$0.40	40 000
B	0.35	30 000
C	0.45	45 000

Use X_{A2} para representar la cantidad que se produce en la fábrica A para envío al almacén 2; emplee notación similar para otros casos. *No resuelva el problema.*

De \ *A*	*Almacén 1*	*2*	*3*	*4*
Planta A	$0.20	$0.20	$0.30	$0.30
B	0.20	0.10	0.35	0.40
C	0.45	0.30	0.20	0.20

b. Suponga que el vicepresidente de grupo sólo desea satisfacer las demandas que generen beneficios, es decir, quiere maximizar los beneficios (los ingresos menos los costos de producción y transporte). Modifique su formulación de programación lineal de (a) para resolver este problema en forma óptima. No resuelva el problema.

10-15. Acmé Skateboard Company fabrica tres modelos de patinetas: regular, especial y de lujo. En la tabla 10-13 se muestran los datos de costos, precio de venta y otra información relacionada con cada modelo.

Acmé tiene una fuerza de trabajo de cinco individuos *asalariados* que trabajan un máximo de 40 horas por semana y que reciben una paga de 280 dólares por semana (incluyendo prestaciones) aunque no trabajen las 40 horas. Acmé desea encontrar el plan óptimo de producción semanal que maximice el beneficio y la contribución al costo fijo de fuerza de trabajo.

Formule un modelo de programación lineal que maximice el beneficio más la contribución a los costos fijos de fuerza de trabajo.

10-16. El gerente de operaciones de la compañía de alquiler de automóviles Hervís cree que un modelo matemático podría resultar útil para tomar las decisiones semanales acerca de la reubicación de los automóviles de alquiler de las ciudades con excedentes a las ciudades con déficit. El gerente recopila, una vez por semana, los datos acerca del número de automóviles en cada ciudad; la comparación de los datos con un número "objetivo" de vehículos para la ciudad indica si hay un excedente o un déficit. (Por

Tabla 10-13

Modelo	*Regular*	*Especial*	*De lujo*
Precio de venta por unidad	$7	$15	$25
Costo de materias primas por unidad	$3	$ 6	$10
Horas de trabajo necesarias para el montaje, para el acabado y para el empaquetado por unidad*	0.1	0.2	0.
Límite superior de la demanda para las ventas semanales	1 000	800	300

• Por ejemplo, en una hora de trabajo se pueden producir 10 patinetas regulares, cinco modelos especiales o dos modelos de lujo.

ejemplo, si la oficina del aeropuerto de Chicago tiene 67 automóviles en este momento y el objetivo es 80, tiene un déficit de 13 automóviles).

Cada semana, el gerente debe determinar cómo reasignar los automóviles de las ciudades con excedentes a las ciudades con déficit. Aunque el número objetivo no varía de una semana a la otra, el problema cambia cada semana, debido a los patrones agregados, aproximadamente aleatorios, de comportamiento del alquiler. Por ejemplo, en una semana Chicago puede tener un déficit de 13 automóviles, como sucedió antes; pero la siguiente semana puede tener un excedente de ocho vehículos. (88 automóviles).

El método que se utiliza actualmente para resolver este problema consiste en comenzar por la costa occidental y cubrir el déficit con los excedentes de las ciudades *más cercanas,* siempre y cuando el gerente no haya asignado esos automóviles a otra ciudad. De cualquier manera, el gerente cree que debe existir un procedimiento más sistemático para atacar el problema. La situación de cada ciudad (excedente o déficit en el número de automóviles) se conoce al inicio de la semana; el gerente también sabe cuál es el costo de reasignar un automóvil de la ciudad i a la ciudad y, lo cual se representa con *Cy*. Hervís tiene oficinas en 100 ciudades de todo el país, con una flotilla total de 10 000 automóviles. La suma de las cantidades objetivo también es 10 000 vehículos, por lo que los déficits se compensan con los excedentes.

a. Formule un modelo de programación lineal para resolver este problema.

b. El gerente de operaciones de Allegory Airlines (AA) tiene un problema seme jante al de reubicación de automóviles de Hervís. Cada noche, las aeronaves DC-9 de AA terminan sus operaciones de transporte de pasajeros en distintas ciudades; los DC-9 se requieren cada mañana en varias ciudades para iniciar los vuelos del día siguiente. Por des gracia, en ocasiones los DC-9 llegan en la noche a ciudades que no los re quieren en la mañana siguiente, mien tras que sucede lo contrario en otras ciudades. El programa de vuelos de AA no varía durante la semana; es más, por lo general no cambia en tres o cuatro meses. Así, el problema de AA es *idéntico* todas las noches; por ejemplo, si Chicago tiene un excedente de dos DC-9 esta noche, tendrá un excedente de dos DC-9 todas las noches hasta que se produzca el siguiente cambio en el programa de vuelos.

AA ha determinado el costo del vuelo de un avión de la ciudad i a la ciudad j, incluyendo aspectos complejos como el costo de transporte de la tripulación del avión de la ciudad *j* a su ciudad de origen (por lo general, otra ciudad); este costo se representa con C_{xy}.

¿Puede servir su modelo de programación lineal de *(a)* para resolver el problema de reubicación de aviones de AA? De ser así, indique los cambios en las definiciones de variables y demás cambios que se requieran; si el modelo no sirve, explique por qué.

Problemas más difíciles

10-17. Emory Ahiniiimm Company fabrica rollos de papel de aluminio de distintas anchuras. Los clientes pueden pedir rollos de 60, 50, 30 o 20 centímetros de ancho. El papel se fabrica con un micho normal de 135 centímetros y las anchuras menores se cortan del rollo normal.

Hay varias maneras de cortar las anchuras menores, como se indica en la tabla 10-14. Por ejemplo, con el método 3 se cortan del rollo normal un rollo de 60 cin de ancho, un rollo de 30 cin de ancho y dos rollos de 20 cm. Con este método quedan cinco centímetros de desperdicio [135 - 60 - 30 - 2(20) = 5]. Puesto que el método de corte genera ciertos desperdicios, hay algunas combinaciones (que no se indican) que no se pueden cortar. Todos los rollos para corte tienen anchura de 135 centímetros y todos los pedidos son para las medidas que se indican en la tabla. Además, todos los pedidos tienen una longitud determinada (la longitud del rollo).

Emory ha recibido los siguientes pedidos para el mes de julio:

Ancho	*Rollos pedidos*
24 centímetros	330
20 centímetros	120
12 centímetros	480
8 centímetros	160

¿Cómo debe cortar Emory sus rollos para satisfacer los pedidos? Formule un modelo de programación lineal para el problema, pero no lo resuelva.

10-18. Un granjero tiene 1000 hectáreas donde puede cultivar maíz o cebada o alimentar ganado. En la página siguiente se presenta la información sobre los dos cultivos.

El granjero puede sembrar la tierra con cualquier combinación de los dos granos o puede usar el terreno para criar reses y alimentarlas durante un año. Cada una de las reses cuesta 150 dólares y se vende a 800 dólares después de ser alimentada. Para cada res se requieren 20 horas de trabajo, media hectárea de terreno y 80 costales de maíz. El maíz para las reses puede ser el

Tabla 10-14

	Método de corte												
Anchura	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*11*	*12*	*13*
60 centímetros	2	1	1	1	1								
50 centímetros		1				2	2	1	1	1			
30 centímetros			1	2		1		2	1		4	2	
20 centímetros		1	2		3		1	1	2	4		3	6
Desperdicio (centímetros)	15	5	5	15	15	5	15	5	15	5	15	15	15

Elemento	*Maíz*	*Cebada*
Costo de semillas y otros materiales por hectárea	$100	$120
Horas de trabajo requeridas por hectárea	10	8
Rendimiento (costales por hectárea)	120	100
Precio de venta ($ por bushel	*) $4.25	$5.25
Precio de compra ($ por bushel)	$4.50	—

*** Medida de capacidad correspondiente a 2.84 hectolitros.**

que se cultive en el terreno, si alcanza, o puede comprarse.

El granjero puede usar fuerza de trabajo sin experiencia, a un costo de seis dólares por hora, o con experiencia, a 10 dólares por hora. Cada hora de trabajo del personal sin experiencia requiere 0.15 horas de supervisión, mientras que la fuerza de trabajo experimentada sólo necesita 0.05 horas de supervisión. Hay 2000 horas de supervisión disponibles.

El granjero sólo dispone de 200 000 dólares para comprar semillas y otros insumos, para la compra de reses y para pagar la mano de obra.

Formule el problema como un modelo de programación lineal.

10-19. Un fabricante ha establecido un contrato para producir 2000 unidades de un producto en los próximos ocho meses. El programa de entregas es el siguiente:

Mes	*Unidades*
Enero	100
Febrero	200
Marzo	300
Abril	400
Mayo	100
Junio	100
Julio	500
Agosto	300
Total	2000

El fabricante ha estimado que le cuesta un dólar almacenar una unidad de producto durante un mes. La capacidad de su almacén es de 300 unidades.

El fabricante puede producir cualquier número de unidades en un mes, ya que se producen principalmente con mano de obra temporal, fácilmente disponible. Sin embargo, existe el costo de la capacitación del nuevo personal y los costos que se relacionan con los despidos de personal. El fabricante estima que cuesta unos 75 centavos por unidad aumentar el nivel de producción de un mes al siguiente {es decir, si la producción de enero es 200 y aumenta a 300 en febrero, el costo es de 75 dólares para capacitación del personal adicional que se requiere para producir al nivel de 300 unidades). De manera análoga, cuesta 50 centavos por unidad reducir la producción de un mes al siguiente. (Al término de los ocho meses se despedirá a todos los empleados, con los costos correspondientes de la reducción de la producción.) Suponga que el nivel de producción antes de enero es cero.

a. Formule lo anterior como un problema de programación lineal.
b. Suponga que hay un límite de producción de 300 unidades mensuales. Formule el problema de programación lineal con esta restricción adicional.

10-20. El director de servicios para pasajeros de Ace Air Lines intentaba decidir cuántos nuevos asistentes de vuelo debe contratar y capacitar en los próximos seis meses. Los requerimientos en número de horas de vuelo exigidos a los asistentes eran:

Mes	*Horas necesarias*
Enero	8000
Febrero	7000
Marzo	8000
Abril	10 000
Mayo	9 000
Junio	12 000

Dos factores complicaban el problema. Se requería un mes para capacitar a los asistentes antes de que pudieran trabajar en los vuelos regulares y, por esto, la contratación tenía que efectuarse un mes antes de que surgiera la necesidad. Segundo, para capacitar a los nuevos asistentes se requería el tiempo de los asistentes ya entrenados. Para cada asistente nuevo se necesitaban 100 horas de un asistente entrenado en el mes de capacitación. En otras palabras, el número de horas disponibles para vuelo de los asistentes regulares se reducía en 100 horas por cada nuevo asistente.

El director de servicios para pasajeros no se preocupó por el mes de enero, ya que había 60 asistentes disponibles. Los reglamentos de la compañía estipulaban que un asistente no podía trabajar más de 150 horas en un mes. Esto quería decir que el director tenía un máximo de 9000 horas disponibles para el mes de enero, mil horas por encima de las necesidades (en estos casos no se despedía a los asistentes, sólo trabajaban menos horas).

Los registros de la compañía indicaban que cada mes un 10% de los asistentes renunciaban a su empleo por diversas razones.

El costo de un asistente regular para Ace Air Lines era de 1500 dólares mensuales, lo cual incluía el salario y las prestaciones, sin importar cuántas horas trabajara (por supuesto, no podían trabajar más de 150 horas). El costo de un asistente en etapa de capacitación era de 700 dólares por concepto de salario y prestaciones.

Formule la situación anterior como un problema de programación lineal diseñado para resolver el problema del director de servicios de los pasajeros con el menor costo posible. No intente resolver el problema. Asegúrese de identificar todos los símbolos que utilice.

10-21. El país de Milkandhoney sólo producía maquinaria, acero y automóviles, e importaba todos los demás bienes. El ministro de economía pensaba que se podía mejorar el bienestar del país maximizando el valor monetario neto de las exportaciones (es decir, el valor de las exportaciones menos el costo de los materiales que se importaban para producirlas). Milkandhoney podía vender en el mercado mundial todo el acero, los automóviles o la maquinaria que produjera, a precios de 500 dólares por unidad de acero, 1500 dólares por automóvil y 2500 dólares por unidad de maquinaria.

Para producir una unidad de acero se requerían 0.05 unidades de maquinaria, 0.01 unidades de automóviles, dos unidades de mineral comprado en el mercado mundial a 100 dólares la unidad y otros materiales de importación con costo de 50 dólares. Además, era necesario medio trabajador-año para producir una unidad de acero. Las fundidoras de acero de Milkandhoney tenían capacidad para producir 100 000 unidades cada año.

Para producir una unidad de automóviles, se necesitaba una unidad de acero, 0.1 unidades de maquinaria y un trabajador-año, así como 300 dólares de materiales importados para producir cada unidad. La capacidad de producción de automóviles era de 700 000 unidades anuales.

Para producir una unidad de maquinaria se requerían 0.01 unidades de automóviles, 0.5 unidades de acero y dos trabajadores-año, además de 100 dólares para artículos importados de otros países. La capacidad de las plantas de maquinaria era de 50 000 unidades por año.

El total de personal disponible para trabajar en Milkandhoney era de 800 000 personas por año.

a. Suponiendo que no se puede importar acero, automóviles ni maquinaria, for mule un modelo de programación li neal para determinar la combinación de producción que maximice las expor taciones netas (dólares). Tenga cuida do en definir todas las variables y establecer todas las relaciones entre va riables.

b. ¿Cómo formularía el problema de pro gramación lineal si no hubiera restric ciones sobre la importación de automóviles, acero ni maquinaria con los precios que se indican? ¿Hay algu-

Tabla 10-15 Características de las plantas eléctricas por unidad (mil millones de kilowatts-hora) de suministro anual

Tipo	*Suministro garantizado (millones de kilo-watts)*	*Suministro máximo (millones de kilowatts)*	*Costo de la inversión (miles de dólares)*	*Costo total actualizado (miles de dólares)*
Vapor	0.15	0.20	$30	$65
Hidroeléctrica, sin represa	0.10	0.10	40	42
Hidroeléctrica, represa pequeña	0.10	0.40	60	64
Hidroeléctrica, represa grande	0.80	0.90	100	110

10-22. na solución obvia para el problema formulado de esta manera? La compañía eléctrica Stateside planifica la construcción de nuevas instalaciones en su área para los próximos 10 años.[4] Es posible construir cuatro tipos de instalaciones de energía eléctrica: plantas de vapor que utilizan carbón para generar energía, plantas hidroeléctricas sin represa, plantas hidroeléctricas con represas pequeñas (capacidad de almacenamiento de agua suficiente para cubrir las fluctuaciones diarias) y plantas hidroeléctricas con grandes represas (suficiente capacidad de almacenamiento de agua para cubrir las fluctuaciones de flujo de agua y las de demanda de energía en la temporada).

El consumo de energía eléctrica se basa en tres características. La primera es el consumo anual total; se estima que el área requerirá 4 billones de kilowatts-hora hasta el décimo año. La segunda característica es el consumo máximo de energía, que por lo general ocurre en cualquier día de verano alrededor de las 4 P.M. Todos los planes deben suministrar capacidad máxima suficiente para cubrir la necesidad máxima esperada de 3000 millones de kilowatts en el décimo año. La tercera característica es el suministro garantizado de energía, que se mide como el suministro diurno promedio a mediados de invierno, cuando el consumo es alto y los niveles de agua para las plantas hidroeléctricas son bajos. El requisito de suministro garantizado hasta el décimo año es de 2000 millones de kilowatts.

Las diversas plantas de energía posibles varían en cuanto a la forma de satisfacer estas características. Por ejemplo, las plantas hidroeléctricas con represas pueden proporcionar gran capacidad máxima, mientras que las plantas de vapor y las hidroeléctricas sin represas no funcionan muy bien en este aspecto.

En la tabla 10-15 se presentan las características de los distintos tipos de plantas. Cada una se mide en función de una unidad de capacidad, la cual se define como la capacidad para producir un billón de kilowatts-hora por año. Observe que los tipos de plantas varían considerablemente en sus costos de inversión, así como en sus costos operativos (de explotación) anuales. Por ejemplo, el costo del carbón eleva bastante los costos anuales de las plantas de vapor, mientras que los costos operativos anuales de las plantas hidroeléctricas son relativamente menores. La última columna de la tabla muestra los costos totales actualizados, que incluyen tanto el costo de inversión como los costos operativos anuales actualizados.

La compañía quiere desarrollar un plan de 10 años que detalle la capacidad de cada

4 Este problema se basa en el artículo "Application of Linear Programming to Investments in the Electric Power Industry", P. Masse y R. Gibrat, en *Management Science,* Enero de 1957.

Tabla 10-16

	Oct.	*Nov.*	*Dic.*	*Ene.*	*Feb.*	*Mar.*
Automóviles necesarios	380	360	300	360	330	340

tipo de planta que debe construir. El objetivo es minimizar el costo total actualizado, pero existe la restricción de que no puede invertir más de 350 millones de dólares en plantas en los próximos diez años.

Formule el problema como un modelo de programación lineal.

10-23. En los modelos de programación lineal, por lo general se supone que la demanda de un producto es algo conocido, cuando en la práctica esta demanda es incierta. Con frecuencia se puede incorporar esta demanda incierta a un modelo de programación lineal, como se ilustra en este ejercicio.

Remítase al problema 10-1 y a la solución que se presenta al final del libro. Considere el producto A, para cuya demanda se supone que existe un límite superior de 20 unidades. Suponga aliora que el límite superior para la demanda del producto A es incierta pero se asigna una probabilidad de 0.4 de que se vendan 10 unidades como máximo, y de 0.6 de que se vendan 20 como máximo. Suponga también que si se producen más de 10 unidades y el límite superior de la demanda resulta ser sólo 10 unidades, se puede vender el excedente a un precio reducido que sólo ofrecerá un beneficio de 10 dólares por unidad. Su objetivo es maximizar el beneficio esperado. ¿Cómo modificaría la formulación del problema 10-1 para lograrlo?

Recomendación: Defina una nueva variable como el exceso de producción del producto A, por encima de 10 unidades, y considere los ingresos esperados que se obtendrían de la venta de estas unidades.

10-24. La compañía de alquiler de automóviles Premier tiene una flotilla en una ciudad grande de la parte occidental del país. La compañía ha pronosticado la demanda de automóviles de alquiler para los próximos seis meses, como se presenta en la tabla 10-16.

La compañía obtiene sus vehículos por arrendamiento de un fabricante de automóviles. Hay tres planes de arrendamiento disponibles, con duración de tres, cuatro o cinco meses. Los automóviles se arriendan al comenzar el primer día de cada mes y se devuelven al fabricante el último día del mes en el cual concluye el periodo de arrendamiento. Los costos de arrendamiento se muestran en la tabla 10-17.

Estos costos incluyen el pago por arrendamiento al fabricante y los gastos normales de mantenimiento y reparación. El arrendamiento se puede obtener en cualquier mes. El fabricante tiene ciertas restricciones: por lo menos el 60% de los automóviles deben arrendarse a cinco meses, y no más del 20% pueden estar en arrendamiento a tres meses.

La flotilla está compuesta, al 30 de septiembre, por 300 automóviles. Para 100 de ellos, el arrendamiento vence al término de octubre; para otros 100, vence al final de noviembre y para los 100 restantes vence al concluir diciembre. Premier desea tener entre 300 y 350 automóviles en la flotilla al terminar marzo (después de devolver los automóviles cuyo arrendamiento vence ese mes).

Premier quiere también minimizar sus costos de arrendamiento. Formule un problema de programación lineal para resolver el problema de planificación de la flotilla.

10-25. Precisión Pencil Company (PPC) produce lápices de madera y el grafito de los lápices. Hay dos clases principales de sus productos: lápices *regulares* y *de dibujo*. La producción del grafito para las dos clases utiliza las mismas instalaciones, pero en el caso del de mayor calidad para dibujo, las operaciones del departamento requieren ca-

Tabla 10-17

	Tipo de arrendamiento		
	Tres meses	*Cuatro meses*	*Cinco meses*
Costo total del atrendamiento	$1 140	$1 360	$1 500
Costo por mes	380	340	300

si el doble de tiempo por kilogramo de material que para el grafito regular. El departamento de fabricación está altamente automatizado y, en la fase de manufactura, la tasa de producción es idéntica para las dos clases de productos. La tabla adjunta presenta un resumen de la tasa máxima de producción por hora para cada departamento (grafito y fabricación) *cuando el departamento sólo se usa para una clase de productos*.

Tasas máximas de producción para cada producto, por separado

Departamento	*Clase de productos*	
	Regular (por hora)	*Dibujo (por hora)*
Grafito	500 kilogramos	300 kilogramos
Fabricación de lápices	30 gruesas*	30 gruesas*

*** Una gruesa es 144 lápices.**

Los lápices regulares usan 10 kilogramos de grafito regular por gruesa y los lápices de dibujo requieren 15 kilogramos de grafito de dibujo por gruesa.

La demanda de lápices de dibujo es constante: 6500 gruesas por trimestre. La demanda de los lápices regulares también es constante en el primer trimestre del año, 7800 gruesas, luego sube a 10 400 gruesas en el segundo y tercer trimestres (por los pedidos escolares) y luego baja otra vez a 7800 gruesas en el cuarto trimestre.

Cada uno de los departamentos (grafito y fabricación) dispone de 520 horas de producción normal por trimestre, además de un máximo de 78 horas de producción con tiempo extra. Los inventarios de grafito y lápices terminados pueden almacenarse de un trimestre al siguiente.

El costo variable para fabricar un kilogramo de grafito es de 0.10 dólares para el regular y de 0.15 dólares para el de dibujo. El costo variable de fabricación de una gruesa de lápices (incluyendo el costo del grafito) es de cuatro dólares para los lápices regulares y de 4.50 dólares para los lápices de dibujo, en tiempo regular. Estos costos aumentan un 10% con la producción en tiempo extra. El costo total de almacenamiento es el 20% del costo variable anual.

Formule un modelo de programación lineal cuya solución indique un plan de producción para PPC en los cuatro trimestres del año. No intente resolver el problema.

10-26. Nationwide Airlines,[5] se enfrenta a un fuerte aumento en el costo del combustible para aviones y se interesa por optimizar sus compras de combustible en distintos lugares del país. En términos generales, hay varias opciones con respecto a la cantidad de combustible que puede cargarse en un avión para un vuelo, mientras no se violen los límites mínimos y máximos. El programa de vuelo se considera una secuencia de segmentos de vuelo, o etapas, que sigue cada avión. El programa de vuelo regresa finalmente al punto de partida, para que se obtenga una "rotación". Considere la siguiente rotación:

[5] Este problema es una adaptación de D. Wayne Darnell y Carolyn Loflin, "National Airlines Fuel Management and Allocation Model", *¡nterfaces,* febrero de 1977, págs. 1-16.

Tabla 10-18 Requisitos y límites de combustible (miles de litros, a menos que se especifique lo contrario)

Número de ciudad	*Secuencia de*	*Combustible mínimo requerido*	*Combustible máximo permitido*	*Consumo normal de combustiblt si se carga el combustible mínimo*	*Combustible adicional consumido por litro de combustible almacenado en el tanque (es decir, combustible por encima del mínimo; en litros)*	*Precio por litro (centavos)*
1	Los Ángeles a Miami	23	33	12.1	0.40	82
2	Miami a Tampa	8	19	2.0	0.05	75
3	Tampa a La Guardia	19	33	9.5	0.25	77
4	La Guardia a Los Ángeles	25	33	13.0	0.45	89
1	Los Ángeles a Miami (etcétera)					

Los Ángeles-Miami-Tampa-La Guardia-Los Ángeles

El combustible para estos segmentos de vuelo puede comprarse en la ciudad de partida o en una ciudad anterior de la secuencia y almacenarse en el tanque. Por supuesto, se requiere combustible para transportar el combustible, por lo cual hay que hacer concesiones entre la compra del combustible en el lugar más económico y almacenarlo en el tanque durante los vuelos.

Se obtuvieron los datos que se presentan en la tabla 10-18.

La columna "Consumo normal de combustible" toma en cuenta el consumo si se carga la cantidad mínima de combustible, y la columna "Consumo adicional de combustible" indica la cantidad adicional de combustible que se consume en cada segmento de vuelo por cada litro de combustible almacenado en el tanque *por encima* de la cantidad mínima.

Observe que la cantidad de combustible con la cual se llega a Los Ángeles debe ser igual a la cantidad con la cual se llega a esta ciudad en la siguiente rotación, para que el sistema esté en equilibrio.

Un analista ha comenzado a formular este caso como un problema de programación lineal y ha definido las siguientes variables desconocidas:

$/, =$ Inventario de combustible sobrante al llegar a la ciudad i (miles de litros)

$X_i =$ Cantidad de combustible comprada en la ciudad i (miles de litros)

Así, $(/_f + X_i)$ es la cantidad de combustible que hay en el avión cuando sale de la ciudad i.

Formule la situación anterior como un problema de programación lineal. Acmé

10-27. Injectors (AI) produce inyectores de combustible para automóviles.[6] La tolerancia entre la aguja y el cuerpo del inyector es crítica, y ni la maquinaria más moderna puede fabricar las agujas y los cuerpos con esta tolerancia exacta. AI produce grupos de agujas y cuerpos y luego los clasifica en una de

[6] Este problema se extrajo del articulo de G. J. Gutiérrez, W. H. Hausman y H. L. Lee, "Dynamic Control of Imperfect Component Production", presentado en la reunión TIMS/ORSA, Las Vegas, 7 a 9 de mayo de 1990.

diez categorías de forma que una aguja de clase i con un cuerpo de clase i, cumplen la tolerancia requerida.

Suponga que las máquinas pueden configurarse con agujas y cuerpos de cualquier clase entre 1 y 10, y suponga también que se conoce, para cada configuración, el porcentaje de productos resultantes de todas las categorías, lo cual se especifica como *PÍJA yPijc; PÍJA* representa el porcentaje de agujas de la categoría y que se producen cuando la máquina se configura con la categoría i; $P_{¡jc}$ representa de manera análoga a los cuerpos. Las clases; = 0 *yj* = 11 registran los defectos (agujas y cuerpos que no pueden usarse). Las máquinas de producción pueden configurarse para distintos valores en diferentes fases de la sesión de producción.

a. Formule un modelo de programación lineal para determinar las configuracio nes de la máquina de producción que maximicen el porcentaje de agujas y de cuerpos que pueden montarse para obtener inyectores buenos. Suponga que las cantidades de producción tie nen el tamaño suficiente para que las salidas sean iguales a los porcentajes $P_{,JA}$ *y* V

b. Considere ahora una versión muy sim plificada de este problema en la cual se puede producir la aguja perfectamente; es decir, $P_{¡iA} = \sij = iyOs\j^* i$. Su ponga también, para la producción de los cuerpos, que $P_{,M\ c} = 0.25$; $P_{liC} = 0.50$ y $P_{,M\ c} = 0.25$ (todos los demás valores de P_{iJC} son cero). ¿Puede resolver este problema por inspección?

Caso 10-28



Impala Gold Company operaba una mina de oro en el Estado Libre de Orange, Sudáfrica. La operación consistía en minería subterránea, a una profundidad de 1400 metros, para la extracción de mineral de oro. Las rocas se transportaban por los túneles de la mina a un molino que trituraba la roca y extraía el oro.

La mina Impala tenía tres túneles. La información acerca de estos túneles se presenta en la tabla adjunta. Observe que el mineral que se obtiene de cada una de las áreas de los túneles tiene diferente contenido de oro y distinto costo.

Las rocas que se extraían de los tres túneles se enviaban al molino para ser trituradas y refinadas. La capacidad del molino dependía de la finura del molido de las rocas. Si las rocas se molían finamente, la capacidad del molino era de 240 000 toneladas mensuales y se recuperaba el 95% del oro en la operación. Las rocas de cada túnel se podían moler por separado. El costo de molido fino de una tonelada de roca era 1.12 rands por tonelada. Si el molido de las rocas era grueso, la capacidad del molino era de 250 000 toneladas, pero la recuperación de oro bajaba al 90%. El costo de molido grueso de una tonelada de roca era de 0.85 rands. La mina podía vender todo el oro que produjera, a 0.80 rands el gramo.

El gerente de la mina estaba preocupado por la cantidad de mineral que debía extraer de cada una de las áreas de los túneles. Había observado que la capacidad del molino no era suficiente para manejar todos los túneles si éstos operaban a toda su capacidad. El problema se complicaba aún más por el requisito legal de que la mina no podía operar "por encima del grado promedio" de las reservas de mineral. En la mina Impala este grado promedio era de 20 gramos por tonelada. Por lo tanto, existía la restricción legal de que la mezcla de rocas de los tres túneles no podía exceder un promedio de 20 gramos de oro por tonelada de mineral.

Formule un modelo de programación lineal para maximizar los beneficios de la operación de la mina.

	Túnel 1	*Túnel 2*	*Túnel 3*
Capacidad de transporte del túnel (toneladas por mes)	85 000	90 000	20 000
Grado del mineral (gramos de oro por tonelada de roca)	25	6	5
Costo variable de la extracción de roca (rands por tonelada)			15 4

Caso 10-29

El tesorero de los grandes almacenes Racy's lleva a cabo su planificación financiera para los próximos seis meses (septiembre a febrero).[7] Se aproxima la temporada navideña, por lo que Racy's necesita grandes cantidades de efectivo, sobre todo en los meses de noviembre y diciembre; en enero y febrero ingresa gran cantidad de efectivo, cuando los clientes pagan sus cuentas navideñas. Estas condiciones se resumen en la tabla 10-19 (en miles de dólares).

El tesorero tiene tres fuentes de financiamiento a corto plazo para satisfacer las necesidades de Racy's. Estas fuentes son:

1. *Compromiso sobre cuentas por cobrar*. Un banco de la localidad prestará dinero mensualmente a Racy's a cambio de un compromiso basado en el saldo de las cuentas por cobrar que exista al iniciar un mes. El préstamo máximo es del 75% de las cuentas por cobrar de un mes. El costo de este préstamo es el 1.5% mensual de la cantidad que se preste.

2. *Pago aplazado de las compras*. El pago de las compras se puede aplazar un mes. Así, por ejemplo, los 100 000 dólares planificados para pagos en noviembre pueden posponerse hasta diciembre y Racy's podría usar los fondos para satisfacer las necesidades de noviembre. Si Racy's pospone de esta manera los pagos de las compras, pierde el descuento del 3% que recibe normalmente por pronto pago.

3. *Préstamo a corto plazo*. Un banco está dispuesto a prestar a Racy's cualquier cantidad entre 40 000 y 100 000 dólares a seis meses. El monto total del préstamo se obtendría al iniciar septiembre y se pagaría todo al final de febrero. No es posible ampliar el préstamo ni pagar parte de él durante el periodo. El costo del préstamo sería el 1% mensual, lo cual se puede pagar cada mes.

En cualquier periodo, si la empresa tiene exceso de fondos, puede invertirlo en bonos de gobierno a corto plazo con un rendimiento del 0.5% mensual.

El objetivo del tesorero es minimizar el costo neto de los intereses para Racy's y cubrir al mismo tiempo las necesidades de efectivo de la empresa.

Formule la decisión anterior de financiamiento a corto plazo como un problema de programación lineal. Asegúrese de nombrar todas las variables y explicar las relaciones entre ellas.

[7] Este problema se basa en A. A. Robicheck, D. Teichroew y J. M. Jones, "Optimal Short-Term Financing Decisions", *Management Science,* septiembre de 1965.

Tabla 10-19

	Sept.	*Oct.*	*Nov.*	*Dic.*	*Ene.*	*Feb.*
Saldo de cuentas por cobrar (al iniciar el mes)	$70	$50	$70	$120	$100	$ 50
Pagos planificados de compras (suponiendo que se aplica el descuento)	80	90	100	60	40	50
Necesidades de efectivo para las operaciones	—	30	60	90	—	—
Excedente de efectivo de las operaciones	20	—	—	—	30	150

Caso 10-30 Daguscahonda Mines Company (DMC) explota minas de carbón a cielo abierto en la parte occidental de Pennsylvania. Actualmente trabaja en tres minas, A, B y C, cada una de las cuales produce carbón con distinto contenido de azufre y ceniza. El carbón de las tres minas se transporta a un molino común que muele el carbón para obtener una mezcla más fina. El carbón se "lava" después para eliminar parte del azufre y la ceniza. En el proceso de lavado se vacía el carbón molido en un tanque de gran tamaño que contiene un fluido. El carbón más limpio flota y se retira para venderlo. El carbón con mayor concentración de impurezas se hunde en el fondo del tanque y se desecha.

Se puede controlar la cantidad de impurezas que se eliminan utilizando fluidos de lavado de distintas densidades (de pesos específicos diferentes). Actualmente se usan tres fluidos: ligero, mediano y pesado. Con el fluido pesado se recupera (es decir, flota) mayor cantidad de carbón, pero se elimina menor cantidad de impurezas (véase Tabla 10-20).

Si el carbón de la mina A se lava sólo con fluido ligero, únicamente se recupera el 40% del carbón para la venta. Este carbón contiene un 0.62% de azufre y un 1.6% de cenizas. Por otra parte, si se usa el fluido pesado, el rendimiento aumenta al 55%, pero el carbón recuperado contiene 1.04% de azufre y 2.1% de cenizas.

La operación de molido y lavado se configura de manera que se puede usar cualquier combinación de carbón de las minas con cualquiera de los fluidos. Después del lavado, se combina todo el carbón para formar una sola mezcla, que DMC pone a la venta. Los requerimientos ambientales limitan la mezcla a un máximo de 0.5% de azufre y de 2.0% de cenizas.

Hay otras restricciones. El equipo disponible limita la cantidad que puede producirse en cada mina (véase Tabla 10-21). El molino puede manejar un máximo de 8000 toneladas de carbón no lavado por semana, con tiempo normal, pero con tiempo extra la capacidad puede aumentar a 12 000 toneladas. El costo de la operación de molido es de cinco dólares por tonelada de *carbón no lavado* en tiempo normal y de 7.50 dólares por tonelada en tiempo extra. El tanque de lavado puede manejar hasta 6000 toneladas de *carbón recuperado* en tiempo normal y otras 3000 toneladas más en tiempo extra. El costo de lavado es de 10 dólares por tonelada de *carbón recuperado* en tiempo normal y de 15 dólares en tiempo extra.

Tabla 10-20 Efecto de los diferentes fluidos en la recuperación de carbón y en la eliminación de impurezas

Mina de origen y tipo de fluido	*Toneladas de carbón recuperadas por tonelada de entrada*	*Porcentaje del contenido de azufre del carbón recuperado*	*Porcentaje del contenido de cenizas del carbón recuperado*
Mina A			
Ligero	0.40	0.62	1.6
Mediano	0.50	0.91	1.9
Pesado	0.55	1.04	2.1
Mina B			
Ligero	0.70	0.22	1.9
Mediano	0.90	0.35	2.3
Pesado	0.95	0.47	2.5
MinaC			
Ligero	0.62	0.42	1.5
Mediano	0.75	0.50	1.8
Pesado	0.82	0.78	2.2

Tabla 10-21 Costos y capacidades de las minas DMC

Mina	*Capacidad (toneladas máximas extraídas por semana)*	*Costo (dólares por tonelada extraída)*
A	6000	$25
B	2 300	45
C	5000	40

En la tabla 10-21 también se muestran los costos variables de la operación de cada mina. Además, se gastan dos dólares por tonelada de carbón no lavado con el fluido ligero, cuatro dólares por tonelada con el líquido mediano y seis dólares por tonelada con el fluido pesado. DMC vende su mezcla de carbón a 100 dólares la tonelada.

Formule lo anterior como un modelo de programación lineal.

CAPÍTULO 11

Resolución de problemas de programación lineal

En el capítulo 10 se presentó una amplia gama de problemas que pueden formularse como modelos de programación lineal. En este capítulo se verá la forma de resolverlos. Puesto que los problemas reales de programación lineal pueden ser muy grandes y complejos, se emplean métodos de computación para resolverlos. Estos métodos son de gran interés para los especialistas en computación y los matemáticos, y las ideas básicas de esta técnica, llamada método simplex, se analizan en el capítulo 12. Los gerentes se interesan más por las soluciones que por los aspectos matemáticos de los métodos. Usted podrá preguntarse por qué debe estudiar este capítulo; la respuesta es que las soluciones de los problemas de programación lineal permiten ver muchos detalles del problema de decisión. En el capítulo 2 se analizaron el valor del análisis de sensibilidad y otros aspectos de los modelos en general que los gerentes pueden conocer. Las soluciones de los problemas de programación lineal ofrecen muchos detalles y, para comprender plenamente las soluciones, es necesario conocer algo acerca del proceso de resolución. Por lo tanto, este capítulo presenta algunas ideas de las soluciones algebraica y gráfica de la programación lineal y los conceptos útiles que los gerentes pueden obtener de estas soluciones.

Solución gráfica

En la mayoría de los casos no es posible resolver gráficamente los problemas de programación lineal, por nuestra incapacidad para visualizar más de tres dimensiones espaciales. Sin embargo, es conveniente ver cómo se puede resolver un problema sencillo en forma gráfica, ya que los problemas de mayor dimensión tienen soluciones semejantes.

Situación. Una empresa fabrica dos productos, A y B. Cada uno requiere tiempo en dos máquinas. La primera máquina tiene 24 horas disponibles y la segunda

tiene 16. Cada unidad del producto A requiere dos horas en ambas máquinas y cada unidad del producto B necesita tres horas en la primera máquina y una hora en la segunda. Los beneficios son de seis dólares por unidad de Ay de siete dólares por unidad de B, y la empresa puede vender todas las unidades que fabrique de ambos productos.

Problema. Suponga que el objetivo es maximizar el beneficio; ¿cuántas unidades de los productos A y B debe producir? Este problema de programación lineal se analizó en el capítulo 10. Aquí se repasará brevemente su formulación.

Formulación. Sea:

X, = Número de unidades del producto A que se fabricarán *Xi* =
Número de unidades del producto B que se fabricarán *P* =
Beneficio total para la empresa

La situación y el objetivo (maximizar el beneficio) se pueden expresar con las siguientes ecuaciones:

Maximizar: $P = 6X_1 + 7X_2$
Sujeto a: $2X_1 + 3X_2 \leq 24$
$2X_1 + X_2 \leq 16$
$X_1, X_2 \geq 0$

Solución. En la figura 11-1 se muestran las dos ecuaciones de restricción. La ecuación

$$2X_1 + 3X_2 \leq 24$$

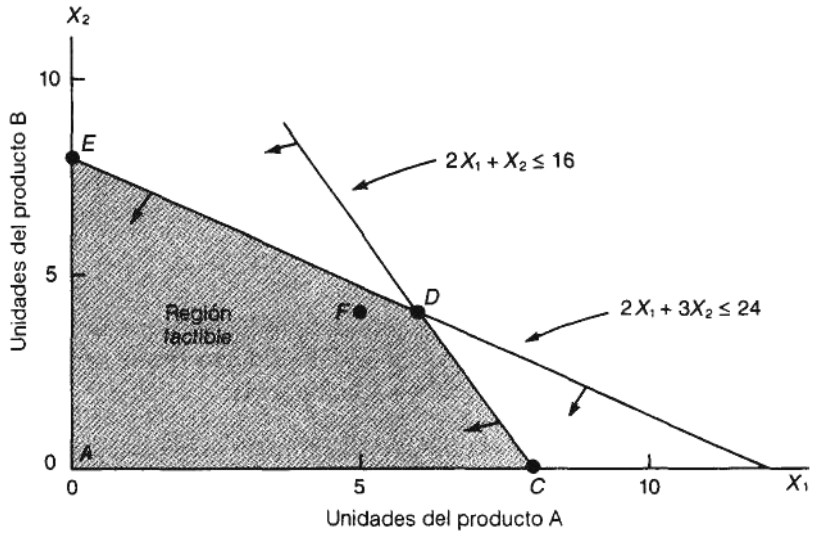
es la restricción que impone la limitación de horas disponibles (24) en la primera máquina, y todos los puntos situados a la izquierda y debajo de la línea son combinaciones posibles (factibles) de X, yX_2- Análogamente:

$$2X_1 + X_2 \leq 16$$

es la restricción. que se relaciona con la segunda máquina, y todos los puntos situados abajo y a la izquierda son factibles. También están las restricciones $X_x > 0$ y X_2 0, ya que la producción no puede ser negativa.

Considere el punto *F* dentro de la región sombreada de la figura 11-1, que comprende la producción de cinco unidades del producto A y cuatro unidades del producto B. Para ello se requieren 2 x 5 + 3 x 4 = 22 horas en la primera máquina. Esta cifra es menor que las 24 horas disponibles y por lo tanto cumple con la restricción de la primera máquina. Así mismo, se requieren 2 x 5 + 1 x 4 = 14 horas en la segunda máquina, también menor que el límite de 16 horas disponibles. Por último, λ', y X_2 son positivos y satisfacen las restricciones de no negatividad. La solución que representa el punto no viola ninguna de las restricciones, por lo cual es un punto factible. La región sombreada *ACDE* de la figura 11-1 es el

Figura 11-1 Restricciones de programación lineal y región factible



conjunto de puntos factibles de acuerdo con todas las restricciones y se le denomina **región factible.**

Nuestro objetivo es encontrar el punto o los puntos dentro de la región factible *ACDE* que maximicen el beneficio. Ahora se mostrará que *el punto óptimo siempre estará en un vértice de la región factible*. Los cuatro vértices de *ACDE* son los puntos *A, C,D y E y* uno de ellos debe ser una solución óptima del problema de programación lineal.[1]

Para ver en forma intuitiva por qué la solución óptima siempre estará en un vértice de la región factible, se elabora un gráfico de las funciones de beneficios. Una *función de beneficio* es una línea que contiene todas las combinaciones de ^1 y *%2* <5"e representan una cantidad constante de beneficios. En la figura 11-2 se muestra una serie de funciones de beneficios para distintos niveles de beneficios.

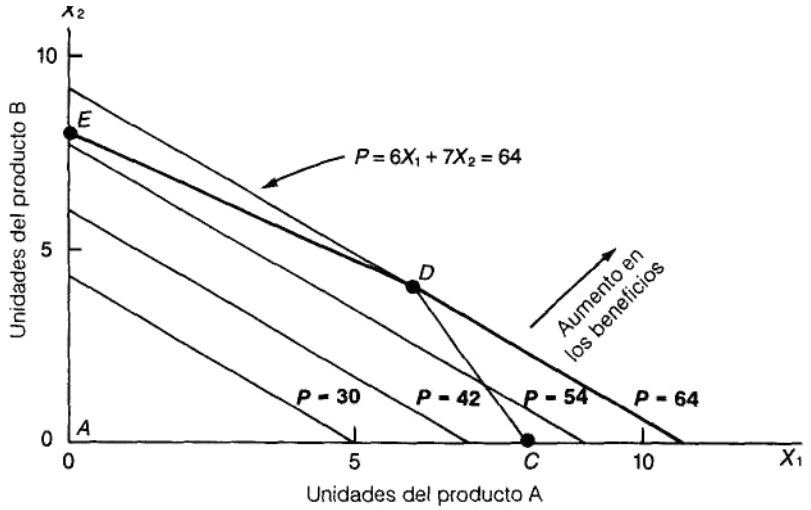
Considere la función de beneficio para la cual $P = 42$. La ecuación de esta línea es:

$$P = 42 = 6X_1 + 7X_2$$

Esta línea contiene varios puntos factibles (puntos en *ACDE),* todos los cuales generarían 42 dólares de beneficio. Pero la línea $P = 54$ es mejor que $P = 42$, pues contiene puntos factibles con beneficio de 54 dólares. Observe que la línea de beneficio $P = 54$ es paralela a la línea $P = 42$; en los problemas de programación lineal todas las líneas de beneficios serán paralelas. Continuamos considerando

[1] Más adelante se verá que dos o más vértices adyacentes pueden ser soluciones óptimas alternativas.

Figura 11-2 Funciones de beneficios $P = 6X\backslash + 7X2$



las líneas paralelas a la línea $P = 42$ hasta llegar a la línea P - 64. Aquí sólo hay un punto en la región *ACDE, D, y D* (que es $X_1 = 6$ y $X_2 = 4$) es la solución óptima. No hay puntos en la región factible para valores de P mayores.

El vértice específico que será la solución dependerá de la pendiente de la función de beneficio, es decir, de la rentabilidad relativa de los productos A y B. Si, por ejemplo, el producto A fuera mucho más rentable que el producto B, digamos ocho dólares por unidad de A y dos dólares por unidad de B, entonces la función objetivo sería:

$$P - SX_1 + 2X_2$$

Las funciones de beneficios para esta opción se presentan en la figura 11-3. Observe que el punto C es ahora la solución óptima. De manera parecida, si el producto *B* fuera mucho más rentable que A y la función objetivo fuera, por ejemplo:

$$P - 2X_1 + SX_2$$

entonces el punto óptimo sería *E*. Si la empresa perdiera dinero con ambos productos, el origen, donde no hay producción de ninguno, sería entonces lo óptimo.

Soluciones óptimas alternativas. Es posible que las funciones de beneficios tengan la misma pendiente que una de las ecuaciones restrictivas. Por ejemplo, si la función objetivo fuera $P = 8X\chi + 4X_2$, representaría una serie de líneas paralelas a *CD,* como se muestra en la figura 11-4. En este caso hay múltiples soluciones

Figura 11-3 Alternativas de funciones de beneficios P = *8X*\ + 2X2

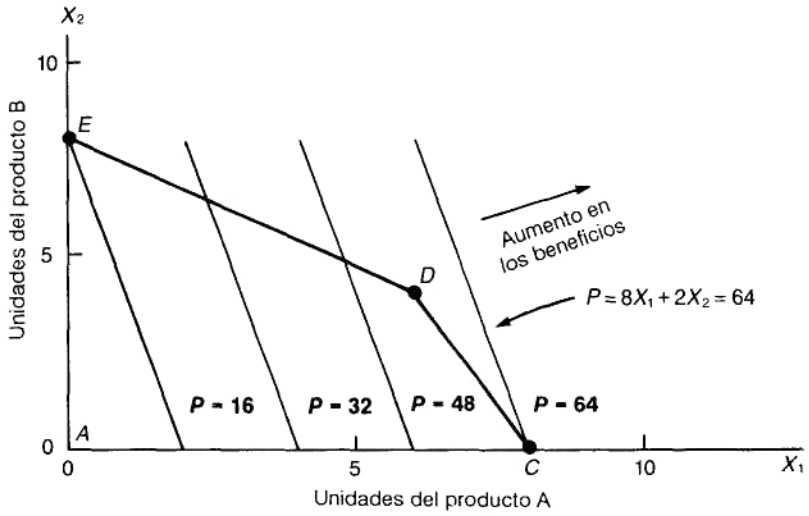
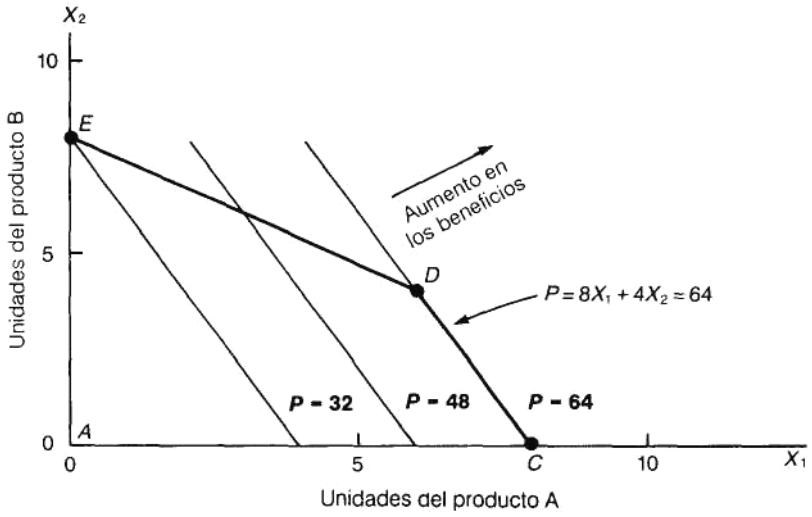


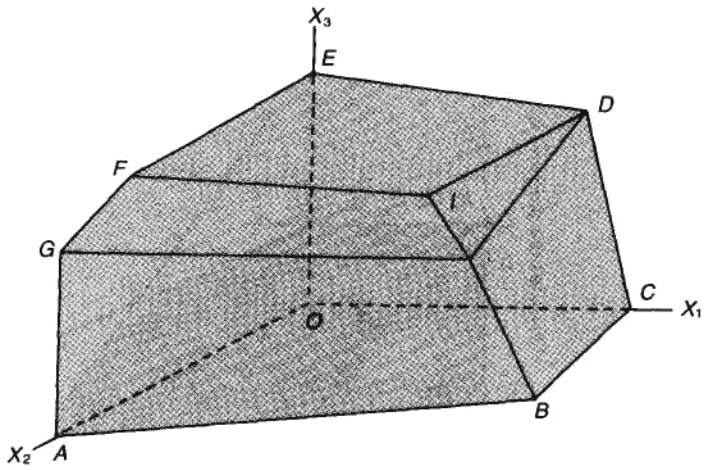
Figura 11-4 Múltiples soluciones óptimas *P* = 8Xj + *4Xj*



óptimas. Los vértices *C y D* son puntos óptimos con beneficio de 64 dólares, pero también lo son todos los puntos sobre la línea *CD* de la figura 11-4.

Más dimensiones. Visualice la extensión del problema de programación lineal a tres dimensiones, como se muestra en la figura 11-5. Las restricciones repre-

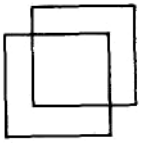
Figura 11-5 Región factible en tres dimensiones



sentan planos en el espacio tridimensional y la región factible es un área tridimensional limitada por estos planos. Los vértices *A, B,… O* representan los puntos donde se intersecan los planos de restricción. Las funciones de beneficios (que no se muestran) también son planos. Al igual que en el caso de dos dimensiones, la solución óptima debe estar en uno de los vértices factibles.

Aunque no podemos visualizar un problema con cuatro dimensiones o más, las ideas básicas se pueden aplicar por medios algebraicos a problemas con muchas variables.

RESUMEN

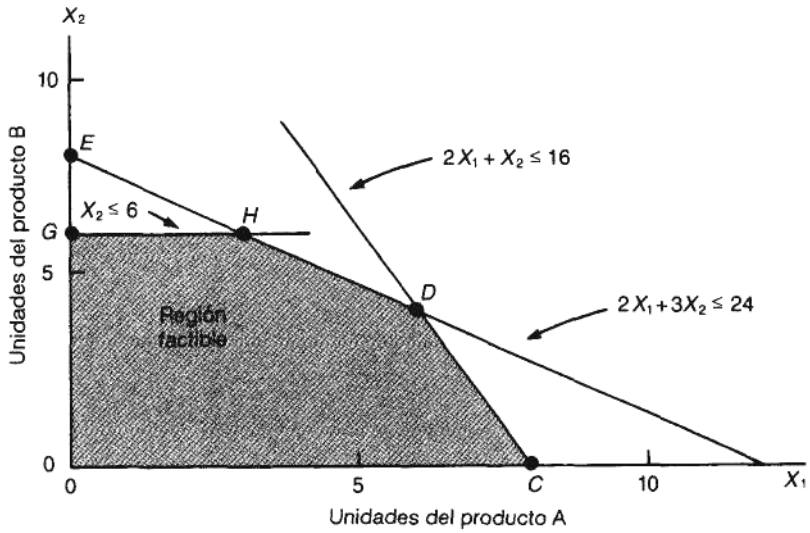


Las soluciones óptimas de un problema de programación lineal siempre están en un vértice de la región factible. Pueden existir soluciones óptimas alternativas, que comprenden vértices adyacentes (y puntos en la línea que los une).

Análisis de sensibilidad para las restricciones

Como se analizó en el capítulo 2, la búsqueda de la solución de un modelo de decisión es sólo el primer paso del análisis. También es importante que el gerente comprenda cuan sensible es la solución a los cambios en las suposiciones y a los factores exógenos. Esto también se aplica a los modelos de programación lineal, y una de las características agradables de los modelos de programación lineal es que gran parte de este análisis de sensibilidad proviene directamente de la solución del problema. Primero veremos estos conceptos en forma gráfica y después por medio de la interpretación de las salidas de los programas de computación que se usan para resolver problemas de programación lineal.

Figura 11-6 Región factible para el problema modificado



Ampliemos el problema que hemos usado como ejemplo. Suponga que el límite del mercado es la venta de seis unidades del producto B. Ahora la formulación es:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar:} \quad & P = 6X_1 + 7X_2 \\ \text{Sujeto a:} \quad & 2X_1 + 3X_2 \leq 24 \\ & 2X_1 + X_2 \leq 16 \\ & X_2 \leq 6 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

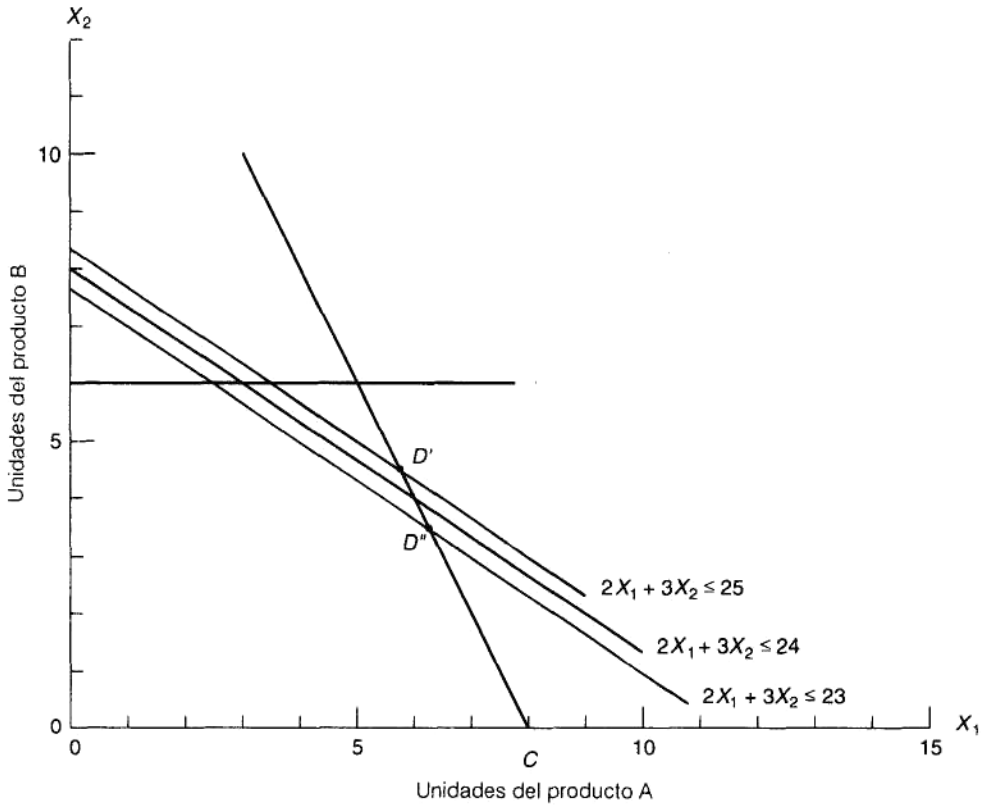
cuya gráfica se presenta en la figura 11-6.

Precios duales

Considere la ecuación de restricción para la máquina 1, que especifica un máximo de 24 horas disponibles. En términos de la programación lineal, este límite de la capacidad con frecuencia se denomina valor del **término independiente** o segundo miembro de la restricción (o sencillamente TI). Suponga que puede agregar una hora para que la restricción sea

$$2X_1 + 3X_2 \leq 25$$

Figura 11-7 Análisis de sensibilidad para la restricción de la máquina 1



¿Qué sucede con la solución?

Este caso se presenta en forma gráfica en la figura 11-7. La nueva solución óptima se mueve al punto *D'*, con $X_1 = 5.75$ y $X_2 = 4.5$.[2] Como la solución anterior requería $X_1 = 6$ y $X_2 = 4$, una hora adicional disponible en la máquina 1 da como resultado una reducción de 0.25 unidades de producto A y un aumento de 0.5 unidades de producto B. El cambio neto en la función objetivo *P* es, entonces:

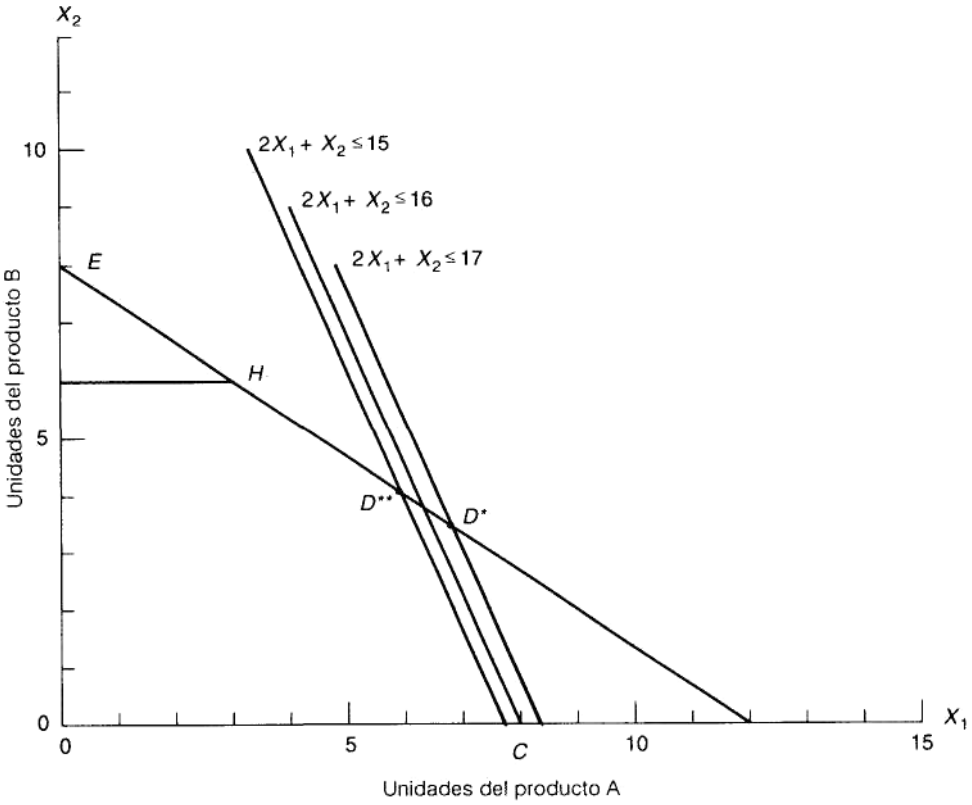
$$-(0.25)\$6 + (0.50)\$7 = \$2$$

lo cual representa un incremento de dos dólares en el beneficio.[3] A esto se le conoce como **precio dual,** *valor marginal* o *precio sombra* y es el cambio

[2] Esta solución también se puede encontrar resolviendo en forma simultánea las dos ecuaciones, $2X_1 + X_1$ - 16 y $2X_1$ + 3^2 " 25. Observe que no es una solución entera, pero las *X* se pueden interpretar como tasas de producción.

[3] Otra manera de verlo consiste en colocar los nuevos valores en la función objetivo $6X_1 + 'IX2$, con lo cual se obtienen beneficios de 66 dólares, en vez de los 64 dólares anteriores (un aumento de dos dólares).

Figura 11-8 Análisis de sensibilidad para la restricción de la máquina 2



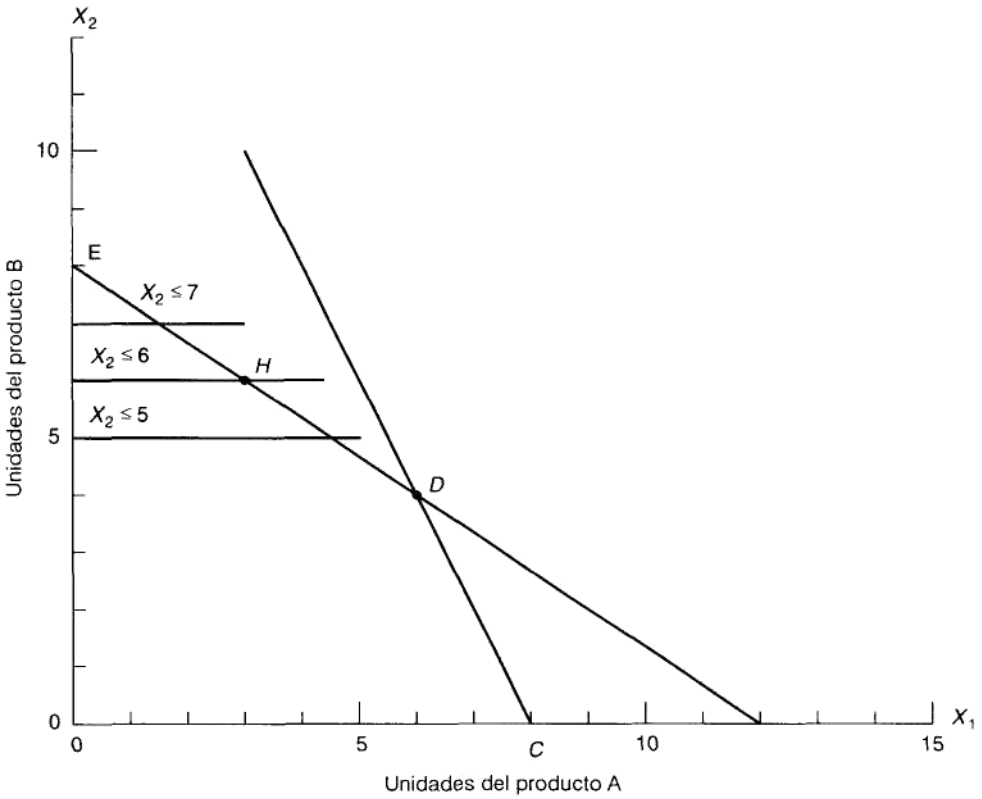
incremental en los beneficios por cambio unitario en el término independiente de una restricción.

Observe que el precio dual se mantiene para una reducción en el valor del término independiente. Por ejemplo, si sólo hubiera 23 horas disponibles en la máquina 1, el punto *D*" de la figura 11-7 sería la solución óptima (X, = 6.25 y X_2 = 3.5), con una *reducción* de dos dólares en el beneficio. *Entonces, el precio dual o valor marginal representa el aumento incremental en el beneficio cuando una restricción se amplía en una unidad y una reducción en el beneficio cuando la restricción se estrecha en una unidad.*

Se puede aplicar el mismo análisis a la restricción de la máquina 2, lo cual se muestra en la figura 11-8. Cuando la restricción se amplía agregando una hora, se convierte en:

$$2X_1 + X_2 \leq 17$$

Figura 11-9 Análisis de sensibilidad de la demanda de mercado del producto B



y el punto óptimo es D^* con $X_1 = 6.75$ y $X_2 = 3.5$. Esto representa un aumento de 0.75 en el número de unidades del producto A y una reducción de 0.5 unidades del producto B. El efecto neto en el beneficio es:

$$+(0.75)\$6 - (0.5)\$7 = \$1$$

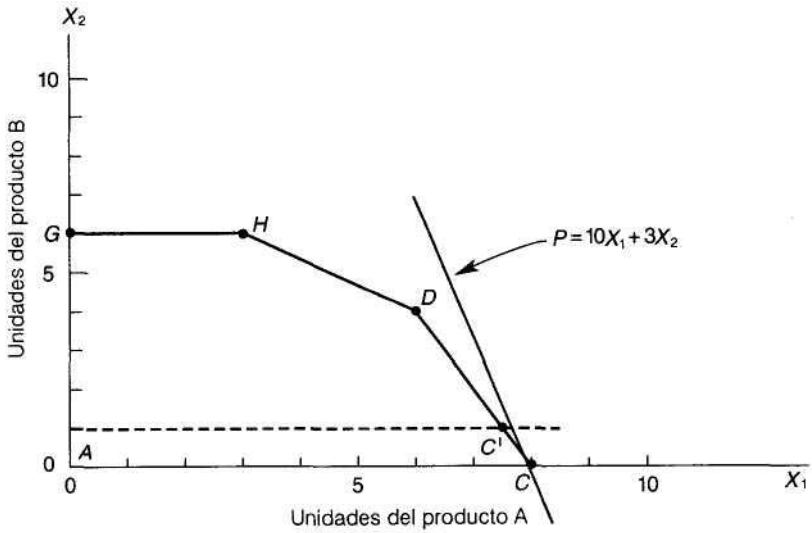
Una reducción similar en el término independiente (es decir, en el número de horas disponibles) de la restricción 2 da como resultado una solución de $X_1 = 5.25$ y $X_2 = 4.5$, y una reducción de un dolaren el beneficio. Por lo tanto, el precio dual asociado a la restricción de la máquina 2 es un dólar.

Considere la tercera restricción, el límite de la demanda del producto B:

$$X_2 \leq 6$$

El aumento de una unidad en este límite, a $X_2 \leq 7$, y la reducción de una unidad, a $X_2 \leq 5$, se muestran gráficamente en la figura 11-9. Observe que ninguno de los cambios afecta a la solución, ya que la restricción $X_2 \leq 6$ no es efectiva. La solución

Figura 11-10 Análisis de sensibilidad de la restricción de no negatividad $X_2 \leq 0$



óptima requería sólo cuatro unidades del producto B, por lo cual no importa el límite de seis unidades que impone el mercado. Por lo tanto, el precio dual es cero. De hecho, *el precio dual de cualquier restricción no efectiva siempre es cero*.

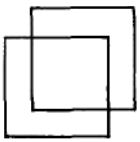
Costos reducidos: Precios duales para restricciones de no negatividad. También es posible determinar los valores marginales asociados a introducir al menos una unidad de una variable decisión en la solución. Recuerde que las restricciones de no negatividad son $X_1 \geq 0$ y $X_2 \geq 0$. El incluir una unidad en la solución implica modificar una restricción de no negatividad a $X_1 \geq 1$ o $X_2 \geq 1$. Los valores marginales de hacer esto se denominan **costos reducidos.**

Considere de nuevo el problema básico cuya gráfica se presenta en la figura 11-9. La solución óptima requiere $X_x = 6$ y $X_2 = 4$. Los dos son valores positivos y, por lo tanto, ninguna de las restricciones de no negatividad es efectiva. Entonces, el valor marginal (es decir, el costo reducido) asociado a su modificación es cero, al igual que para las demás restricciones no efectivas.

Suponga ahora que la función objetivo es $P = 10X_1 + 3X_2$, como se muestra en la figura 11-10. El punto *C* es la solución óptima, con $X_x = 8$ y $X_2 = 0$ y beneficio de 80 dólares. Observe que $X_2 = 0$, por lo cual la restricción de no negatividad $X_2 \leq 0$ es efectiva. Suponga ahora que debe producirse por lo menos una unidad del producto B, debido a un compromiso con un cliente, por lo cual se cambia la restricción de no negatividad a $X_2 > 1$. Con esto cambia la solución óptima de la figura 11-10 a C", con X, = 7.5, $X_2 = 1$ y beneficio de 78 dólares, una reducción de dos dólares con respecto al nivel anterior. En este caso el costo reducido o valor marginal asociado con la restricción de no negatividad de X_2 es de dos dólares, lo cual representa el costo de conservar al cliente.

Utilización de precios duales. Los precios duales tienen muchas aplicaciones empresariales. Aunque en el mundo existen restricciones y limitaciones, la mayoría de ellas no son absolutas. Por ejemplo, el gerente que formuló el problema de programación lineal determinó las horas disponibles en cada una de las máquinas en circunstancias normales, pero podría obtener horas adicionales con trabajo en tiempo extra, comprando equipo adicional o reprogramando otras actividades. Los precios duales indican si vale la pena hacerlo y con qué margen, y así ayudan a identificar los cuellos de botella clave. En nuestro ejemplo, el gerente sabe que vale el doble (dos dólares en lugar de uno) obtener horas adicionales para la máquina 1 que para la máquina 2.

RESUMEN



Un precio dual representa el valor marginal asociado con un cambio unitario en el término independiente de una restricción. Un costo reducido representa el valor marginal de introducir en la solución una unidad de una variable de decisión. Los costos reducidos se pueden considerar como precios duales de las restricciones de no negatividad. Si una restricción no es efectiva, su precio dual es cero.

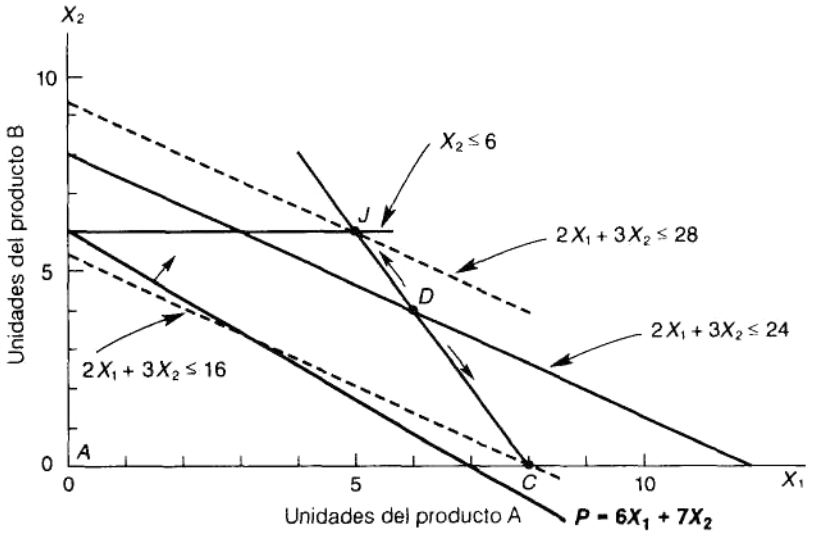
Intervalos de variación del término independiente

Los precios duales proporcionan el valor marginal de la realización de un cambio pequeño en el límite de una restricción (es decir, el valor del término independiente), pero sería un error creer que estos valores serían los mismos si la capacidad se cambiara en forma arbitraria. Se llega a un punto en el cual la capacidad adicional es excesiva y no tiene valor; por lo tanto, hay límites con respecto al intervalo de capacidad en el cual se mantienen los valores marginales.

Considere de nuevo la restricción de 24 horas disponibles para la máquina 1. La figura 11-11 muestra lo que sucede al añadir horas. Recuerde que en la página 309 se mencionó que cada hora adicional daba como resultado una reducción de 0.25 unidades del producto A y un aumento de 0.5 unidades del producto B. El precio dual asociado con cada hora de variación era de dos dólares. Con 28 horas disponibles, la solución óptima pasa de *D* a *J*. En *J,* la solución óptima es $X_Y = 5$ y $X_2 = 6$. Las horas adicionales en la máquina 1 no tendrán efecto más allá de este punto, ya que la restricción $X_2 = 6$ ahora es efectiva. Con las demás restricciones del problema, la cantidad de 28 horas en la máquina 1 es la máxima que puede usarse de manera rentable. Entonces, este incremento de cuatro horas, para llegar a 28 horas disponibles, representa el límite superior del intervalo en el cual es válido el precio dual de dos dólares.

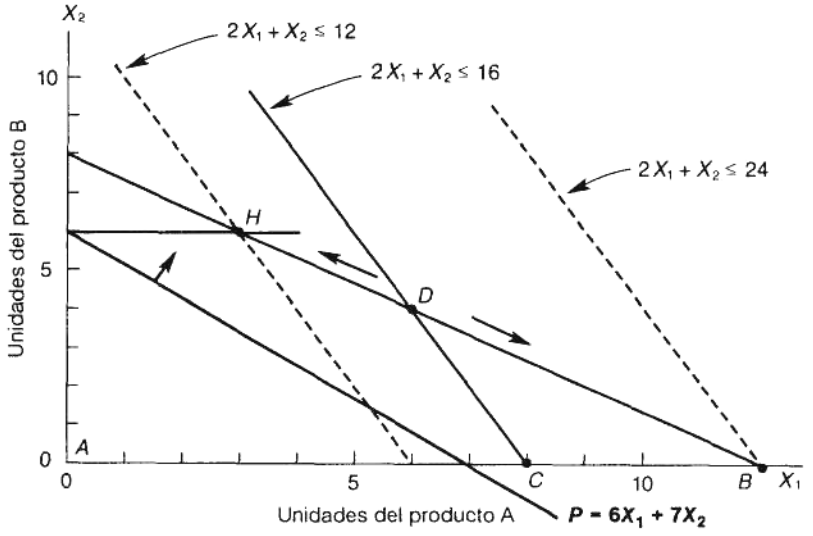
De manera análoga, al reducir las horas disponibles de la máquina 1, la solución óptima se desplaza hasta el punto C de la figura 11-11, donde se usan 16 horas del tiempo de máquina. Al reducir las horas, disminuye el beneficio por aumentar el número de unidades del producto A y por reducir el número de unidades del producto B, pero al llegar al punto C no se producen unidades de B, por lo cual ya no es posible este proceso de sustitución. Entonces, el límite inferior del intervalo del precio dual de dos dólares para el tiempo de la máquina 1 es una reducción de ocho horas (de 24 a 16).

Figura 11-11 Intervalo de la restricción de la máquina 1



Se puede efectuar un análisis similar para la máquina 2; la figura 11-12 presenta los límites. Al añadir horas a las 16 disponibles, la solución óptima se desplaza de *D* a *B*. En este punto, se han agregado ocho horas (de 16 a 24) y las horas

Figura 11-12 Intervalo de la restricción de la máquina 2



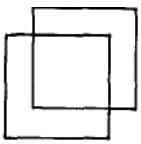
adicionales ya no añadirán valor. Si se reducen en cuatro las horas disponibles (de 16 a 12), la solución óptima pasa de *D* a *H*. Entonces, el precio dual de un dólar se mantiene en el intervalo de 12 a 24 horas disponibles en la máquina 2.

La restricción de la demanda del mercado para el producto B, $X_2 \leq 6$, es un poco diferente. Recuerde que esta restricción no es efectiva y tiene precio dual de cero. La solución óptima requiere sólo cuatro unidades del producto B, por lo cual se puede aumentar indefinidamente el límite de la demanda sin que tenga efecto; no importaría si la restricción fuera $X_2 \leq 10$ o $X_2 \leq 100$. Por otra parte, si el límite de la demanda fuera cuatro unidades, de manera que la restricción fuera $X_2 \leq 4$, sería efectiva. Cualquier reducción por debajo de este límite de cuatro unidades reduciría el beneficio. Entonces, el intervalo del límite de la demanda (es decir, el término independiente) de la tercera restricción es de cuatro unidades a infinito y dentro de este intervalo se mantiene el precio dual de cero.

El análisis de sensibilidad ha producido los siguientes intervalos para los valores del término independiente de las tres restricciones:

Restricción	*Límite actual*	*Precio dual*	*Aumento permitido*	*Reducción permitida*
Horas de la máquina 1	24	$2	4	8
Horas de la máquina 2	16	$1	8	4
Demanda del producto B	6	0	Infinito	2

RESUMEN



Los precios duales expresan el valor marginal del cambio del término independiente de una restricción, pero estos valores sólo se mantienen en ciertos intervalos.

Análisis de sensibilidad: Evaluación de nuevos productos

Los precios duales pueden servir para identificar cuellos de botella o restricciones costosas, que se pueden modificar de manera rentable. Los precios duales también pueden ser útiles para evaluar productos nuevos. Considere una ampliación de nuestro ejemplo. El departamento de investigación y desarrollo de la compañía ha creado un producto, C. Es muy rentable (10 dólares por unidad) pero requiere cuatro horas en la máquina 1 y tres horas en la máquina 2. ¿Deben producirse unidades del producto C?

Por supuesto, se podría formular de nuevo todo el problema de programación lineal para añadir este producto nuevo, pero se puede obtener una respuesta rápida con los precios duales. La producción del producto C requerirá la reducción de las cantidades de los otros dos productos, ya que todos compiten por el tiempo disponible en las dos máquinas. Recuerde que los precios duales implican que una hora de la máquina 1 vale dos dólares y una hora de la máquina 2 vale un

dólar. Una unidad del producto C requiere cuatro y tres horas en las dos máquinas, respectivamente. Entonces, el **costo de oportunidad** de una unidad del producto C es:

[(Precio dual de las horas de la máquina 1) χ (Horas requeridas en la máquina 1)] +
[(Precio dual de las horas de la máquina 2) χ (Horas requeridas en la máquina 2)]

o sea $\$2 \times 4 + \$1 \times 3 = \$11$

Esto representa el costo de pérdida de oportunidad de la producción de A y B. El beneficio del producto C es sólo de 10 dólares, por lo cual no debe producirse, ya que el costo de oportunidad excede el beneficio unitario.

Otro ejemplo

La misma empresa tiene otro artículo, el producto D, que requiere una hora en cada una de las máquinas y produce un beneficio unitario de cinco dólares. ¿Debe producirse?

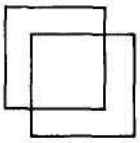
El costo de oportunidad de este producto es

$$\$2 \times 1 + \$1 \times 1 = \$3$$

como el beneficio de cinco dólares por unidad excede el costo de oportunidad de tres dólares, hay que producir algunas unidades del producto D.

Este análisis no indica cuántas unidades del producto D se deben fabricar; sólo indica que debe incluirse en la combinación de productos. El gerente formularía de nuevo el problema de programación lineal para incluir otra variable de decisión para el producto D y luego resolvería de nuevo el problema.

RESUMEN



El costo de oportunidad de un producto nuevo se calcula como la suma de

(Precio dual) · (Unidades requeridas)

para todas las restricciones afectadas. Si el costo de oportunidad es menor que el beneficio por unidad del nuevo producto, entonces éste es rentable y debe incluirse en la solución óptima. Si el costo de oportunidad es mayor que el beneficio por unidad, entonces no debe fabricarse el producto.

Análisis de sensibilidad: Coeficientes de la función objetivo

Un gerente puede interesarse por lo que puede suceder con la solución de un problema de programación lineal si cambia uno de los coeficientes de la función objetivo, por ejemplo, debido a un aumento en el precio de la materia prima. Se puede efectuar un análisis gráfico similar al que se hizo para los cambios en los coeficientes del término independiente.

Suponga que el beneficio por unidad del producto A permanece fijo, en seis dólares, pero que el beneficio por unidad de B, que se espera sea siete dólares puede cambiar. La figura 11-13 muestra las funciones de beneficios si el beneficio

por unidad del producto B aumenta a ocho dólares, nueve dólares y luego a diez. Cuando el coeficiente de X_2 en la función objetivo es \$8 (es decir, beneficio de ocho dólares por unidad del producto B), la función de beneficio es $P = 6X_X + SX_2$ *y* el punto *D* es aún la solución óptima. Si el coeficiente de X_2 aumenta a \$9, la pendiente de la función de beneficio es idéntica a la pendiente de la restricción de la máquina 1 y cae exactamente sobre la línea de restricción. Por lo tanto hay varias soluciones óptimas alternativas (véase pág. 305) y tanto *D* como *H* son vértices óptimos. Suponga que el coeficiente de X_2 aumenta más, hasta 10 dólares por unidad, de manera que la función de beneficio es $P = 6X_i + 10X_2$, como se muestra en la figura 11-13. Observe que en la región factible hay puntos por encima de la línea (es decir, con mayores beneficios), por lo cual el punto *D* ya no es el óptimo. Ahora el punto *H* es la única solución óptima. En otras palabras, si el coeficiente de X_2 excede nueve dólares, el punto óptimo pasa del punto *D* al *H*.

El análisis es el mismo si se reduce el coeficiente de X_2. La figura 11-14 muestra la función de beneficio para valores de \$5, \$3 y \$1 del coeficiente de X_2. Con un coeficiente de 3, la función de beneficio es $P = 6X_X + 3X_2$, la función de beneficio coincide con la restricción de la máquina 2 y los puntos *C y D* son óptimos. Si el coeficiente se reduce más, a 1, el punto óptimo se desplaza a C.

Se puede aplicar el mismo análisis para los beneficios de A, manteniendo constante el coeficiente de X_2 *y* modificando el de X_x. Aunque no se muestra el análisis gráfico, los resultados indican que el coeficiente de X] puede disminuir de 6 a 4.67 antes de que el punto óptimo cambie a *H*. Por otra parte, el coeficiente puede aumentar de 6 a 14 antes de que el punto óptimo se desplace a C.[4] Estos resultados se pueden resumir como sigue:

Intervalos de los coeficientes de la función objetivo (intervalo en el cual no cambia la solución óptima básica)

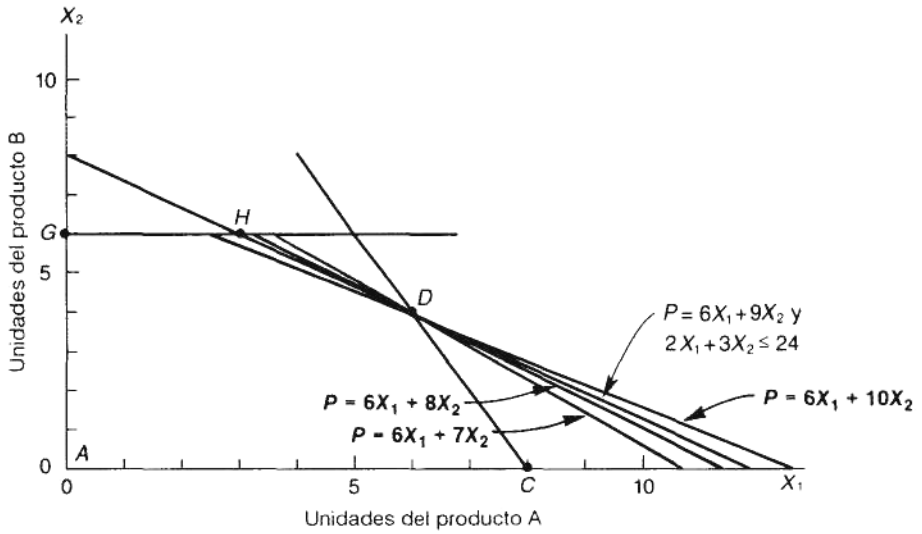
Variable	*Coeficiente actual*	*Aumento permitido*	*Reducción permitida*
Producto A	6	8	1.33
Producto B	7	2	4

Intervalos del término independiente e intervalos de los coeficientes de la función objetivo. Conceptualmente, los intervalos del análisis de sensibilidad son similares para los coeficientes de la función objetivo que se desarrollaron previamente y los correspondientes a los coeficientes del término independiente. Sin embargo, existen diferencias importantes.

La solución óptima no cambia en el intervalo que se especifica para los coeficientes de la función objetivo; es decir, la empresa debe producir seis

[4] En realidad no es necesario el análisis de X_i ya que lo único que importa es la pendiente de la función de beneficio, la cual se determina con la razón de los dos coeficientes. Si la razón (coeficiente de X_i)/(coeficiente de *X-i)* está entre % y 2.0, el punto óptimo es *D*. Si la razón baja de ^2h, el punto óptimo se desplaza a H; por encima de 2.0, es C.

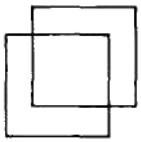
Figura 11-13 Análisis de sensibilidad: Aumento en el beneficio por unidad del producto B



unidades del producto A y cuatro unidades del producto B. Fuera del intervalo, la solución óptima *cambia abruptamente* a otro vértice. Por supuesto, los beneficios totales varían de acuerdo con los cambios en los coeficientes, pero, una vez más, la solución no varía dentro de los intervalos.

Por otra parte, en los intervalos del término independiente la solución cambia, ya que el punto óptimo se desplaza sobre una de las líneas de restricción. En nuestro ejemplo se producen diferentes cantidades de los productos A y B al moverse el punto óptimo. Al llegar al límite del intervalo, un nuevo vértice se convierte en la solución óptima.[5]

RESUMEN



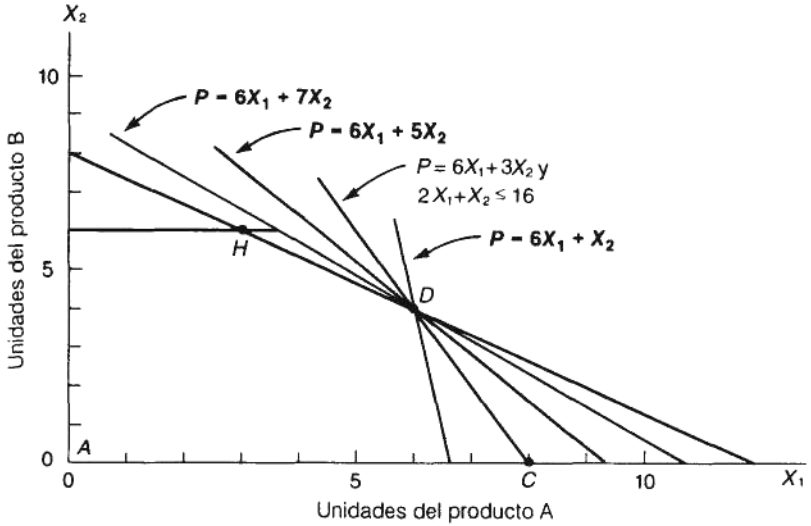
Los intervalos, tanto para los coeficiente del término independiente como para los de la función objetivo, proporcionan información importante en la interpretación de la solución de un programa lineal. Los intervalos del término independiente determinan los límites dentro de los cuales se mantiene el precio dual para cada restricción. Los intervalos de los coeficientes de la función objetivo determinan los límites dentro de los cuales la solución es la misma.

Minimización

Hasta ahora nuestro ejemplo ha supuesto la maximización de la función objetivo. La minimización es similar.

[5] En términos de la formulación algebraica que se analizará dentro de poco, las variables básicas permanecen sin cambio dentro del intervalo. El conjunto de variables básicas cambia en el límite.

Figura 11-14 Análisis de sensibilidad: Reducción del beneficio por unidad del producto B



Ejemplo Una compañía tiene dos talleres. Las variables de decisión son el número de horas por semana que opera cada uno. El primer taller puede operar un máximo de 40 horas y el segundo un máximo de 60 por semana. Cada hora de producción en el primer taller da como resultado tres toneladas de producto terminado; cada hora en el segundo taller produce cuatro toneladas de producto terminado. La compañía tiene compromisos con los clientes para vender por lo menos 175 toneladas de producto terminado. La hora de operación del primer taller cuesta 20 000 dólares, mientras que para el segundo taller el costo por hora es de 40 000 dólares. La compañía quiere mantener los costos en lo mínimo posible. Por razones de política, la compañía quiere operar al menos el mismo número de horas en el segundo taller que en el primero. La formulación del programa lineal es:

Sea: $X_($ = Horas semanales en el primer taller X_2
= Horas semanales en el segundo taller

Función objetivo:

Minimizar:	$C = 20X_1 + 40X_2$		(miles de dólares)
Sujeto a:	$X_1 \leq$	40	(máximo del taller)
	$X_2 \leq$	60	(máximo del taller)
	$3X_1 + 4X_2 \geq$	175	(requerimientos de los clientes; toneladas)
$X_2 \geq X_1$ o	$-X_1 + X_2 \geq$	0	(requisito de política)
	$X_1 \geq 0, X_2 \geq$	0	(restricciones de no negatividad)

El gráfico de la solución se presenta en la figura 11-15, con la región factible sombreada. Las funciones de costo se presentan en color. Como se busca un valor mínimo, las líneas preferidas (con costo menor) están debajo. El vértice óptimo está en X! = 25, X_2 = 25, donde cada taller opera 25 horas por semana, con un costo de 1.5 millones de dólares.

C*>serve que los conceptos básicos de la región factible, los vértices y la solución óptima son los mismos que para el caso de la maximización. Las ideas básicas del análisis de sensibilidad y los intervalos son también parecidos y se presentarán para este ejemplo en una sección posterior del capítulo, cuando se hable de la interpretación de las salidas de los computadores.

Método algebraico

En el capítulo 10 se consideró la formulación de los problemas de programación lineal en términos algebraicos. En esta sección se ampliará el método algebraico para demostrar algunos de los conceptos importantes de la programación lineal. Considere el problema de maximización original que se resolvió al principio de este capítulo. Recuerde que se tenía:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar:} \quad & P = 6X_1 + 7X_2 \\ \text{Sujeto a:} \quad & 2X_1 + 3X_2 \leq 24 \\ & 2X_1 + X_2 \leq 16 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

El primer paso de nuestro procedimiento algebraico es convertir las expresiones de desigualdad del problema en igualdades. Esto se logra con la adición de dos variables, X_3 y X_4, llamadas **variables de holgura.** Las variables de holgura representan la *capacidad no utilizada* de la primera y la segunda restricciones, respectivamente. Así, X_3 es el número de horas de capacidad no usadas de la máquina 1, y X_4 es el número de horas no utilizadas de la máquina 2. Siempre es posible convertir las desigualdades en igualdades, ya que debe existir una cantidad, la capacidad no utilizada X_3, que al sumarse a (2X] + $3X_3$) sea igual a 24 (X_3 puede ser mayor o igual que cero).

Las restricciones del problema se escriben ahora como:

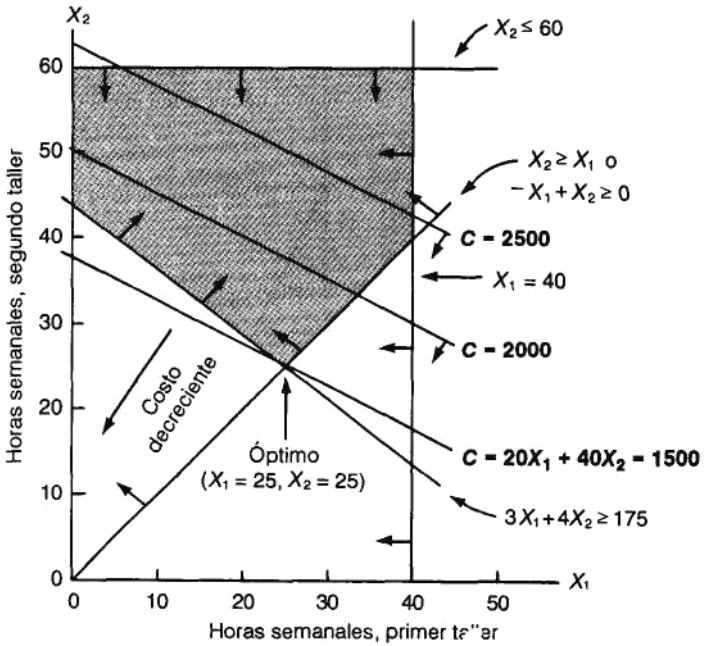
$$\begin{aligned} 2X_1 + 3X_2 + X_3 &= 24 \\ 2X_1 + X_2 + X_4 &= 16 \\ X_1, X_2, X_3, X_4 &\geq 0 \end{aligned}$$

La función objetivo es ahora:

Maximizar: $P = 6X, + 7X_2 + 0X_3 + 0X_4$

Las variables de holgura no representan beneficios, por lo cual sus coeficientes en la ecuación de beneficio son cero.

Figura 11-15 Análisis gráfico del problema de minimización



Los valores de X_u X_2, X_3 y Xj que satisfacen las ecuaciones de restricción son una solución factible para el problema de programación lineal. El área sombreada de la figura 11-16 contiene todas las soluciones factibles, como se vio antes en este capítulo.

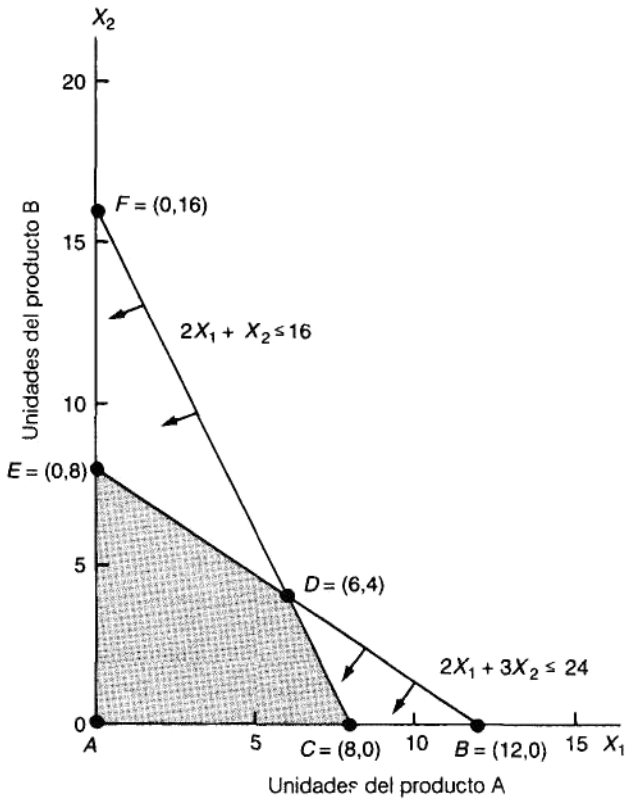
En el problema general de programación lineal hay *m* ecuaciones de restricción. Después de añadir las variables de holgura, hay más de *m* variables. Usted recordará, de sus cursos de álgebra, que se puede encontrar una solución única para un conjunto de *m* ecuaciones lineales si hay exactamente *m* variables desconocidas; sin embargo, con más de *m* variables, como en el caso de la programación lineal, no existe una solución única.

Suponga que se seleccionan arbitrariamente *m* variables y a las demás se les asigna el valor cero, para luego resolver las *m* ecuaciones para las *m* variables seleccionadas y obtener una solución. A esta solución se le llama **solución básica.** Las variables seleccionadas son las **variables de solución básica** o, simplemente, la base. Las variables a las cuales se asigna el valor cero son las **variables externas** o variables no básicas.

En el ejemplo anterior hay cuatro variables desconocidas y dos ecuaciones de restricción.[6] Para encontrar una solución básica se seleccionan dos variables

[6] Para este fin no se consideran las restricciones de no negatividad.

Figura 11-16 Soluciones básicas



cualesquiera y se asigna cero a las otras dos. Suponga que se seleccionan Xi y X_3 como variables básicas y se asigna $X_2 = X_4 = 0$. Las ecuaciones son entonces:

$$2X_1 + 3(0) + X_3 = 24$$
$$2X_1 + 1(0) + 1(0) = 16$$

o sea

$$2X_1 + X_3 = 24$$
$$2X_1 = 16$$

La solución es $X_x = 8$, $X_3 = 8$ (recuerde que X_2 = X4 = 0). Lo anterior es una solución básica del ejemplo de programación lineal. Las otras soluciones básicas se obtienen en forma similar y se presentan en la tabla 11-1. Observe que algunas de las soluciones requieren valores negativos para una de las variables. Estas soluciones básicas no son factibles, ya que un problema de programación lineal no permite que ninguna variable tenga valor negativo.

Tabla 11-1 Soluciones básicas

Variables externas (iguales a cero)	*Variables de solución*	*Beneficios*	*Situación en la figura 11-16*
X_1 y X_2	$X_3 = 24,\ X_4 = 16$	0	*A*
X_1 y X_3	$X_2 = 8,\ X_4 = 8$	56	*E*
X_1 y X_4	$X_2 = 16,\ X_3 = -24$	No factible	*F*
X_2 y X_3	$X_1 = 12,\ X_4 = -8$	No factible	*B*
X_2 y X_4	$X_1 = 8,\ X_3 = 8$	48	*C*
X_3 y X_4	$X_1 = 6,\ X_2 = 4$	64	*D*

Cada una de las soluciones básicas corresponde a una intersección de pares de líneas de la figura 11-16. Los puntos *A, C, D y E* corresponden a los vértices de la región factible, los puntos *B y F* son soluciones no factibles. Por lo tanto, las *soluciones factibles básicas* corresponden a los vértices de la región factible. En una sección anterior del capítulo se vio que la solución óptima de un problema de programación lineal debe ser un vértice. Además, *la solución óptima debe ser una solución básica factible*.

En este problema sencillo se puede encontrar la solución óptima presentando todas las soluciones básicas, eliminando las que no son factibles, calculando el beneficio de cada una y seleccionando el mejor, como se hizo en la tabla 11-1. Sin embargo, un problema empresarial de tamaño regular puede tener miles o millones de soluciones básicas factibles *y* este procedimiento no sería eficiente. En cambio, se usa el método simplex que se describe en el siguiente capítulo.

El método algebraico que aquí se presenta es la base para las salidas de los programas de computación que resuelven problemas de programación lineal. Hay dos puntos importantes que se deben recalcar. El primero es que se añaden variables de holgura a la formulación para representar la capacidad no utilizada de un recurso. Si una restricción es del tipo mayor o igual, como la que se usó para representar las exigencias de los clientes en el ejemplo de la página 319:

$$3X_1 + 4X_2 \geq 175$$

entonces se agrega una variable de excedente, digamos X_3, para que

$$3X_1 + 4X_2 = 175 + X_3$$

o sea

$$3X_1 + 4X_2 - X_3 = 175$$

donde X_3 representa la cantidad (en toneladas) que excede los requerimientos de los clientes. Estas variables de holgura y de excedentes son importantes para interpretar las soluciones de programación lineal.

El otro punto es que *el número de variables de una solución básica (y por lo tanto de la solución óptima) es igual al número de restricciones del problema de programación lineal* (sin contar las restricciones de no negatividad).

Solución por computador de problemas de programación lineal

Existen programas de computación disponibles para la resolución de problemas de programación lineal, no sólo en computadores grandes, sino también en computadores personales. Un problema de gran magnitud, que comprende miles de variables y restricciones, necesita el poder de un computador grande. No obstante, los problemas como los ejercicios de este libro y los problemas reales de tamaño regular se pueden resolver eficazmente con un computador personal.

El método simplex se describe en el capítulo 12 y es la técnica que usan estos programas de computación, aunque por lo general se aplican modificaciones y refinamientos para que los programas sean más precisos y eficientes. Hace poco, el doctor N. Karmarkar, de Bell Laboratories, anunció un nuevo método para la resolución de problemas de programación lineal. Aunque parece que esta nueva técnica tiene mucho potencial, aún no se sabe cuál será su difusión. En cualquier caso, los conceptos que se analizan en este capítulo (soluciones básicas, interpretación de precios duales, análisis de sensibilidad y análisis paramétrico) son importantes, cualquiera que sea el procedimiento de solución.

La tabla 11-2 es una muestra de las salidas de computador correspondientes a la solución de nuestro problema ejemplo, generadas por el programa LINDO *(Linear INteractive Discreta Optimizer,* optimizador discreto lineal interactivo).[7] Las variables de decisión pueden recibir nombres abreviados; en esta muestra, son PRODA y PRODB, para las unidades de los productos A y B, respectivamente. La formulación de las entradas para el computador es casi idéntica a la que se usó en este capítulo. En la tabla 11-2 se presenta la solución y se hacen algunos comentarios al respecto. Observe que la salida incluye, además de la solución, el costo reducido para cada variable, los precios duales de las restricciones y los intervalos para los coeficientes de la función objetivo y los valores del término independiente.

LINDO es un paquete de software, barato y fácil de conseguir que sirve para resolver problemas de programación lineal. Está disponible para computadores personales Macintosh y compatibles con IBM y para computadores centrales.

Otro ejemplo

Considere el ejemplo de la página 319 de este capítulo, relacionado con una compañía que trataba de minimizar el costo operativo de dos talleres y de cumplir al mismo tiempo con los requisitos de los clientes. En la tabla 11-3 se muestran la formulación y la solución LINDO. Las variables TALLER 1 y TALLER2 se refieren a las horas semanales en el primer taller y en el segundo, respectivamente.

[7] Linus Schrage, *Users Manual for LINDO,* Palo Alto, Calif., The Scientific Press, 1984.

Tabla 11-2 Solución por computador, programa LINDO

```
MAX       6 PRODA + 7 PRODB
SUJETO   A
       2) 2 PRODA + 3 PRODB <= 24
       3) 2 PRODA + PRODB <= 16
       4) PRODB <=    6

FIN

SOLUCIÓN ÓPTIMA DETECTADA EN EL PASO 2

      VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

       1)   64.0000000

VARIABLE          VALOR          COSTO REDUCIDO
   PRODA        6.000000            .000000
   PRODB        4.000000            .000000

     FILA    HOLGURA O EXCEDENTE     PRECIOS DUALES
      2)          .000000            2.000000
      3)          .000000            1.000000
      4)         2.000000             .000000

NÚMERO DE ITERACIONES = 2

INTERVALOS EN LOS CUALES NO VARÍA LA BASE:

                  INTERVALOS DE COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO
 INFINITO          COEFICIENTE        AUMENTO          REDUCCIÓN
                     ACTUAL          PERMITIDO        PERMITIDA
   PRODA           6.000000         8.000000         1.333333
   PRODB           7.000000         2.000000         4.000000

                    TÉRMINO    INTERVALOS DEL TÉRMINO INDEPENDIENTE
     FILA        INDEPENDIENTE      AUMENTO          REDUCCIÓN
                    ACTUAL        PERMITIDO        PERMITIDA
       2         24.000000         4.000000         8.000000
       3         16.000000         8.000000         4.000000
       4          6.000000         INFINITO         2.000000
```

Comentarios

Formulación: PRODA y PRODB son variables de decisión
2) es una restricción de la máquina 1.
3) es una restricción de la máquina 2.
4) es una restricción de la demanda del mercado.

La solución óptima de programación lineal se detectó después de revisar dos vértices.

El beneficio óptimo son 64 dólares.

La solución óptima es seis unidades del producto A y cuatro unidades del producto B; los costos reducidos son cero en ambos casos, ya que se produce por lo menos una unidad de cada producto

No hay holgura en las restricciones 2) y 3).
La holgura de la restricción 4) implica que hay demanda no utilizada del producto B.
Se muestran los precios duales.

Intervalos en los cuales no cambia la solución óptima.

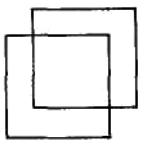
Intervalos en los cuales el conjunto de variables de la solución básica es el mismo.

Usaremos este ejemplo para repasar algunos de los aspectos que se destacaron en este capítulo. En primer lugar, observe que hay cuatro restricciones, por lo que debe haber cuatro variables básicas en la solución. De hecho, allí están: TALLER 1 y TALLER2, cada una con valor 25, y además 15 y 35 horas de holgura en las restricciones de las capacidades de cada taller (renglones 2 y 3). En segundo lugar, observe el precio dual (-$8.57) de la restricción que requiere la producción de 175 toneladas para satisfacer las exigencias del cliente. Éste es el costo marginal de la producción de una tonelada adicional; la producción de 176 toneladas costaría 8570 dólares más que el costo de producción de 175 toneladas. Observe también que este costo marginal se mantiene desde la exigencia actual de 175 toneladas hasta 105 toneladas adicionales, para un total de 280 toneladas (véanse los intervalos del término independiente de la tabla 11-3).

Programación lineal en paquetes de hoja de cálculo

Además de los programas de computación independientes como LINDO, en años recientes ha aparecido la posibilidad de resolución de programas lineales en paquetes de hoja de cálculo, ya sea como complemento externo o como parte del programa. *What's Best*[8] es un programa que se agrega a Lotus 1-2-3, Excel u otros programas de hoja de cálculo. En fechas recientes, *Quattro Pro*[9] *y* una nueva versión de Lotus[10], *Lotus 1-2-3/G,* han incluido la capacidad para resolver problemas de programación lineal con un mandato dentro del programa de hoja de cálculo. En estos casos el modelo de programación lineal se incorpora a la hoja de cálculo y después se optimiza. Los programas ofrecen la mayor parte de la información de análisis de sensibilidad (precios duales, costos reducidos, etcétera) que ofrece LINDO." Se ha difundido mucho el uso de los paquetes de hoja de cálculo y son fáciles de usar, por lo cual es probable que esta tendencia permita usar más la programación lineal en las aplicaciones.

RESUMEN



Los paquetes de computación como LINDO no sólo proporcionan la solución de problemas de programación lineal, sino además otra información de análisis de sensibilidad útil para la toma de decisiones empresariales.

Programación paramétrica

El análisis de sensibilidad del término independiente permite la definición de un intervalo de valores de la solución óptima en el cual no cambian los precios duales. En ocasiones es de interés examinar las variaciones en la solución de progra-

---

[8] Sam L. Savage, *Whal's Best,* Oakland, Calif., Holden-Day, 1986.

[9] Borland International, *Quattro Pro,* Scotts Valley, Calif., Borland, 1989.

[10] Lotus Developinent Corp., *Lotus 1-2-3/G,* Cambridge, Mass., Lotus, 1990.

[11] De hecho, *What's Best* utiliza una versión de LINDO para resolver el problema de programación lineal.

Tabla 11-3 Resultado de LINDO para el segundo ejemplo

```
MIN       20 TALLER1 +  40 TALLER2
SUJETO(    A
         2)   TALLER1  <=     40
         3)   TALLER2  <=     60
         4)    3 TALLER1 +  4 TALLER2 >=     175
         5)  -  TALLER1 + TALLER2 >=      0

SOLUCIÓN ÓPTIMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL DETECTADA EN EL PASO 2

          VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

         1)     1500.00000

 VARIABLE            VALOR          COSTO REDUCIDO
    TALLER1        25.000000            .000000
    TALLER2        25.000000            .000000

       FILA   HOLGURA O EXCEDENTE   PRECIOS DUALES
         2)          15.000000          .000000
         3)          35.000000          .000000
         4)            .000000        -8.571428
         5)            .000000        -5.714285

NÚMERO DE ITERACIONES =      2

INTERVALOS EN LOS CUALES NO CAMBIA LA BASE:

                          INTERVALOS DE COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO
VARIABLE              COEFICIENTE          AUMENTO            REDUCCIÓN
                        ACTUAL            PERMITIDO          PERMITIDA
    TALLER1          20.000000           9.999999          60.000000
    TALLER2          40.000000           INFINITO          13.333330

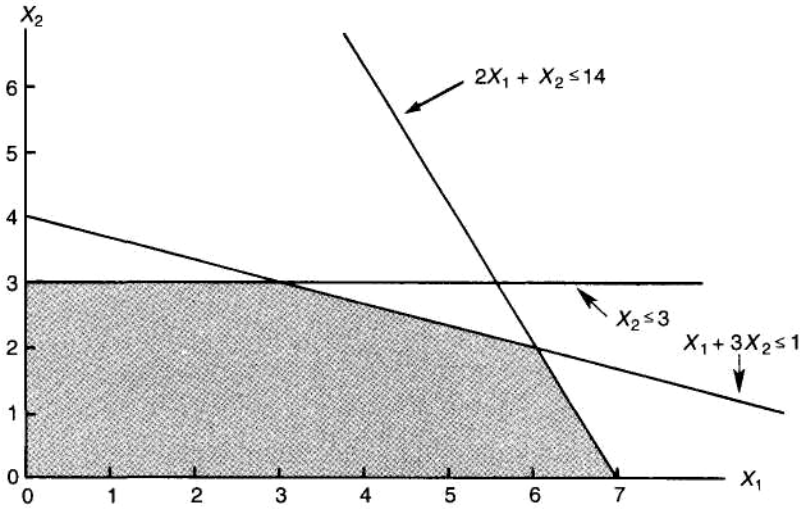
                      TÉRMINO    INTERVALOS DEL TÉRMINO INDEPENDIENTE
      FILA         INDEPENDIENTE          AUMENTO            REDUCCIÓN
                      ACTUAL             PERMITIDO          PERMITIDA
        2           40.000000            INFINITO          15.000000
        3           60.000000            INFINITO          35.000000
        4          175.000000          105.000000         175.000000
        5             .000000           43.750000          26.250000
```

mación lineal si cambia un factor en un extenso intervalo de valores.[12] A este tipo de análisis se le conoce como **programación paramétrica.**

Un ejemplo ayudará a comprender el concepto. Considere el siguiente problema:

[12] En este capítulo sólo nos interesa la variación de una variable cada vez. Esta técnica se. puede ampliar para considerar los cambios de diversas variables al mismo tiempo, en proporciones fijas entre sí. Véase Harvey M. Wagner, *Principies of Operations Research,* edición revisada, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1975.

Figura 11-17



Maximizar: $P = 5X_1 + 8X_2$
Sujeto a: $2X_1 + X_2 \leq 14$
$X_1 + 3X_2 \leq 12$
$X_2 \leq 3$

Suponga que las dos primeras restricciones representan el tiempo de utilización de las máquinas 1 y 2, respectivamente, para producir las unidades de los productos *Xy y* X_2. La tercera restricción indica que no se pueden vender más de tres unidades del producto X_2. Este conjunto de restricciones se muestra en forma gráfica en la figura 11-17; el área sombreada representa la región factible.

Suponga que se tiene una restricción adicional para el capital de trabajo, en la cual X_l *y* X_2 requieren un dólar de capital de trabajo por unidad:

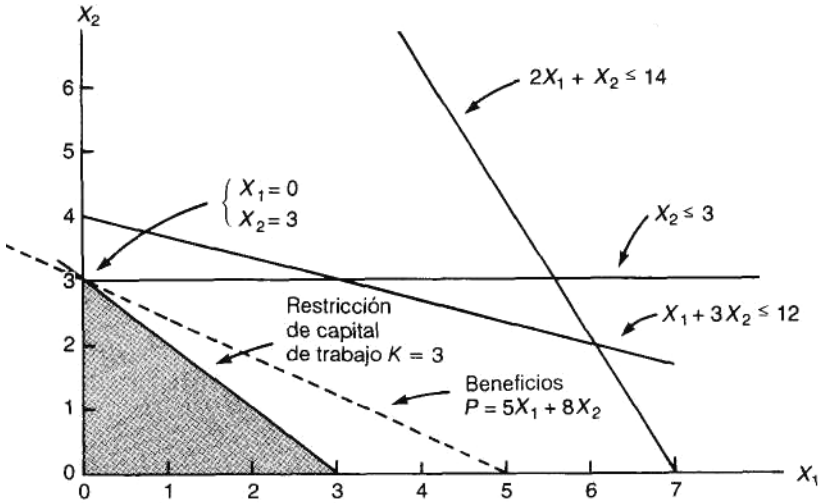
$$Xl + X_2 < K$$

Lo anterior establece que la cantidad total de capital de trabajo debe ser menor que una cantidad no especificada, *K*. Nos interesa conocer cómo cambia la solución del problema al variar *K* de cero en adelante.

Si $K = 0$, la única solución es no producir nada y $X\chi = X_2 = 0$. Si *K* aumenta a 1, el primer dólar de capital de trabajo se usa para producir una unidad de X_2, porque éste es el producto más rentable. Entonces, en esta etapa, cada unidad de *K* (es decir, cada dólar de capital de trabajo) produce ocho dólares de beneficio. Esta condición se mantiene hasta llegar a la situación que se presenta en la figura 11-18.

En la figura 11-18 hay tres unidades de *K* disponibles y todas se usan para producir unidades de X_2. Sin embargo, en este punto la restricción de mercado $(X_2 < 3)$ es efectiva y ya no pueden producirse más unidades de X_2. Las unidades

Figura 11-18



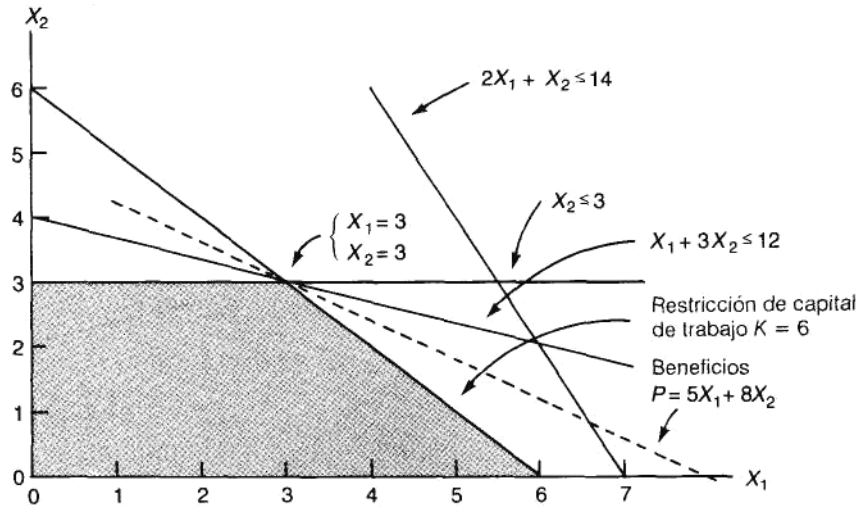
adicionales de capital de trabajo se aplican entonces a la producción de unidades de X_x. Por lo tanto, en esta etapa cada dólar de capital de trabajo tiene un valor marginal de cinco dólares, el beneficio por la venta de una unidad de X_t. Esta condición se mantiene hasta llegar a la situación que se ilustra en la figura 11-19.

En la figura 11-19, la restricción del tiempo disponible en la máquina 2 también es efectiva, al llegar a seis unidades de *K*. Más allá de este punto, el beneficio sólo puede aumentar avanzando por la línea $X_x + 3X_2 = 12$, la ecuación de la restricción de la máquina 2. Esto quiere decir que por cada reducción de una unidad de X_2 se pueden producir tres unidades *de*X_t. El valor marginal de *K se* reduce ahora a 3.50 dólares. Para verlo, observe que la sustitución de una unidad de X_2 con tres unidades de Xj produce beneficios adicionales de siete dólares, tres veces el beneficio de cinco dólares de X_r menos el beneficio de ocho dólares de X_2. Observe también que para esto se requieren dos unidades de capital de trabajo: tres para la nueva X_j menos la unidad que se redujo de X_2. Entonces, el valor marginal de *K* es 7/2 dólares, o 3.50 dólares.

Por último se llega a la situación que se describe en la figura 11-20. Aquí las restricciones del tiempo de las dos máquinas son efectivas. Si se aumenta el capital de trabajo *K* por encima de este punto no hay efecto sobre la solución. El valor marginal de *K* en este punto se convierte en cero.

Los efectos de los cambios en el valor de *K se* resumen en la figura 11-21. Al aumentar *K* se reduce el valor marginal de las unidades adicionales de capital de trabajo en una serie de pasos, como se indicó antes. La producción de X_2 primero aumenta y luego cae; la producción inicial de $X\chi$ es cero, pero después se eleva a un nivel de seis unidades.

Figura 11-19



Un análisis de este tipo sería importante para una empresa que quiere decidir cuánto capital de trabajo invertir en esta operación de producción. Es obvio que no invertiría más de ocho dólares. Sin embargo, podría invertir menos si tuviera alternativas más rentables para sus fondos. Por ejemplo, si pudiera usar el capital de trabajo en otro lugar que rindiera cuatro dólares por unidad, entonces no invertiría más de seis unidades en esta operación. Si pudiera obtener un rendimiento de seis dólares por unidad en otra parte, no emplearía más de tres unidades en esta operación.

Al construir un modelo de programación lineal de sistemas empresariales muchas veces se detecta que una operación es una restricción efectiva, un cuello de botella. La gerencia puede añadir capacidad, pero surge la pregunta: ¿cuánta capacidad adicional debe obtenerse? La programación paramétrica puede servir para obtener una respuesta parcial a la pregunta, y muestra cuáles serían los ingresos o ahorros adicionales que se obtendrían de la adición de distintas cantidades de capacidad y, al determinar los costos de la adición de esta capacidad, se puede obtener la respuesta.

El análisis paramétrico también puede aplicarse a la función objetivo para estudiar el efecto de los cambios en el precio de un producto o en el costo de una materia prima.

RESUMEN

El análisis de programación paramétrica indica los cambios en una solución de programación lineal al variar un factor en un intervalo. Cuando se aplica a una restricción de recurso, proporciona información acerca de los cambios en la capacidad. Si se aplica a un coeficiente de la función objetivo, muestra los efectos de las variaciones en los precios o costos. Muchos programas de computación de

Figura 11-20

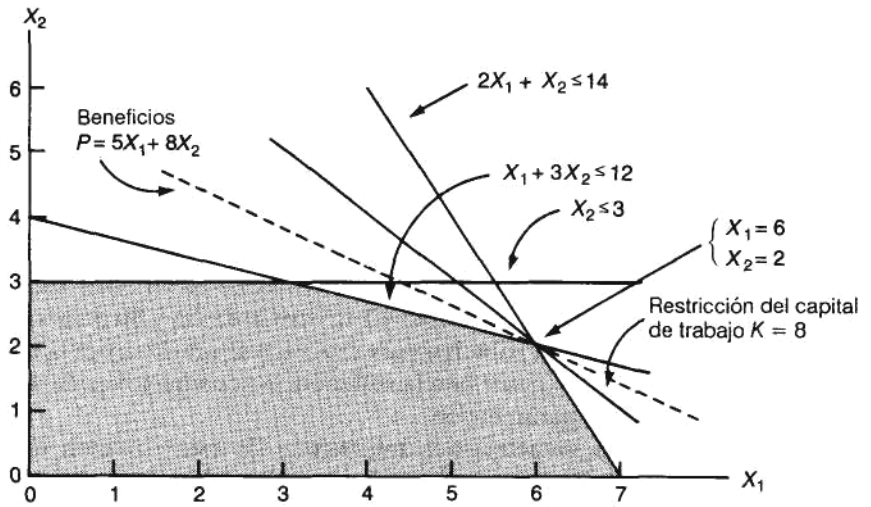
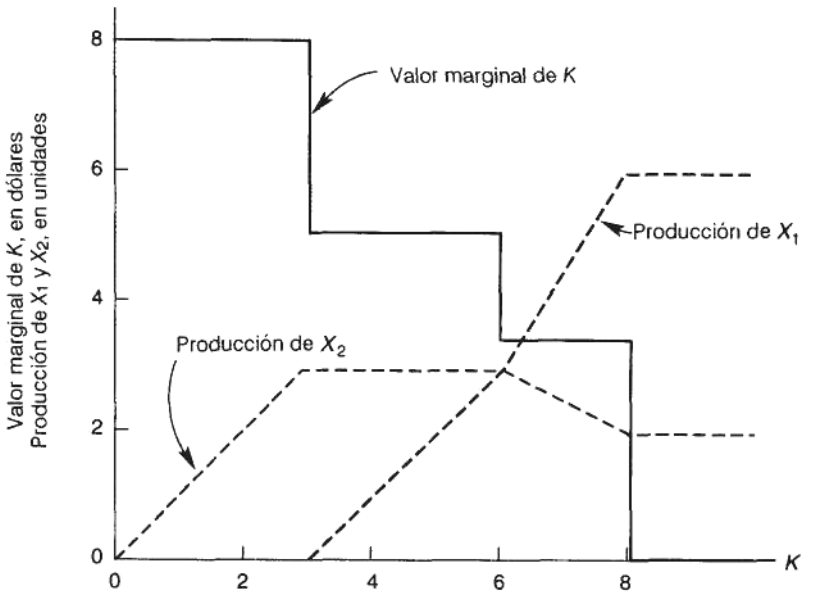


Figura 11-21



programación lineal ejecutarán automáticamente el análisis de sensibilidad y permitirán que el usuario lleve a cabo el análisis paramétrico de la programación de manera rápida y fácil.

Ejemplo integral

Consideremos un ejemplo integral para repasar los conceptos de programación lineal que se presentaron en este capítulo. La compañía Lazy Life of Leisure (LLL) produce muebles para jardín. La empresa tiene tres productos: sillones, sillas y mesas. Requiere 60 minutos de trabajo para producir un sillón, 30 para una silla y 90 para una mesa. Necesita además 6 unidades de madera para un sillón, 6 para una silla y 12 para una mesa. LLL dispone de 9000 minutos de trabajo y de 600 unidades de madera y puede vender todas las sillas y mesas que produzca. Sin embargo, no puede vender más de 50 sillones. LLL obtiene beneficios de 60 dólares por cada sillón, 40 dólares por silla y 80 dólares por mesa. La formulación LINDO y la solución para este caso se muestran en la tabla 11-4. Los comentarios de la tabla describen la solución, las conclusiones del análisis de sensibilidad y el análisis paramétrico.

Una característica interesante de esta solución es que existe una solución óptima alternativa. Revise la página 305 y la figura 11-4 para ver el significado de esta situación. Se puede ver en la salida de programación lineal que existe otra solución porque una de las variables de decisión, MESAS, tiene valor de cero en la solución y además un *costo reducido* de cero.[13] Esto quiere decir que se pueden incorporar algunas mesas a la solución sin afectar el beneficio. A partir de la solución de programación lineal no se puede determinar cuál es la solución básica alternativa, pero se sabe que existe.

Suponga que LLL considerara otro producto, por ejemplo, COLUMPIOS. Cada COLUMPIO requiere 200 minutos de trabajo y nueve unidades de madera y genera beneficio de 100 dólares. ¿Deben producirse COLUMPIOS? El costo de oportunidad asociado con un COLUMPIO es:

(precio dual del trabajo) . (trabajo requerido) +
(precio dual de la madera) · (madera requerida) =
0x200 +6.67x9 = $60

Como el beneficio de 100 dólares excede esta cifra, deben producirse COLUMPIOS. Se tendría que formular de nuevo el problema y luego resolverlo para saber exactamente cuántos COLUMPIOS hay que producir.

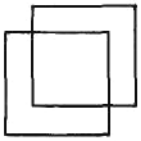
Otra característica que se muestra en la tabla 11-4 es el análisis paramétrico. Observe que la restricción de la cantidad de madera disponible (600 unidades) era efectiva y que el precio dual era de 6.67 dólares por unidad. Suponga que LLL puede conseguir madera adicional. ¿Cuánta deben comprar? El análisis paramétrico está diseñado para responder a esta pregunta. Específicamente, suponga que se pueden comprar 1000 unidades en 5000 dólares. ¿Deben comprarse?

---

[13] Los indicadores de una solución óptima alternativa son:
Una variable de decisión tiene valor cero y el costo reducido también es cero, o
Una variable de holgura o excedente tiene valor cero (la restricción es limitante) y el precio dual es cero.

Observe que las primeras 900 unidades adicionales (de 600 a 1500) tienen precio dual de 6.67 dólares y que las 100 unidades siguientes tienen valor (precio dual) de 3.33. Por lo tanto, el valor total de las 1000 unidades es (900 χ $6.67) + (100 x $3.33) = $6333. Como esta cifra es mayor que el costo de 5000 dólares, hay que comprar la madera.

RESUMEN



Este capítulo presentó las ideas básicas de la solución de problemas de programación lineal, primero en forma de soluciones gráficas y luego como resultados de programas de computación.

La solución óptima de un problema de programación lineal es un *vértice* de la región factible, el cual corresponde, en términos algebraicos, a una *solución básica factible* que contiene *m* variables básicas (donde *m* es el número de restricciones).

El análisis de sensibilidad de las restricciones implica primero encontrar el *precio dual,* valor marginal de un cambio unitario en el término independiente de la restricción, y después encontrar el intervalo de valores en el cual se mantiene el precio dual (los *intervalos del término independiente).*

El *costo reducido* es un valor marginal análogo, asociado a la introducción de una unidad de una variable de decisión en la solución óptima.

Los *intervalos de coeficientes de la función objetivo* proporcionan análisis de sensibilidad adicionales. Estos intervalos indican los cambios en los coeficientes de la función objetivo que no alteran la solución óptima.

El *análisis paramétrico* examina los cambios en la solución y en el precio dual al variar el término independiente de una restricción dentro de un intervalo amplio.

Hay varios programas de computación para la resolución de problemas de programación lineal, incluyendo algunos existentes dentro de hojas de cálculo. El paquete LINDO se presenta como ejemplo en este capítulo, pero las salidas de otros programas son semejantes.

Los tres capítulos siguientes continúan con el tema de la programación lineal. El capítulo 12 presenta los detalles del método simplex para la resolución de problemas de programación lineal. El capítulo 13 considera temas especiales y el capítulo 14 abarca la programación entera, en la cual las variables de decisión sólo pueden asumir valores enteros.

Apéndice:

Interpretación de resultados de LINDO

En varios de los ejercicios de este capítulo se utilizan las salidas del programa LINDO. Aunque es bastante fácil la interpretación de los resultados, es útil explicar algunos aspectos con mayor detenimiento.

Convención de signos en LINDO

Un aspecto de LINDO que tiende a confundir a los usuarios es la convención que se usa para los signos (positivo o negativo) de los precios duales y de los costos reducidos. Por regla general, se considera que hacer más estricta una restricción

Tabla 11-4 Solución de computador

```
:LOOK ALL

MAX      60 SILLONES  +  40 SILLAS   +  80 MESAS
SUJETO    A
   2)     60 SILLONES  +  30 SILLAS  +  90 MESAS    <=  9000
   3)     6 SILLONES  +  6 SILLAS   +  12 MESAS    <=  600
   4)     SILLONES  <=   50
END

: GO
 SOLUCIÓN ÓPTIMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL DETECTADA EN EL PASO 2
          VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO
 1)       5000.00000

VARIABLE          VALOR            COSTO REDUCIDO
SILLONES        50.000000             .000000
 SILLAS         50.000000             .000000
 MESAS            .000000             .000000

     FILA    HOLGURA O EXCEDENTE    PRECIOS DUALES
     2)       4500.000000             .000000
     3)          .000000            6.666667
     4)          .000000           20.000000

NÚMERO DE ITERACIONES = 2


¿EFECTUAR ANÁLISIS DE SENSIBILIDAD?
? SÍ
```

Comentarios

Formulación del problema:

2) es una restricción de los minutos de trabajo disponibles.
3) es una restricción de la madera.
4) es el límite de ventas de los sillones.

GO inicia la solución.

El beneficio de la solución es 5000 dólares.

Las filas corresponden a los números de restricción (la fila 1 es la función objetivo).

La solución requiere 50 sillones, 50 sillas y ninguna mesa.

Observe que el costo reducido de las mesas es cero, lo cual indica que se pueden producir algunas mesas sin reducir el beneficio. Esto indica que existe una solución alternativa.

El valor de una unidad adicional de madera es 6.67 dólares y 20 dólares por una unidad adicional de demanda de sillones.

Se solicita el análisis de sensibilidad.

```
INTERVALOS EN LOS CUALES NO CAMBIA LA BASE:

   INTERVALOS DE COEFICIENTES DE LA FUNCIÒN OBJETIVO

VARIABLE        COEFICIENTE      AUMENTO          REDUCCIÓN
                  ACTUAL         PERMITIDO        PERMITIDA
SILLONES        60.000000     INFINITO          20.000000
SILLAS          40.000000     20.000000           .000000
MESAS           80.000000       .000000       INFINITO

          INTERVALOS DEL TÉRMINO INDEPENDIENTE
     FILA       TÉRMINO          AUMENTO          REDUCCIÓN
          INDEPENDIENTE ACTUAL  PERMITIDO        PERMITIDA
   2)       9000.000000        INFINITO       4500.000000
   3)        600.000000      900.000000        300.000000
   4)         50.000000       50.000000         50.000000
: PARA
FILA
3

NUEVO VALOR DEL TÉRMINO INDEPENDIENTE =
2000
                                    VALOR
VARIABLE     VARIABLE     FILA     DEL TÉRMINO   VARIABLE     VALOR
DE SALIDA    DE ENTRADA   PIVOTE   INDEPENDIENTE   DUAL       OBJETIVO
HOLGURA 2    HOLGURA 4      2        1500.00     6.66667     11000.0
SILLONES     HOLGURA 3      4        1800.00     3.33333     12000.0
ART          ART            0        1800.00     .000000     12000.0
```

Intervalos de los coeficientes de la función objetivo. El programa muestra el aumento o la reducción (pero no el límite).

Intervalos para las restricciones. Como antes, el programa muestra el aumento o la reducción, pero no el límite.

PARA: solicitud de análisis paramétrico.
El programa solicita la fila para el análisis. Se selecciona la fila 3, la restricción de la madera, así como un límite superior de 2000 unidades.

Se encuentran tres pasos:

600 a 1500 unidades: precio dual = 6.67.
1500 a 1800 unidades: precio dual = 3.33.
Más de 1800 unidades: precio dual = 0.

es dañino (es decir, reduce los beneficios o aumenta los costos), mientras que la ampliación de una restricción ayuda (aumenta los beneficios o reduce los costos). En el caso de las restricciones de igualdad, a veces no queda claro si la restricción se hace más estricta o más holgada. La siguiente tabla debe servir para su interpretación.

Signo del precio dual	*Maximización o minimización*	*Efecto del* aumento *de una unidad en el valor del término independiente*
+	Maximización	Aumento en los beneficios
-	Maximización	Reducción en los beneficios
+	Minimización	Reducción en los costos
-	Minimización	Aumento en los costos

Los *costos reducidos* tienen valor de cero o son positivos. En la minimización, el efecto de incluir una unidad en la solución es el aumento de los costos; en la maximización es la reducción del beneficio.

Degeneración

Recuerde que en la formulación algebraica de este capítulo se mencionó que, en un problema de programación lineal con *m* restricciones, la solución básica tendrá exactamente *m* variables básicas o de solución. En las salidas de LINDO se pueden determinar las básicas con sólo identificar las variables de decisión o las variables de holgura o excedentes que sean distintas de cero. En ocasiones (de hecho, con frecuencia en problemas de programación lineal de gran magnitud) sucede que hay menos de *m* variables distintas de cero en la solución óptima. Esto quiere decir que por lo menos una de las variables básicas es cero, situación que se conoce como *degeneración*.

Por lo general, la degeneración no es un problema, pero hay que tener cuidado en la interpretación de algunos de los precios duales. Específicamente, al examinar los intervalos del término independiente, un precio dual puede tener un valor cero como aumento permitido, una reducción permitida de cero, o ambos. En otras palabras, el precio dual se mantendrá sólo en un intervalo limitado o quizás no exista tal intervalo. La degeneración no será un problema si se toma en cuenta esta situación al interpretar los resultados de la programación lineal.

Soluciones alternativas

En ocasiones un problema de programación lineal puede tener más de una solución óptima (véase pág. 305 y Fig. 11-4.). Es fácil detectar estos casos en los resultados de LINDO si la solución *no presenta degeneración*. Si hay una variable de decisión que tenga valor cero y también un costo reducido de cero, esto indica que

existe una solución alternativa. Además, una restricción con holgura (o excedente) igual á cero y con precio dual de cero también indica una solución alternativa.

Si la solución óptima presenta degeneración, entonces no es fácil determinar en los resultados de LINDO si existen soluciones alternativas; este caso no se analizará aquí.

Bibliografía

Schrage, Linus, *Linear, Integer and Quadratic Programming with LINDO,* cuarta edición, South

Rubin, D. y H. Wagner, "Shadow Prices: Tips and Traps for Managers and Instructors", *Interfaces,*

Véase también la bibliografía del capítulo 10.

Problemas con respuestas

11-1. Resuelva gráficamente el siguiente problema:

Maximizar:
Sujeto a:

$$P = 2X_1 + 5X_2$$
$$X_1 + 3X_2 \leq 16$$
$$4X_1 + X_2 \leq 20$$
$$X_2 \leq 4$$
$$X_1, X_2 \geq 0$$

Remítase al problema 10-3 al final del capítulo 10.

a. Resuelva el problema en forma gráfica para encontrar la combinación óptima de productos.

11-2. Para los apartados *(b)* a *(d)* de este problema, considere cada caso por separado. Convierta además a millares todas las unidades y resuelva gráficamente.

b. Suponga que el número máximo de unidades del producto A que pueden venderse es 9000 (en lugar de 8000, como en el caso base). ¿Cuál es el efecto en la solución? ¿Cuál es el efecto en los beneficios? ¿Cuál es el precio dual para la restricción que limita las ventas del producto A?

c. Suponga que el número máximo de unidades de producto B que pueden venderse es 13 000 (y no 12 000, como en el caso base). ¿Cuál es el efecto en la solución? ¿Cuál es el efecto en los beneficios? ¿Cuál es el precio dual para la restricción que limita las ventas del producto B?

d. Suponga que hay 31 000 horas de trabajo disponibles, en lugar de las 30 000 del caso base. ¿Cuál es el efecto en el problema? ¿Cuál es el efecto en los beneficios? ¿Cuál es el precio dual de la restricción del número de horas de trabajo?

e. Remítase a los apartados *(b), (c) y (d)* anteriores. Determine en forma gráfica los intervalos del término independiente en los cuales se mantienen los precios duales de las tres restricciones.

11-3. Remítase al problema 10-1, al final del capítulo 10. La formulación del problema se presenta al final del libro, en las respuestas a los problemas del capítulo 10. Si usted dispone de un programa de computación para programación lineal, resuelva el problema; de lo contrario, consulte los resultados del programa LINDO que se presentan al final del libro en las respuestas a los problemas de este capítulo. Responda las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la solución del problema? ¿Cuántas unidades de cada producto se fabrican y en cuáles restricciones hay holgura o excedentes? ¿Cuál es el beneficio óptimo?

b. ¿Cuál es el valor de una hora adicional de fresado? ¿El de una hora adicional de montaje? ¿El de un dólar adicional de capital de trabajo para el proceso de inventario?

c. Suponga que la compañía puede invertir dinero en publicidad y que el efecto sería un incremento en el límite de la demanda del producto A o del producto C. ¿Cuánto debe estar dispuesta a pagar la compañía para aumentar la demanda del producto A en una unidad? ¿Cuánto para aumentar la demanda del producto C en una unidad?

d. Suponga que el contrato del producto D requiere 13 unidades (en lugar de 10). ¿Qué efecto tendría esto en los beneficios?

e. Suponga que el beneficio por unidad del producto C fuera de 46 dólares (y no de 36) ¿Cómo cambiaría la solución (es decir, cuántas unidades de cada producto habría que producir)? ¿Cuánto cambiarían los beneficios?

/ Se piensa fabricar otro producto, E, que requiere dos horas de fresado, cinco horas de montajes y 20 dólares de capital de trabajo. El beneficio por unidad es de 50 dólares. ¿Cuántas unidades de E deben producirse?

11-4. Remítase al problema 10-2, al final del capítulo 10. La formulación del problema se incluye al final del libro, en las respuestas a los problemas del capítulo 10. Si tiene acceso a un programa de computación para programación lineal, resuelva el problema. De lo contrario, consulte las salidas de LINDO que se muestran en las respuestas correspondientes a este capítulo, al final del libro, y después responda las siguientes preguntas.

a. ¿Cuál es la solución del problema? ¿Cuántos préstamos de cada tipo debe tener la empresa? ¿Cuál es el rendimiento esperado de estos préstamos?

b. Si la compañía pudiera juntar 1.5 millones de dólares adicionales para prestarlos, ¿cuál sería el rendimiento de cada dólar adicional? ¿En qué intervalo se mantendría este valor?

c. Suponga que el rendimiento anual de las segundas hipotecas aumenta del 10 al 12%. ¿Cuál sería el efecto en la solución del problema (es decir, en la cartera de préstamos)? ¿Cuál sería el efecto en el rendimiento total? Suponga que la tasa de las segundas hipotecas fuera del 14%. ¿Cuál sería el efecto? ¿Cuánto tendría que subir la tasa de las segundas hipotecas para que tuviera efecto en la cartera de préstamos?

Problemas

11-5. Resuelva en forma gráfica el siguiente problema de minimización:

Minimizar: $C = 4X, + 2X_2$

Sujeto a: $X, > 6$

$Xi + X_2 > 10$

$X,, X_2 > 0$

11-6. Remítase al problema 10-6 del final del capítulo 10. Resuelva el problema en forma gráfica para encontrar la estrategia de publicidad óptima.

11-7. Remítase al problema 10-10 del final del capítulo 10 (el problema de la compañía Delight Dairy).

a. Resuelva gráficamente el problema.

b. Suponga que se podrían obtener 10 horas de trabajo adicionales (convirtiendo la posición de % de tiempo en tiempo completo). ¿Cuál es el efecto en la solución? Muestre el resultado de manera gráfica. Calcule el precio dual por hora de trabajo adicional.

c. ¿Cuántas horas de trabajo adicional pueden añadirse antes de que cambie el precio dual que calculó en *(b)l* Muestre el resultado en forma gráfica.

d. Remítase al caso base que se describe en *(a)*. Suponga que la competencia ha hecho que el precio del helado baje de 300 a 200 dólares por cada 4000 litros. ¿Cambiaría esto el plan de producción de DD? De ser así, ¿cuál sería el nuevo plan?

11-8. Remítase al problema de mezcla de gasolinas, ejemplo 3, páginas 271 a 275 del capítulo 10. En la tabla 11-5 se presenta la solución de LINDO para este problema. La codificación de las variables es la siguiente: GAS1AV, barriles de gasolina para mezcla 1 utilizados en gasolina para aviación;

Tabla 11-5 Resultado del programa de computación LINDO para el problema de mezcla de gasolinas (problema 11-8)

```
MAX 45.1 GAS1AV + 45.1 GAS2AV + 32.4 GAS1MOT + 32.4 GAS2MOT
SUJETO A
        2) GAS1AV + GAS2AV <= 20000
        3) GAS1AV + GAS1MOT <= 30000
        4) GAS2AV + GAS2MOT <= 70000
        5) 2 GAS1AV - 8 GAS2AV >= 0
        6) 8 GAS1MOT - 2 GAS2MOT >= 0
        7) - GAS1AV + 3 GAS2AV <= 0
        8) -3 GAS1MOT + GAS2MOT <= 0
SOLUCIÓN ÓPTIMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL DETECTADA EN EL PASO 2

        VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

        1)     3355455.00

VARIABLE           VALOR            COSTO REDUCIDO
  GAS1AV        7272.727000            .000000
  GAS2AV        1818.182000            .000000
 GAS1MOT       22727.270000            .000000
 GAS2MOT       68181.820000            .000000

      FILA   HOLGURA O EXCEDENTE     PRECIOS DUALES
       2)      10909.090000            .000000
       3)           .000000          49.718180
       4)           .000000          26.627280
       5)           .000000          -2.309090
       6)      45454.550000            .000000
       7)       1818.182000            .000000
       8)           .000000           5.772726

NÚMERO DE ITERACIONES =    5

INTERVALOS EN LOS CUALES NO CAMBIA LA BASE:

                    INTERVALOS DE COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO
VARIABLE          COEFICIENTE          AUMENTO           REDUCCIÓN
                    ACTUAL            PERMITIDO         PERMITIDA
  GAS1AV          45.100000          73.225010         15.875000
  GAS2AV          45.100000         292.900000         16.933330
 GAS1MOT          32.400000          15.875000         73.225010
 GAS2MOT          32.400000          16.933330         24.408330

                    INTERVALOS DEL TÉRMINO INDEPENIDENTE
      FILA        TÉRMINO              AUMENTO           REDUCCIÓN
              INDEPENDIENTE ACTUAL     PERMITIDO         PERMITIDA
        2     20000.000000            INFINITO       10909.090000
        3     30000.000000         8000.000000        6666.667000
        4     70000.000000        20000.000000       24000.000000
        5          .000000        13333.330000        5000.000000
        6          .000000        45454.550000           INFINITO
        7          .000000            INFINITO        1818.182000
        8          .000000        16666.670000       20000.000000
```

GAS2AV, barriles de gasolina para mezcla 2 utilizados en gasolina para aviación;
GAS1MOT, barriles de gasolina para mezcla 1 utilizados en gasolina para motores;
GAS2MOT, barriles de gasolina para mezcla 2 utilizados en gasolina para motores.

a. ¿Cuál es la solución óptima de este problema?
b. ¿Hay soluciones óptimas alternativas? ¿Cómo lo sabe?
c. ¿Cuáles de las restricciones del octanaje y de la presión de vapor son efectivas?
d. Suponga que la compañía puede comprar 5000 barriles adicionales de gasolina para mezcla 1, a un precio de 200 000 dólares. ¿Deben efectuar la compra? ¿Por qué?
e. Se propone un producto nuevo que requiere mezclar exactamente las mismas cantidades de gasolina para mezcla 1 y 2. Suponga que el precio de venta de esta nueva mezcla es de 40 dólares por barril. ¿Debe fabricarse la mezcla? Suponga que el precio es de 35 dólares por barril. ¿Debe fabricarse la mezcla?

11-9. Remítase al problema de transporte, ejemplo 2, páginas 269 a 271 del capítulo 10. En la tabla 11-6 se presentan los resultados de LINDO para este problema. La variable de decisión CNY es el número de cajas de jabón (en miles) que se envían de la planta de Cincinnati al almacén de Nueva York, la variable DB es la cantidad de cajas (en miles) que se envían de la planta de Denver al almacén de Boston, etc. La primera letra se refiere a la planta y la segunda (y la tercera) al almacén. Utilice los resultados de la tabla 11-6 para responder las siguientes preguntas. *a.* ¿Cuales son la producción y el plan de envíos óptimos para esta compañía?

b. Suponga que, por razones de política, la compañía quiere enviar por lo menos 1000 cajas de Cincinnati a Dallas. ¿Aumentaría el costo? ¿Cuánto aumentaría?
c. Suponga que la empresa considera un programa de mercadotecnia para aumentar las ventas en las regiones de los almacenes. Si todo lo demás permanece igual (con excepción de los costos de envío), ¿qué región generaría mayores beneficios? ¿Cuál generaría el menor beneficio?
d. Suponga que la capacidad de la planta de Cincinnati puede crecer un 10% si se usa tiempo extra, a un costo de 1000 dólares. ¿Debe hacerse? ¿Por qué?
e. En el plan óptimo, la planta de Cincinnati no envía jabón al almacén de Dallas. Suponga que el departamento de envíos logró obtener una tarifa muy favorable, de 90 dólares por cada mil cajas, para la ruta Cincinnati-Dallas. ¿Cómo cambiaría el plan de envíos óptimo? ¿Cómo lo sabe?

11-10. Un fabricante de televisores fabrica cuatro modelos: (1) un televisor portátil, blanco y negro, llamado Deportista, (2) un televisor común, blanco y negro, llamado Normal, (3) un televisor portátil, a colores, llamado Viajero y (4) un modelo normal, a colores, llamado Super. Cada televisor requiere tiempo para montaje y pruebas. En la tabla anexa se indican los requisitos de montaje y pruebas para cada modelo, así como la cantidad de tiempo disponible para cada operación. Además, por causa de una huelga, hay una escasez de cinescopios y el proveedor indica que no podrá proporcionar más de 180 cinescopios el próximo

(para el problema 11-10)

	Modelo Deportista	*Modelo Normal*	*Modelo Viajero*	*Modelo Super*	*Total disponible*
Tiempo de montaje (horas)	8	10	12	15	2 000
Tiempo de pruebas (horas)	2	2	4	5	500
Beneficio marginal (dólares)	40	60	80	100	

Tabla 11-6 Resultados de LINDO para el problema de transporte (problema 11-9) *(continúa)*

```
MIN     120 CNY + 150 CB + 80 CC + 250 CLA + 180 CD + 210 DNY +
      220 DB + 150 DC + 100 DLA + 110 DD + 150 ANY + 170 AB +
      150 AC + 240 ALA + 200 AD
SUJETO A
        2) CNY + DNY + ANY =    50
        3) CB + DB + AB =    10
        4) CC + DC + AC =    60
        5) CLA + DLA + ALA =    30
        6) CD + DD + AD =    20
        7) CNY + CB + CC + CLA + CD <=    100
        8) DNY + DB + DC + DLA + DD <=    60
        9) ANY + AB + AC + ALA + AD <=    50
END

SOLUCIÓN ÓPTIMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL DETECTADA EN EL PASO 7

       VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

        1)     18000.0000

VARIABLE             VALOR          COSTO REDUCIDO
      CNY          40.000000           .000000
       CB            .000000         10.000000
       CC          60.000000           .000000
      CLA            .000000        180.000000
       CD            .000000        100.000000
      DNY            .000000         60.000000
       DB            .000000         50.000000
       DC            .000000         40.000000
      DLA          30.000000           .000000
       DD          20.000000           .000000
      ANY          10.000000           .000000
       AB          10.000000           .000000
       AC            .000000         40.000000
      ALA            .000000        140.000000
       AD            .000000         90.000000

      FILA   HOLGURA O EXCEDENTE      PRECIOS DUALES
        2)             .000000      -150.000000
        3)             .000000      -170.000000
        4)             .000000      -110.000000
        5)             .000000      -100.000000
        6)             .000000      -110.000000
        7)             .000000        30.000000
        8)          10.000000           .000000
        9)          30.000000           .000000

NÚMERO DE ITERACIONES =    7
```

Tabla 11-6 *(conclusión)*

INTERVALOS EN LOS CUALES NO CAMBIA LA BASE:

INTERVALOS DE COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

VARIABLE	COEFICIENTE ACTUAL	AUMENTO PERMITIDO	REDUCCIÓN PERMITIDA
CNY	120.000000	10.000000	40.000000
CB	150.000000	INFINITO	10.000000
CC	80.000000	40.000000	INFINITO
CLA	250.000000	INFINITO	180.000000
CD	180.000000	INFINITO	100.000000
DNY	210.000000	INFINITO	60.000000
DB	220.000000	INFINITO	50.000000
DC	150.000000	INFINITO	40.000000
DLA	100.000000	140.000000	INFINITO
DD	110.000000	90.000000	INFINITO
ANY	150.000000	40.000000	10.000000
AB	170.000000	10.000000	INFINITO
AC	150.000000	INFINITO	40.000000
ALA	240.000000	INFINITO	140.000000
AD	200.000000	INFINITO	90.000000

INTERVALOS DEL TÉRMINO INDEPENDIENTE

FILA	TÉRMINO INDEPENDIENTE ACTUAL	AUMENTO PERMITIDO	REDUCCIÓN PERMITIDA
2	50.000000	30.000000	10.000000
3	10.000000	30.000000	10.000000
4	60.000000	30.000000	10.000000
5	30.000000	10.000000	30.000000
6	20.000000	10.000000	20.000000
7	100.000000	10.000000	30.000000
8	60.000000	INFINITO	10.000000
9	50.000000	INFINITO	30.000000

mes y, de éstos, como máximo 100 podrán ser de color.

El problema se formula y se resuelve en la tabla 11-7. Las variables de decisión, DEPORTISTA, NORMAL, VIAJERO y SUPER representan el número de unidades producidas para el modelo.

Responda las siguientes preguntas con base en los resultados de LINDO de la tabla 11-7.

a. ¿Cuál es el programa de producción óptimo para el fabricante de televisores? ¿Hay programas óptimos alternativos?

b. ¿Cuál es el valor marginal de una hora adicional de tiempo de montaje? ¿En qué intervalo es válido este valor marginal?

c. Suponga que se pueden obtener 80 horas adicionales de tiempo de pruebas a un costo de cuatro dólares por hora. ¿Debe hacerse? ¿Cuál sería el incremento en los beneficios?

d. ¿Cuál es el valor marginal de una hora adicional de tiempo de pruebas? ¿En qué intervalo es válido este valor?

e. Suponga que se instituye un cambio de precio que modifica el beneficio marginal del modelo Deportista, de 40 a 45 dólares. ¿Cambiaría esto el plan óptimo de la producción? Suponga que el pre-

Tabla 11-7 Resultados de LINDO para el problema del fabricante de televisores (problema 11-10)

```
MAX 40 DEPORTISTA + 60 NORMAL + 80 VIAJERO + 100 SUPER
SUJETO A
        2) 8 DEPORTISTA + 10 NORMAL + 12 VIAJERO + 15 SUPER <= 2000
        3) 2 DEPORTISTA + 2 NORMAL + 4 VIAJERO + 5 SUPER <= 500
        4) DEPORTISTA + NORMAL + VIAJERO + SUPER <= 180
        5) VIAJERO + SUPER <= 100
END

SOLUCIÓN ÓPTIMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL DETECTADA EN EL PASO 5

        VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

        1) 12500.0000

VARIABLE          VALOR        COSTO REDUCIDO
DEPORTISTA         .000000          10.000000
NORMAL          125.000000           .000000
VIAJERO            .000000           .000000
   SUPER         50.000000           .000000

FILA     HOLGURA O EXCEDENTE    PRECIOS DUALES
 2)              .000000          5.000000
 3)              .000000          5.000000
 4)             5.000000           .000000
 5)            50.000000           .000000

NÚMERO DE ITERACIONES = 5

INTERVALOS EN LOS CUALES NO CAMBIA LA BASE:

                        INTERVALOS DE COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO
VARIABLE              COEFICIENTE          AUMENTO          REDUCCIÓN
                        ACTUAL            PERMITIDO        PERMITIDA
DEPORTISTA          40.000000          10.000000         INFINITO
    NORMAL          60.000000           6.666667        20.000000
   VIAJERO          80.000000            .000000         INFINITO
     SUPER         100.000000          50.000000          .000000

                        INTERVALOS DEL TÉRMINO INDEPENDIENTE
      FILA          TÉRMINO              AUMENTO          REDUCCIÓN
                INDEPENDIENTE ACTUAL     PERMITIDO        PERMITIDA
        2         2000.000000          33.333330       500.000000
        3          500.000000         100.000000        20.000000
        4          180.000000           INFINITO         5.000000
        5          100.000000           INFINITO        50.000000
```

ció del modelo Deportista cambia de 40 a 55 dólares. En este caso, ¿variaría el plan de producción? / ¿Cuánto tendría que cambiar el precio del modelo Normal para que hubiera una modificación en el programa de producción?

g. Suponga que se pueden obtener cinescopios adicionales de otro proveedor, pero cuestan dos dólares más que los del proveedor regular para blanco y negro y cinco dólares más para el de color. ¿Deben comprarse cinescopios? ¿Cuántos?

h. La gerencia quiere introducir un nuevo modelo a color, llamado Compañero. El modelo Compañero sólo requeriría 10 horas de montaje y tres horas de pruebas. El beneficio marginal del modelo sería de 70 dólares. ¿Debe producirse el nuevo modelo? De ser así, ¿cuál sería el valor marginal de la producción de una unidad del modelo Compañero?

Problemas más difíciles

11-11. Remítase al modelo de programación de la producción, ejemplo 4, páginas 275 a 277 del capítulo 10. El problema se formula y se resuelve en la tabla 11-8. Las variables de decisión son ENETN, FEBTN, MARTN, etc., que corresponden a las unidades producidas en tiempo normal en enero, febrero, marzo, etc., ENETE, FEBTE, etc., el número de unidades producidas con tiempo extra en enero, febrero, etc.; e INVENE, INVFEB, etc., correspondientes al número de unidades en inventario al final de enero, febrero, etcétera.

Consulte la tabla 11-8 para responder las siguientes preguntas:

a. ¿Cuál es la solución del problema?, es decir, ¿cuál debe ser el programa de producción de la compañía para los seis próximos meses? ¿Cuál es el costo de este plan?

b. Después de completar el plan de producción que se muestra en la tabla 11-8, la compañía recibió un pedido adicional de cinco unidades para el mes de enero (lo que aumenta los compromisos del mes de 95 a 100 unidades). El gerente de producción argumenta que el costo marginal de producir cada una de estas cinco unidades es de 35 dólares (el costo del tiempo extra), puesto que la planta ya está programada para operar a toda su capacidad normal. El gerente de ventas afirma que el costo marginal sólo debe ser de 30 dólares por unidad, ya que antes sólo existía el compromiso de entregar 95 unidades en enero. ¿Cuál cree usted que será el costo incremental de producir estas cinco unidades adicionales? ¿Por qué?

c. Suponga que la compañía podría aumentar temporalmente la capacidad en tiempo normal, en diez unidades, durante el mes de abril. Con esto aumentaría el costo de estas 10 unidades adicionales, de 32 a 34 dólares, mientras que el costo de las unidades de tiempo extra sería el mismo, 37 dólares. ¿Debe realizarse este cambio? ¿Cómo lo sabe?

d. Suponga que el encargado de llevar su contabilidad le informa que se cometió un error al estimar el costo unitario en tiempo normal para el mes de abril. En lugar de los 32 dólares que se usaron en el análisis, el costo correcto por unidad debió ser 36 dólares. ¿Cambiaría entonces el plan de producción? ¿Cambiaría el costo total estimado? ¿Cuánto?

11-12. La granja Co-Op posee 1000 hectáreas de tierra, las cuales cultiva para vender los productos a su cadena de tiendas. Los planes actuales especifican que la granja cultive

Tabla 11-8 Resultados de LINDO para el ejemplo de programación de la producción (problema 11-11) *(continúa)*

```
MIN      30 ENETN  + 30 FEBTN  + 32 MARTN  + 32 ABRTN  + 31 MAYTN
       + 32 JUNTN  + 35 ENETE  + 35 FEBTE  + 37 MARTE  + 37 ABRTE
       + 36 MAYTE  + 37 JUNTE  + 2 INVENE  + 2 INVFEB  + 2 INVMAR
       + 2 INVABR  + 2 INVMAY  + 2 INVJUN
SUJETO A
        2)    ENETN  <=    100
        3)    FEBTN  <=    100
        4)    MARTN  <=    100
        5)    ABRTN  <=    100
        6)    MAYTN  <=    100
        7)    JUNTN  <=    100
        8)    ENETE  <=     15
        9)    FEBTE  <=     15
       10)    MARTE  <=     15
       11)    ABRTE  <=     15
       12)    MAYTE  <=     15
       13)    JUNTE  <=     15
       14)    ENETN  + ENETE  - INVENE  =     95
       15)    FEBTN  + FEBTE  + INVENE  - INVFEB  =     85
       16)    MARTN  + MARTE  + INVFEB  - INVMAR  =    110
       17)    ABRTN  + ABRTE  + INVMAR  - INVABR  =    115
       18)    MAYTN  + MAYTE  + INVABR  - INVMAY  =     90
       19)    JUNTN  + JUNTE  + INVMAY  - INVJUN  =    105
       20)    INVJUN  = 0

        VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

        1) 18810.0000

VARIABLE           VALOR          COSTO REDUCIDO
    ENETN        100.000000           .000000
    FEBTN        100.000000           .000000
    MARTN        100.000000           .000000
    ABRTN        100.000000           .000000
    MAYTN         95.000000           .000000
    JUNTN        100.000000           .000000
    ENETE           .000000          4.000000
    FEBTE           .000000          2.000000
    MARTE           .000000          2.000000
    ABRTE          5.000000           .000000
    MAYTE           .000000          5.000000
    JUNTE           .000000          4.000000
   INVENE          5.000000           .000000
   INVFEB         20.000000           .000000
   INVMAR         10.000000           .000000
   INVABR           .000000          8.000000
   INVMAY          5.000000           .000000
   INVJUN           .000000         35.000000
```

Tabla 11-8 *(conclusión)*

FILA	HOLGURA O EXCEDENTE	PRECIOS DUALES
2)	.000000	1.000000
3)	.000000	3.000000
4)	.000000	3.000000
5)	.000000	5.000000
6)	5.000000	.000000
7)	.000000	1.000000
8)	15.000000	.000000
9)	15.000000	.000000
10)	15.000000	.000000
11)	10.000000	.000000
12)	15.000000	.000000
13)	15.000000	.000000
14)	.000000	-31.000000
15)	.000000	-33.000000
16)	.000000	-35.000000
17)	.000000	-37.000000
18)	.000000	-31.000000
19)	.000000	-33.000000
20)	.000000	.000000

NÚMERO DE ITERACIONES = 12

INTERVALOS EN LOS CUALES NO CAMBIA LA BASE:

	INTERVALOS DE COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO		
VARIABLE	COEFICIENTE ACTUAL	AUMENTO PERMITIDO	REDUCCIÓN PERMITIDA
ENETN	30.000000	1.000000	INFINITO
FEBTN	30.000000	3.000000	INFINITO
MARTN	32.000000	3.000000	INFINITO
ABRTN	32.000000	5.000000	INFINITO
MAYTN	31.000000	4.000000	1.000000
JUNTN	32.000000	1.000000	INFINITO
ENETE	35.000000	INFINITO	4.000000
FEBTE	35.000000	INFINITO	2.000000
MARTE	37.000000	INFINITO	2.000000
ABRTE	37.000000	2.000000	1.000000
MAYTE	36.000000	INFINITO	5.000000
JUNTE	37.000000	INFINITO	4.000000
INVENE	2.000000	1.000000	4.000000
INVFEB	2.000000	1.000000	2.000000
INVMAR	2.000000	1.000000	2.000000
INVABR	2.000000	INFINITO	8.000000
INVMAY	2.000000	4.000000	1.000000
INVJUN	2.000000	INFINITO	35.000000

Tabla 11-8 *(conclusión)*

	INTERVALOS DEL TÉRMINO INDEPENDIENTE		
FILA	TÉRMINO INDEPENDIENTE ACTUAL	AUMENTO PERMITIDO	REDUCCIÓN PERMITIDA
2	100.000000	5.000000	5.000000
3	100.000000	5.000000	10.000000
4	100.000000	5.000000	10.000000
5	100.000000	5.000000	10.000000
6	100.000000	INFINITO	5.000000
7	100.000000	5.000000	5.000000
8	15.000000	INFINITO	15.000000
9	15.000000	INFINITO	15.000000
10	15.000000	INFINITO	15.000000
11	15.000000	INFINITO	10.000000
12	15.000000	INFINITO	15.000000
13	15.000000	INFINITO	15.000000
14	95.000000	5.000000	5.000000
15	85.000000	10.000000	5.000000
16	110.000000	10.000000	5.000000
17	115.000000	10.000000	5.000000
18	90.000000	5.000000	95.000000
19	105.000000	5.000000	5.000000
20	.000000	.000000	.000000

maíz y trigo en sus terrenos. Los costos de semillas y de las labores de cultivo son de 100 dólares por hectárea de maíz y de 120 por hectárea de trigo. El maíz requiere 10 horas de trabajo por hectárea y el trigo requiere ocho horas por hectárea. La cosecha a final del año es de 120 bushels de maíz por hectárea y 100 de trigo. La granja puede cultivar cualquier combinación de los dos cultivos. La granja recibe 4.25 dólares por cada bushel de maíz que venda y 5.25 por bushel de trigo. La cadena de tiendas puede comprar, a lo sumo, 100 000 bushels de maíz y 175 000 de trigo.

La granja considera la posibilidad de criar hasta 2000 reses para la venta de carne a las tiendas de la cadena. Para lograrlo, se puede dedicar parte de la tierra que se consideraba para el cultivo de maíz o trigo como pastizal para la crianza de las reses y su alimentación durante un año. Las reses cuestan 150 dólares y se venden a 800 dólares después de alimentarlas un año. Cada res requiere 20 horas de trabajo, media hectárea de terreno y consume 80 bushels de maíz durante el engorde. El maíz para las reses se puede cultivar en la granja, si hay suficiente, o se puede comprar a un costo de 4.50 dólares el bushel.

La granja puede emplear estudiantes como mano de obra, con un costo de seis dólares la hora, o granjeros experimentados a diez dólares la hora. Cada hora de un estudiante requiere nueve minutos (0.15 horas) de supervisión y los trabajadores experimentados necesitan tres minutos (0.05 horas) de supervisión por hora. Hay 2000 horas de supervisión disponibles.

La granja cuenta con 200 000 dólares para financiar sus operaciones. Formuló sus opciones como un programa lineal para llevar a cabo de manera eficiente sus operaciones, con las siguientes definiciones de variables:

M = Hectáreas sembradas de maíz
T = Hectáreas sembradas de trigo
R = Reses compradas y vendidas
TES = Horas de trabajo de estudiantes

Tabla 11-9 Resultados de LINDO para el problema de la granja Co-Op (problema 11-12)

```
MAX  120 T + 100 M + 5.25 VT + 4.25 VM + 650 R - 4.5 MAR - 6 TES - 10 TEX

SUJETO A
        2) T + M + 0.5 R <=    1000
        3) 8 T + 10 M + 20 R - TES - TEX <=    0
        4) 0.15 TES + 0.05 TEX <=    2000
        5) 120 T + 100 M + 150 R + 4.5 MAR
             + 6 TES + 10 TEX <=    200000
        6) - 80 R + MAR + MCR >=    0
        7) 120 M - VM - MCR >=    0
        8) 100 T - VT >=    0
        9) R <=    2000
       10) VT <=    175000
       11) VM <=    100000
```

Límite de hectáreas.
Demanda de fuerza de trabajo.
Límite superior de horas de supervisión.

Restricción de presupuesto.
Demanda de maíz para alimentar las reses.
Uso total del maíz cultivado.
Producción de trigo.
Límite superior de las reses.
Límite superior de las ventas de trigo.
Límite superior de las ventas de maíz.

```
SOLUCIÓN ÓPTIMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL DETECTADA EN EL PASO 7

     VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

        1)     358210.300

   VARIABLE              VALOR          COSTO REDUCIDO
          T          793.357900            .000000
          M          118.081200            .000000
         VT        79335.800000            .000000
         VM            .000000            .055811
          R          177.121800            .000000
        MAR            .000000            .364393
        TES        11070.110000            .000000
        TEX            .000000           4.151293
        MCR        14169.740000            .000000

       FILA     HOLGURA O EXCEDENTE      PRECIOS DUALES
          2)            .000000          350.645700
          3)            .000000            6.226938
          4)          339.483300            .000000
          5)            .000000            .037823
          6)            .000000          -4.305811
          7)            .000000          -4.305811
          8)            .000000          -5.250000
          9)        1822.878000            .000000
         10)       95664.200000            .000000
         11)      100000.000000            .000000
```

INTERVALOS EN LOS CUALES NO CAMBIA LA BASE:

INTERVALOS DE COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

VARIABLE	COEFICIENTE ACTUAL	AUMENTO PERMITIDO	REDUCCIÓN PERMITIDA
T	-120.000000	5.857180	6.368375
M	-100.000000	6.505330	10.250060
VT	5.250000	.058572	.063684
VM	4.250000	.055811	INFINITO
R	650.000000	151.24900	6.833376
MAR	-4.500000	.364393	INFINITO
TES	-6.000000	2.419982	.394233
TEX	-10.000000	4.151293	INFINITO
MCR	.000000	1.890613	.085417

INTERVALOS DEL TÉRMINO INDEPENDIENTE

FILA	TÉRMINO INDEPENDIENTE ACTUAL	AUMENTO PERMITIDO	REDUCCIÓN PERMITIDA
2	1000.000000	190.476200	278.787800
3	.000000	20476.190000	5333.332000
4	2000.000000	INFINITO	339.483300
5	200000.000000	23589.740000	32000.000000
6	.000000	90526.310000	13763.440000
7	.000000	90526.310000	13763.440000
8	.000000	79335.800000	95664.200000
9	2000.000000	INFINITO	1822.878000
10	175000.000000	INFINITO	95664.200000
11	100000.000000	INFINITO	100000.000000

TEX = Horas de trabajo de granjeros experimentados MAR =
Bushels de maíz comprados para alimentar reses MCR =
Bushels de maíz producidos para alimentar reses VM =
Bushels de maíz vendidos VT =
Bushels de trigo vendidos

La formulación y los resultados LINDO se proporcionan en la tabla 11-9. Responda las preguntas *(a)* a (/) independientemente de las demás.

a. ¿Cuál es el programa de operaciones óptimo para la granja (es decir, la solu ción del problema)? ¿Cuál es el benefi cio monetario total?

b. ¿Cuánto tendría que cambiar el precio del maíz, y en qué dirección (aumento o reducción) para que la granja consi dere la venta de maíz a las tiendas Co-Op?

c. ¿Cuál es el valor de una hora de traba jo adicional para la granja?

d. Si la granja pudiera obtener un présta mo de 15 000 dólares adicionales para financiar sus operaciones, ¿cuál es la mayor tasa de interés (interés anual simple) que estaría dispuesta a pagar?

e. Una granja vecina ha ofrecido alquilar 200 hectáreas a la granja Co-Op por una cuota fija de 65 000 dólares, los cuales se pagarían al final del año con el beneficio de la venta de las cose chas y las reses. ¿Debe aceptarse la oferta?

/ ¿Cuánto tendrían que aumentar el "costo de semillas y otros costos de cultivo" para que la granja cambiara la cantidad de terreno que dedica al cultivo de trigo?

g. La granja considera la idea de cultivar tomates. Las plantas de tomate pueden comprarse a 50 dólares la hectárea y requieren 15 horas de trabajo por hectárea. Una hectárea de tomate produce 40 bushels para venta, que pueden venderse a 12 dólares el bushel. ¿Debe dedicar parte del terreno al cultivo de tomates?

h. La granja puede aplicar fertilizante a la tierra al inicio de la temporada, a un costo fijo de 10 000 dólares. El fertilizante se aplica a toda la tierra y aumenta el rendimiento de maíz a 130 bushels por hectárea y el rendimiento de trigo a 110 bushels por hectárea. ¿Es rentable aplicar el fertilizante?

i. Co-Op quiere tener mano de obra experimentada en la granja. ¿Cuál sería la tasa de cambio en el beneficio si se agregan horas de trabajo experimentado?

j. El precio dual de la restricción 3 (demanda de fuerza de trabajo) es de 6.23. Pero la granja puede contratar una cantidad ilimitada de horas de trabajo de estudiantes a seis dólares la hora. Explique esta contradicción aparente.

CAPÍTULO 12

Programación lineal
Método símplex

En el capítulo anterior se mostró cómo resolver problemas de programación lineal y efectuar el análisis gráfico de la sensibilidad, además de cómo interpretar los resultados de las soluciones por computador. En este capítulo se presenta un procedimiento de solución algebraico, llamado método símplex, para la resolución de problemas de programación lineal. Este procedimiento —o sus variantes— se codifica en programas de computación para resolver problemas de programación lineal de gran tamaño, incluso aquellos que incluyen miles de variables y restricciones.

Formulación algebraica

La formulación algebraica se presentó en el capítulo 11 (págs. 320 a 324), y se deberá repasar dicho análisis antes de continuar. Consideremos el mismo problema que se formuló en forma algebraica y se resolvió gráficamente:

Maximizar: $P = 6X_1 + 7X_2$
Sujeto a: $2X_1 + 3X_2 \leq 24$
$2X_1 + X_2 \leq 16$
$X_1, X_2 \geq 0$

donde X_1 y X_2 representan el número de unidades del producto A y el producto B, y las dos restricciones representan los límites (en horas) de la capacidad de las dos máquinas. El producto A tiene beneficio marginal de seis dólares por unidad y el producto B genera siete dólares por unidad. Recuerde que el problema podía convertirse en un conjunto de restricciones de *igualdad* si se añadían dos variables de holgura, X_3 y X_4, las cuales representaban la capacidad no utilizada de las máquinas 1 y 2, respectivamente. Puesto que las variables de holgura no agregan

nada al beneficio, tendrán coeficiente de cero en la función objetivo; entonces, el problema se puede reescribir como sigue:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar:} \quad & P = 6X_1 + 7X_2 + 0X_3 + 0X_4 \\ \text{Sujeto a:} \quad & 2X_1 + 3X_2 + X_3 + 0X_4 = 24 \\ & 2X_1 + X_2 + 0X_3 + X_4 = 16 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \end{aligned}$$

En este problema hay ahora cuatro variables y dos restricciones, sin contar las restricciones de no negatividad. En un problema general de programación lineal con *m* restricciones, habrá más de *m* variables después de añadir las variables de holgura o de excedente. Recuerde que si se selecciona un conjunto de las *m* variables, las demás se hacen iguales a cero y después se resuelve el problema para estas *m* variables entonces se obtiene una **solución básica.** Las variables que se seleccionan se denominan **variables de solución** y las variables iguales a cero son las **variables externas.** En el capítulo anterior se encontraron todas las soluciones básicas del problema y se mostró su relación con los vértices de la solución gráfica (véanse Tabla 11-1 y Fig. 11-6). Recuerde que algunas de las soluciones básicas **no son factibles,** ya que contienen valores negativos para una variable o más.

Como ejemplo, una de las soluciones básicas implica la selección de X_λ y X_2 como variables de solución y la asignación de cero a X_3 y X_4 (las variables externas). Al resolver la ecuación anterior se obtiene Xj = 6, $X_2 = 4$ y beneficio $P = 64$, lo cual es la solución óptima. Otra solución básica selecciona X_3 y X_4 como variables de solución y X, = $X_2 = 0$, con beneficio $P = 0$.

Método símplex

El método símplex es un procedimiento que comienza con una solución básica factible y luego avanza, paso por paso, a soluciones consecutivas, cada una de las cuales presenta las siguientes características: (1) es una solución básica factible, y (2) tiene beneficio mayor que el de la solución anterior.[1] Por último se obtiene una solución que no es posible mejorar y se ha encontrado la solución óptima.

Ejemplo 1: Maximización de beneficios

El proceso comienza con la función objetivo y las ecuaciones de restricción expresadas en forma algebraica. Para nuestro ejemplo se tiene:

$$\begin{aligned} P = {} & 6X_1 + 7X_2 + 0X_3 + 0X_4 \\ & 2X_1 + 3X_2 + X_3 + 0X_4 = 24 \\ & 2X_1 + X_2 + 0X_3 + X_4 = 16 \end{aligned}$$

[1] En algunos casos es posible que el beneficio sea igual en un paso que en el siguiente, pero no puede disminuir.

Tabla 12-1 Primera solución

C_j	*Variables de solución*	*Valores de solución*	*0* X_3	*0* X_4	*6* X_1	*7* X_2
		24	1	0	2	3
		16	0	1	2	1
	Z_j					
	$C_j - Z_j$					

Tabla símplex

Es conveniente efectuar los cálculos del procedimiento símplex en forma de tabla, como la tabla 12-1.

Bajo el encabezamiento de cada columna (como X_3, X_4, X_1 o X_2) de la tabla 12-1 están los coeficientes en las ecuaciones de restricción correspondientes a las variables del encabezamiento. Así, bajo *Xy* está escrito $\begin{pmatrix}2\\2\end{pmatrix}$; bajo X_2 está $\begin{pmatrix}3\\1\end{pmatrix}$; bajo X_3 está $\begin{pmatrix}1\\0\end{pmatrix}$; y bajo X_4 está escrito $\begin{pmatrix}0\\1\end{pmatrix}$. Bajo la columna "Valores de solución" se presentan las constantes o términos independientes de las ecuaciones. Cada fila de la tabla es, entonces, una ecuación asociada a una restricción. Es conveniente colocar las columnas de las variables de holgura inmediatamente después de la columna de variables de solución. La primera fila del encabezamiento de la tabla contiene las C, o beneficio por unidad (los coeficientes de las variables en la ecuación de beneficio) para cada una de las variables X_1 a X_4.

Solución inicial

La solución básica inicial de la tabla 12-1 se forma con las variables de holgura X_3 y X_4 como variables de solución y X_1 y X_2 como externas. Esta solución no es muy rentable, ya que el beneficio es de $P = 0$ y requiere que no se produzca nada del producto A y nada del producto B. Los términos X_3 y X_4 se registran en la tabla símplex en la columna "Variables de solución" y sus beneficios por unidad *(CJ)* se marcan en la primera columna, bajo el encabezamiento C_j (véase Tabla 12-2). Las variables de solución pueden identificarse como aquellas cuyas columnas contienen un elemento con +1 y los demás elementos son 0. De esta manera, la

columna X_3 es y la columna X_4 es . Además, el 1 debe estar en una fila

distinta del 1 de cualquier otra columna. Así, *Xj* tiene un 1 en la primera fila y *X4* tiene un 1 en la segunda. Observe que esto equivale a decir que se han resuelto las ecuaciones de restricción en función deX_3 y X_4:

Tabla 12-2 Primera solución

C_j	Variables de solución	Valores de solución	0 X_3	0 X_4	6 X_1	7 X_2
0	$\rightarrow X_3$	24	1	0	2	③
0	X_4	16	0	1	2	1
	Z_j	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$		0	0	6	7
						↑

Tabla 12-3

Variables de solución	X_1	X_2	. . .	X_n
X_1	1	0	. . .	0
X_2	0	1	. . .	0
.	.	.	. . .	.
.	.	.	. . .	.
.	.	.	. . .	.
X_n	0	0	. . .	1

$$X_3 = 24 - [2X_1 + 3X_2] \qquad (12\text{-}1)$$
$$X_4 = 16 - [2X_1 + X_2]$$

En este momento las variables que se omiten de la solución son Xi y X_2 y son iguales a cero. Por lo tanto, para la primera solución de prueba, $X_3 = 24$ y $X_4 = 16$.

Si hay η restricciones para el problema, entonces las primeras η columnas deben aparecer como se muestra en la tabla 12-3.

Observe que hay una diagonal de unos y el resto de los números en las primeras η columnas son 0.

Coeficientes de sustitución. Los coeficientes de las columnas del cuerpo de la tabla símplex se pueden considerar como **coeficientes de sustitución.** Son las reducciones de las variables de la solución que se obtendrán al introducir una unidad de cada variable que actualmente no se encuentra en la solución. Por ejemplo, en la tabla 12-2, $\begin{bmatrix} 3 \\ 1 \end{bmatrix}$ está bajo la columna X_2. Por cada unidad del producto B (es decir, unidades de X_2) que se introduzca en la solución hay que quitar tres unidades de la variable de holgura X3 y una unidad de la variable de holgura X_4, para mantenerse dentro de las restricciones establecidas. Entonces, el 3 y el 1 son las cantidades de X_3 y X_4 que sustituyen a una unidad de X_2. De manera parecida, por cada unidad de Xi que se introduzca en la solución hay que eliminar dos unidades de X3 y dos unidades de X4. Al examinar las ecuaciones de restricción (12-1) se confirma la validez de esta interpretación.

Bajo cada una de las columnas de la tabla 12-2 hay un total Z_j (el subíndice y se refiere a la columna que se totaliza). El total Z_j de una columna es la cantidad de beneficios que se pierde al reemplazar parte de la combinación de solución con *una* unidad del elemento que encabeza la columna. Este valor se determina multiplicando cada C_j de la fila por el número de la fila y la columna j (el coeficiente de sustitución), y sumando todos los resultados. Los cálculos de las Zj de la tabla 12-2 son:

$$Z_3 = 1(0) + 0(0) = 0$$
$$Z_4 = 0(0) + 1(0) = 0$$
$$Z, = 2(0) + 2(0) = 0$$
$$Z_2 = 3(0) + 1(0) = 0$$

También se puede calcular un valor Z para la columna "Valores de solución" (a partir de ahora se hará referencia a esta columna como la columna 0):

$$Z_o = 24(0) + 16(0) = 0$$

Z_o representa el beneficio de la solución actual.

Debajo de la fila Z_v hay una fila con denominación $C_1 - Z_1$. AI restar el total Z_1 a la cantidad C_1 de la parte superior de la columna, se encuentra el beneficio *neto* que agrega una unidad del producto (si $C_1 - Z_1$ es positivo) o el beneficio que se pierde (si C, - Z_1 es negativo). De esta manera, si se añade a la solución una unidad de X_2 (reemplazando algunas cantidades de X_3 y X_4) aumentará en siete dólares el beneficio neto.

La fila $C_1 - Z_1$ es en realidad una ecuación, como las otras filas de la tabla de programación lineal, y expresa el beneficio en esa etapa de los cálculos, en función de las variables externas. Por lo tanto, la fila $C_1 - Z_1$ equivale a:

$$\text{Beneficio} = 0X, + 0X_4 + 6X_t + 7X_2$$

Determinación de una nueva solución

El método símplex encuentra una nueva solución sustituyendo una de las variables de solución por una de las variables externas. Este procedimiento se lleva a cabo en tres pasos:

1. Escoger una variable de entrada que aumente la rentabilidad de la solución.
2. Elegir la variable de salida que asegure una solución básica factible.
3. Resolver de nuevo las ecuaciones de restricción para encontrar la nueva solución.

Variable de entrada. Determine la variable que tiene mayor beneficio neto por unidad. Esta variable es la que tenga el mayor valor positivo en la fila C_1 - Z_1 de la parte inferior de la tabla. La variable X_2 (producto B) contribuye con siete dólares por unidad, más que cualquier otra variable. Por ello, X_2 es la variable que

entra a la solución. La columna asociada con X_2 se indica con una flecha en la tabla 12-2.

Variable de salida. El siguiente paso es determinar cuál de las variables de solución actuales (X_3 o X_4) saldrá de la solución y será reemplazada por X_2. Considere que las unidades de X_2 se agregan a la solución una por una. En algún momento una de las variables iniciales de la solución será exactamente igual a cero, con lo que deja de ser una variable de solución para convertirse en una variable externa. Lo que se debe averiguar es cuál de las variables de solución llegará antes a cero si se introducen unidades de X_2 a la solución. La variable X! permanecerá como variable externa con valor de cero, por lo que se pueden escribir las ecuaciones de restricción de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 3X_2 + X_3 &= 24 \\ X_2 + X_4 &= 16 \end{aligned}$$

Si X3 fuera la variable de salida (y, por consiguiente, igual a cero) se podrían resolver las ecuaciones anteriores para X_2 y X_4, con lo cual se obtendría $X_2 = 8$ y $X_4 = 8$. Ésta es una solución factible.

Si X_4 fuera la variable de salida (y, por lo tanto, igual a cero) la resolución de las ecuaciones para X_2 y X_3 da como resultado $X_2 = 16$ y $X_3 = -24$. Esta solución no es factible, ya que requiere cantidades negativas de X_3. En otras palabras, al añadir unidades de X_2, en el punto $X_2 = 8$ la variable de solución X_3 llegaría a cero; ésta es la primera variable de solución que llega a cero (X_4, la otra variable de solución, aún es positiva en ese punto), por lo que X_3 es la variable de salida.

Se puede obtener el mismo resultado con la tabla y una regla más mecánica. Divida cada cantidad de la columna "Valores de solución" entre la cantidad de la *fila comparable* en la columna de entrada X_2:

Para la fila X_3: $^{24}/_{3} = 8$
Para la fila X_4: $^{16}/_{1} = 16$

El número menor que se obtiene con este cálculo indica el número máximo de unidades de X_2, 8, que puede introducirse en la solución sin que alguna variable de solución llegue a ser negativa. Si alguna de las cantidades que se calculan con la división es negativa, entonces no deben tomarse en cuenta; en otro caso, la cantidad *menor,* como se calculó antes, determina la variable de salida. En este caso, la fila X_3 tiene el número menor (8) y X_3 es la variable de salida. La fila X_3 se señala con una flecha en la tabla 12-2.

Observe lo que se ha hecho hasta ahora en el procedimiento símplex. Primero se identificó una variable que aumentará la rentabilidad y se indicó que debía incluirse en la siguiente solución. Después se garantizó que la siguiente solución sería una solución básica factible, identificando una variable que se eliminaría de la solución, de forma que todos los valores de las variables fueran no negativos. El tercer paso es determinar la nueva solución.

Nueva solución. El reemplazo de X_3 por X_2 se lleva a cabo con dos técnicas.

El elemento de la columna de entrada X_2 y la fila de salida X_3 se denomina **elemento pivote** (el del ejemplo se encierra en un círculo en la tabla 12-2 y tiene valor de 3). Para obtener una nueva solución que contenga X_2 hay que convertir este elemento en +1 y todos los demás elementos de la columna X_2 en 0.

Para convertir el elemento pivote en +1 se requiere dividir cada elemento de la fila X_3 actual entre el valor del elemento pivote (es decir, entre 3). Recuerde que las filas son en realidad ecuaciones de restricción y que se puede dividir toda una ecuación entre una constante.

Los cálculos son:

$$\begin{aligned} {}^{24}/_{3} &= 8 \\ {}^{1}/_{3} &= {}^{1}/_{3} \\ {}^{0}/_{3} &= 0 \\ {}^{2}/_{3} &= {}^{2}/_{3} \\ {}^{3}/_{3} &= 1 \end{aligned}$$

De esta manera, la nueva fila superior debe ser **(8, ⅓, 0, ⅔, 1)** y lleva la etiqueta X_2 en la segunda solución símplex (véase Tabla 12-4).

La segunda parte del procedimiento tiene el propósito de convertir en cero todos los elementos (con excepción del pivote) de la columna X_2. En el ejemplo, el único otro valor de la columna X_2 es un 1 en la fila X_4 (en un círculo en la Tabla 12-4). Para convertir en cero todos los valores, se multiplica toda la *nueva* fila X_2 por el valor de la columna X_2, fila X_4, es decir, por el valor colocado en el círculo, 1, y después se resta el resultado de la fila X_4 anterior. Es más fácil ilustrar que describir el procedimiento (véase Tabla 12-5).

Los nuevos valores de la fila X_4 son **(8, -⅓, 1, ⅔, 0)**.

Para comprender por qué es válido el procedimiento anterior, recuerde que cada fila de la tabla equivale a una ecuación. Por lo tanto, lo único que se hace es multiplicar una ecuación por una constante (1, en este caso) y restarla de otra ecuación. El resultado es una ecuación nueva.

La tabla 12-6 muestra la nueva solución. Recuerde que la tabla representa la solución de las ecuaciones de restricción en función del nuevo conjunto de variables de solución, X_2 y X_4. Por lo tanto, se podría reescribir la tabla 12-6 como sigue:

Tabla 12-4 Segunda solución, parcialmente completa

C_j	*Variables de solución*	*Valores de solución*	*0* X_3	*0* X_4	*6* X_1	*7* X_2
7	X_2 (nueva)	8	⅓	0	⅔	1
0	X_4 (vieja)	16	0	1	2	①
	Z_j					
	$C_j - Z_j$					

Tabla 12-5

Vieja fila X_4	–	*(Elemento de la vieja fila* X_4 *y la columna* X_2*)*	·	*Nueva fila* X_2	=	*Valores de la nueva fila* X_4
16	–	(1)	·	(8)	=	8
0	–	(1)	·	(⅓)	=	−⅓
1	–	(1)	·	(0)	=	1
2	–	(1)	·	(⅔)	=	⅔
1	–	(1)	·	(1)	=	0

Tabla 12-6 Segunda solución

C_j	*Variables de solución*	*Valores de solución*	*0* X_3	*0* X_4	*6* X_1	*7* X_2
7	X_2	8	⅓	0	⅔	1
0	X_4	8	−⅓	1	⅔	0
	Z_j	56	⅓	0	1⅓	7
	$C_j - Z_j$		−⅓	0	⅔	0

$$8 = \tfrac{1}{3}X_3 + 0X_4 + \tfrac{2}{3}X_1 + 1X_2$$
$$8 = -\tfrac{1}{3}X_3 + 1X_4 + \tfrac{4}{3}X_1 + 0X_2$$

o como:

$$X_2 = 8 - [\tfrac{1}{3}X_3 + \tfrac{2}{3}X_1]$$
$$X_4 = 8 - [-\tfrac{1}{3}X_3 + \tfrac{4}{3}X_1]$$

Con X_3 y X_1 igual a cero, la nueva solución tiene ocho unidades de producto B ($X_2 = 8$) y ocho unidades de holgura en la segunda restricción ($X_4 = 8$).

Cálculo de las Z_j. Primero se ilustrará el cálculo de los valores Z_j para la tabla 12-6, considerando la columna $X_x y Z_x$. Recuerde que los coeficientes % y V3 de la columna X_x son los coeficientes de sustitución que indican que una unidad de X, reemplazaría ahora $^2/3$ de unidad de X_2 y $^4/3$ de unidad de X_4. Como los beneficios actuales son de siete y cero dólares por unidad de X_2 y X_4, respectivamente, el **costo de oportunidad** de la introducción de una unidad de Xi es:

$$Z_1 = \tfrac{2}{3} \times 7 + \tfrac{4}{3} \times 0 = 1\tfrac{4}{3}$$

En otras palabras, nos costaría $^{14}/3$ de dólar introducir una unidad de X, en la solución. Sin embargo, X_1 tiene beneficio de seis dólares, por lo que el beneficio *neto* de una unidad de X_1 es C_1-Z_1 = 6- $^{14}/3$ = V3.

Las *Zj* para las otras columnas se calculan de manera análoga:

$$Z_3 = 7(1/3) + 0(-1/3) = 7/3$$
$$Z_4 = 7(0) + 0(1) = 0$$
$$Z_2 = 7(1) + 0(0) = 7$$

Por último, $Z_o = 7(8) + 0(8) = 56$. Esta cifra representa el beneficio asociado con la solución actual (la segunda). Es una mejoría con respecto a la solución anterior.

Cálculo de las C_1 - Z_1. Una vez que se han determinado los valores Z_1 es posible calcular las C_1 - Z_1 restando las Z_1 a los valores C_1 de la parte superior de la tabla. Por ejemplo, en la tabla 12-6, en la columna X_1, C_1 es 6, Z_1 es $^{14}/3$ y $C_1 - Z_1 = 6 - {}^{14}/3 = {}^{4}/3$. Una $C_j - Z_j$ positiva indica que se puede incluir en forma rentable cierta cantidad de una variable en la solución; un valor negativo indica que la inclusión de la variable reduciría el beneficio. Por ello, es posible mejorar aún más la solución, añadiendo el producto A (es decir, X_1), aumentando el beneficio en $^{4}/3$ = 1.33 dólares por cada unidad que se agregue.

Hay otro método para calcular directamente los valores C_v - Z_1 sin tener que calcular antes las Z_1. Recuerde que la fila C_1 - Z_1 de la tabla representa la ecuación de beneficio, así como las otras filas de la tabla representan ecuaciones de restricción. Entonces se pueden aplicar a la fila C_1 - Z_1 las mismas operaciones que se usaron con las demás filas. La tabla 12-7 es la segunda solución antes de calcular las nuevas filas Z, y C_1 - Z_1.

Lo que queremos hacer es que el coeficiente C_2 - Z_2 (encerrado en un círculo en la Tabla 12-7) sea igual a cero. El proceso para hacerlo se muestra en la tabla 12-8 y es similar a los cálculos que se efectuaron en la tabla 12-5.

Observe que son exactamente los mismos valores C_1 - Z_1 que se obtuvieron antes. Si hay muchas restricciones, este método requiere menos esfuerzo que calcular primero las Z_1.

Tercera solución

La tercera solución se calcula de la siguiente manera:

1. Variable de entrada. El mayor coeficiente positivo de la fila C_1 - Z_1 de la tabla 12-9 es $^{4}/3$, asociado con la columna X_x. Por lo tanto, X es la variable de entrada y cada unidad de X, aumentará el beneficio en 1.33 dólares.

2. *Variable de salida.* Esto se determina como sigue:

Para la fila X_2: $\frac{8}{2/3} = 12$

Tabla 12-7 Segunda solución con la vieja fila inferior

C_j	*Variables de solución*	*Valores de solución*	*0* X_3	*0* X_4	*6* X_1	*7* X_2
7	X_2 (nueva)	8	1/3	0	2/3	1
0	X_4 (nueva)	8	−1/3	1	4/3	0
	$C_j - Z_j$ (vieja)		0	0	6	⑦

Tabla 12-8

Vieja fila $C_j - Z_j$	–	*Elemento de la vieja fila* $C_j - Z_j$ *y la columna* X_2	·	*Nueva fila* X_2	=	*Valores de la nueva fila* $C_j - Z_j$
0	–	(7)	·	(1/3)	=	−7/3
0	–	(7)	·	(0)	=	0
6	–	(7)	·	(2/3)	=	4/3
7	–	(7)	·	(1)	=	0

Para la fila X_4: $\frac{8}{4/3} = 6$

Cada cantidad de la columna "Valores de solución" se divide entre la cantidad de la fila correspondiente de la columna X_y. El 6 es la cantidad menor y proviene de la fila X_4; por consiguiente, X_4 es la variable de salida.

La variable de entrada (X,) y la variable de salida (X_4) se indican con flechas en la tabla 12-9.

3. Nueva solución. El elemento pivote de la columna X_u fila X_4 (encerrado en un círculo en la tabla 12-9), tiene valor de V3. Para convertirlo en 1 se divide la vieja fila X_4 entre V3:

$$\frac{8}{4/3} = 6$$

$$\frac{-1/3}{4/3} = -1/4$$

$$\frac{1}{4/3} = 3/4$$

$$\frac{4/3}{4/3} = 1$$

$$\frac{0}{4/3} = 0$$

Tabla 12-9 Segunda solución

C_j	Variables de solución	Valores de solución	0 X_3	0 X_4	6 X_1	7 X_2
7	X_2	8	1/3	0	2/3	1
0	→ X_4	8	−1/3	1	(4/3)	0
	Z_j	56	7/3	0	14/3	7
	$C_j - Z_j$		−7/3	0	4/3	0
					↑	

Tabla 12-10 Tercera solución, parcialmente completa

C_j	Variables de solución	Valores de solución	0 X_3	0 X_4	6 X_1	7 X_2
7	X_2 (vieja)	8	1/3	0	(2/3)	1
6	X_1 (nueva)	6	−1/4	3/4	1	0
	Z_j					
	$C_j - Z_j$					

La nueva fila X_1 es **(6, -1/4, 3/4, 1, 0)** y se muestra en la tabla 12-10.

El siguiente paso es convertir en cero el valor que aparece en el círculo de la tabla 12-10. Para lograrlo se multiplica la nueva fila X_1 por % y se resta a la vieja fila X_2, como se indica en la tabla 12-11. La nueva fila X_2 es **(4, ½, -½, 0, 1),** la cual se incluye en la tabla 12-12.

El cálculo de las Z, de la Tabla 12-12 es:

$$\begin{aligned} Z_0 &= 7\ (4) + 6\ (6) = 64 \\ Z_3 &= 7\ (1/2) + 6\ (-1/4) = 2 \\ Z_4 &= 7\ (-1/2) + 6\ (3/4) = 1 \\ Z_1 &= 7\ (0) + 6\ (1) = 6 \\ Z_2 &= 7\ (1) + 6\ (0) = 7 \end{aligned}$$

Los valores C, - *Zj* se pueden calcular directamente de estos valores Z_j. También los hemos calculado con el otro método, con fines ilustrativos. Estos cálculos se muestran en la tabla 12-13 y los valores son idénticos a los que se presentan en la tabla 12-12.

Revisión de optimalidad

Examine la fila C_1 - Z_1 de la tabla 12-12. Todos los coeficientes son cero o negativos, lo cual indica que no hay ninguna variable que pueda aumentar el

Tabla 12-11

Vieja fila X_2	–	(*Elemento de la vieja fila* X_2 *y la columna* X_1	·	*Nueva fila* X_1)	=	*Valores de la nueva fila* X_2
8	–	(⅔)	·	(6)	=	4
⅓	–	(⅔)	·	(– ¼)	=	½
0	–	(⅔)	·	(¾)	=	– ½
⅔	–	(⅔)	·	(1)	=	0
1	–	(⅔)	·	(0)	=	1

Tabla 12-12 Tercera solución

C_j	*Variables de solución*	*Valores de solución*	*0* X_3	*0* X_4	*6* X_1	*7* X_2
7	X_2	4	½	– ½	0	1
6	X_1	6	– ¼	¾	1	0
	Z_j	64	2	1	6	7
	$C_j - Z_j$		– 2	– 1	0	0

beneficio si se incorpora a la solución. En consecuencia, se ha encontrado una solución óptima. La estrategia óptima es producir cuatro unidades de B y seis unidades de A (es decir, $X_f = 6$, $X_2 = 4$, como se ve en la tabla 12-12); el resultado de esta estrategia será 64 dólares de beneficio. A partir de la ecuación de beneficio, se obtiene:

$$P = \$6X_1 + \$7X_2 + 0X_3 + 0X_4 = (\$6 \cdot 6) + (\$7 \cdot 4) = \$64$$

Se satisfacen las ecuaciones de restricción:

$$\begin{aligned} 2X_1 + 3X_2 &\leq 24 \\ 12 + 12 &\leq 24 \end{aligned}$$

$$\begin{aligned} 2X_1 + X_2 &\leq 16 \\ 12 + 4 &\leq 16 \end{aligned}$$

Debe señalarse que en este problema se maximizaba una cantidad (beneficio) sujeta a restricciones, todas ellas con la forma de una suma de variables menores o iguales que una constante. Este punto es importante, ya que se modificarán algunos pasos del proceso de solución al cambiar la descripción del problema.

Tabla 12-13 Cálculo de la fila C,- - Z_1 con el método alternativo

Vieja fila $C_j - Z_j$	–	*Elemento de la vieja fila* $C_j - Z_j$ *y la columna* X_1	·	*Nueva fila* X_1	=	*Valores de la nueva fila* $C_j - Z_j$
$-\frac{7}{3}$	–	$(\frac{4}{3})$	·	$(-\frac{1}{4})$	=	-2
0	–	$(\frac{4}{3})$	·	$(\frac{3}{4})$	=	-1
$\frac{4}{3}$	–	$(\frac{4}{3})$	·	(1)	=	0
0	–	$(\frac{4}{3})$	·	(0)	=	0

Ejemplo 2: Minimización de costos

Este ejemplo es diferente del anterior en varios aspectos:

1. Se minimiza una cantidad (en vez de maximizarla).
2. Hay tres restricciones: una igualdad y dos desigualdades.

Observe que una de las desigualdades tiene la forma de una variable *mayor* o igual que una constante.

Situación. El producto final tiene la condición de que debe pesar exactamente 150 kilogramos. Las dos materias primas que se usan son A, con costo de dos dólares por unidad, y B, con costo de ocho dólares por unidad. Hay que usar por lo menos 14 unidades de B y no más de 20 unidades de A. Cada unidad de A pesa cinco kilogramos y cada unidad de B pesa 10 kilogramos.

Problema. ¿Cuánta materia de cada tipo se debe usar para fabricar una unidad de producto final si deseamos minimizar los costos?

Formulación. El primer paso es formular el problema por medio de la definición de variables y la especificación de la función objetivo y las restricciones. Sea:

X_1 = Número de unidades del producto A X_2
= Número de unidades del producto B

En el ejemplo anterior la función objetivo era una función de beneficio. En este ejemplo es la ecuación de costo:

$$C = 2X, + 8X_2$$

En vez de encontrar la combinación de $X\gamma$ y X_2 que minimice la función $2X_1 + 8X_2$, se podría resolver el problema de maximización de $P = -2X_X - \%X_2$. Ambas soluciones serían iguales, pero para ilustrar el procedimiento resolveremos el problema de minimización.

También debemos definir las ecuaciones que establecen las restricciones. Hay tres restricciones (sin contar las de no negatividad):

$5X, + 10X_2$	=150		(el peso total debe ser igual a 150 kilogramos)
X_1	<	20	(no se pueden usar más de 20 unidades de A)
X_2	^	14	(hay que usar por lo menos 14 unidades de B)
X_1	>	0	(la cantidad de A que se use no puede ser negativa)

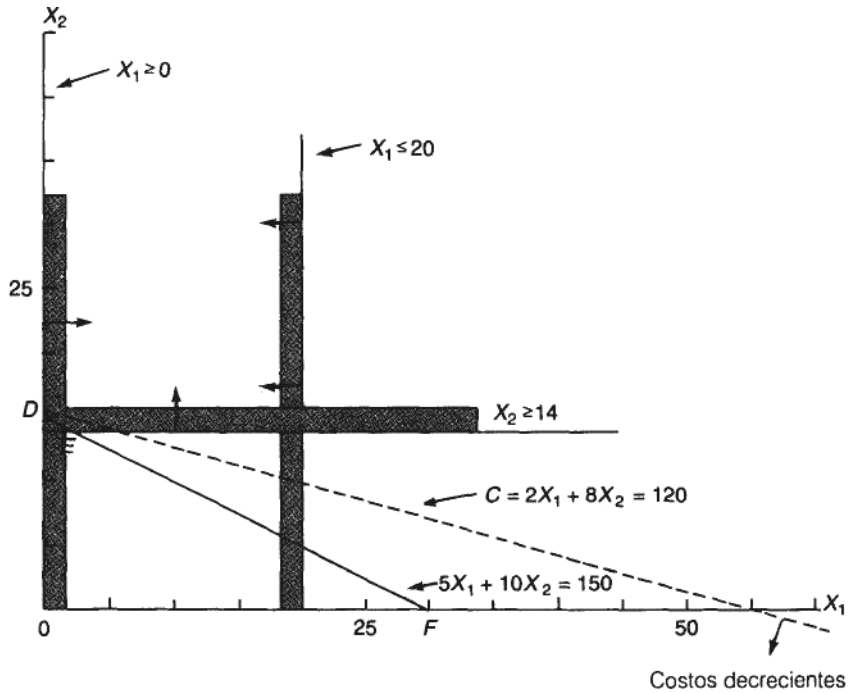
Análisis gráfico. Para fortalecer nuestra comprensión del problema, de nuevo ilustraremos, brevemente, el método gráfico (véase Fig. 12-1).

Como hay que satisfacer exactamente la ecuación $5X, + 10X_2 = 150$, la solución debe estar sobre la línea *DEF*. Además, la solución debe cumplir con las restricciones Xi > 0 y $X_2 > 14$, por lo que podemos eliminar todo excepto el segmento de línea *DE*. En realidad, sólo hay que examinar los puntos *D y E,* ya que el óptimo debe ser un vértice. Observe que la restricción Xj < 20 no es efectiva; es decir, no influye en nuestra elección del óptimo. Las limitaciones de las otras restricciones hacen innecesaria la restricción X! < 20.

La función objetivo $C = 2X, + 8X_2 = 120$ también aparece en la figura 12-1. No es el óptimo, ya que se puede desplazar la línea C = 120 hacia abajo y hacia la izquierda para reducir el costo. El costo menor se obtendrá en C = 116, que pasa por el punto óptimo *E* ($X\chi = 2, X_2 = 14$).

Ahora resolveremos el mismo problema con el procedimiento símplex.

Figura 12-1



Formulación algebraica. El primer paso, como en el ejemplo anterior, es convertir las restricciones de desigualdad en ecuaciones. Para la restricción X, < 20, se puede añadir una variable de holgura X_4, la cantidad de A no utilizada. Para la restricción $X_2 > 14$, se agrega una variable X_5 que representa el exceso o cantidad **excedente de B,** de manera que quede la ecuación $X_2 - 14 + X_5$. La otra restricción ya tiene forma de ecuación. Las ecuaciones son, entonces:

$$\begin{aligned} 5X_1 + 10X_2 &= 150 \\ X_1 + X_4 &= 20 \\ X_2 - X_5 &= 14 \end{aligned}$$

En el ejemplo anterior pudimos encontrar la primera solución básica factible seleccionando las variables de holgura como variables de solución iniciales. Esto no es posible en este ejemplo, pues no hay variable de holgura en la primera restricción y el signo de la variable de excedente de la tercera restricción es negativo.

Para resolver este problema se agregan las variables **artificiales** X_3 y X_6 a la primera y tercera restricciones, respectivamente. Estas variables artificiales pueden considerarse como las cantidades en que se violan las restricciones. Como no queremos violar las restricciones, se asigna un costo (o beneficios negativos) muy grande a las variables artificiales de la función objetivo. Con esto se garantiza que serán variables externas en la solución final y, por lo tanto, que tendrán valor cero.

Con la adición de las variables artificiales, ahora las restricciones se pueden expresar como:

$$\begin{aligned} 5X_1 + 10X_2 + X_3 &= 150 \\ X_1 + X_4 &= 20 \\ X_2 - X_5 + X_6 &= 14 \end{aligned}$$

La nueva función de costo es:

$$C = 2X_1 + 8X_2 + MX_3 + 0X_4 + 0X_5 + MX_6$$

donde M es un número muy grande.

Para comprender mejor la tabla símplex que se presenta a continuación (Tabla 12-14) se ampliarán las ecuaciones de restricción añadiendo X con coeficiente cero a cada ecuación de restricción, para que cada una tenga las variables X] a X_6:

$$\begin{aligned} 5X_1 + 10X_2 + 1X_3 + 0X_4 + 0X_5 + 0X_6 &= 150 \\ 1X_1 + 0X_2 + 0X_3 + 1X_4 + 0X_5 + 0X_6 &= 20 \\ 0X_1 + 1X_2 + 0X_3 + 0X_4 - 1X_5 + 1X_6 &= 14 \end{aligned}$$

La primera tabla símplex de este ejemplo (Tabla 12-14) se construye a partir de los coeficientes de las variables de las ecuaciones de restricción, de las constantes (150,20 y 14 en la columna "Valores de solución") y de los coeficientes de la ecuación de costo.

Tabla 12-14 Primera solución

C_j	Variables de solución	Valores de solución	M X_3	0 X_4	M X_6	2 X_1	8 X_2	0 X_5
M	X_3	150	1	0	0	5	10	0
0	X_4	20	0	1	0	1	0	0
M	$\rightarrow X_2$	14	0	0	1	0	1	−1
	Z_j	$164M$	M	0	M	$5M$	$11M$	$-M$
	$C_j - Z_j$		0	0	0	$2 - 5M$	$8 - 11M$	M
							↑	

Observe que el cálculo de Z, y $C_j - Z_j$ da como resultado una fila inferior un poco distinta de la función objetivo original. Esto se debe a la inclusión de las variables artificiales.

La primera solución básica está formada por la variable de holgura X_4 para la restricción "menor o igual que", y las variables artificiales X_3 y X_6 para las restricciones de igualdad y "mayor o igual que". Cada una de estas variables tiene un coeficiente de 1 en una fila y de 0 en las demás (revise las columnas X_3, X_4yX_6).

Variable de entrada. Como en este ejemplo se minimiza el costo, se escoge la variable con mayor valor *negativo* de la fila $C_j - Z_j$ como variable de entrada. Esta variable es la que más reducirá el costo por unidad. La variable X_2 es la ganadora, ya que 8 - 1 \M es el valor más negativo (M es muy grande).

Variable de salida. La variable de salida se determina igual que en el primer ejemplo, calculando la razón entre los valores de la columna "Valores de solución" y los coeficientes de la columna de la variable de entrada, y seleccionando la menor razón no negativa. La variable de salida es X_6, ya que $^{14}/_{1}$ es menor que $^{150}/_{10}$ y $^{20}/_{0}$ no está definido matemáticamente.

Nueva solución. El procedimiento de nueva solución es el mismo que se describió en el primer ejemplo.

Fila X_3	*Fila* X_4	*Fila* $C_j - Z_j$
$150 - (10)\cdot 14 = 10$	$20 - (0)\cdot 14 = 20$	
$1 - (10)\cdot 0 = 1$	$0 - (0)\cdot 0 = 0$	$0 - (8 - 11M)\cdot 0 = 0$
$0 - (10)\cdot 0 = 0$	$1 - (0)\cdot 0 = 1$	$0 - (8 - 11M)\cdot 0 = 0$
$0 - (10)\cdot 1 = -10$	$0 - (0)\cdot 1 = 0$	$0 - (8 - 11M)\cdot 1 = -8 + 11M$
$5 - (10)\cdot 0 = 5$	$1 - (0)\cdot 0 = 1$	$2 - 5M - (8 - 11M)\cdot 0 = 2 - 5M$
$10 - (10)\cdot 1 = 0$	$0 - (0)\cdot 1 = 0$	$8 - 11M - (8 - 11M)\cdot 0 = 0$
$0 - (10)\cdot(-1) = 10$	$0 - (0)\cdot(-1) = 0$	$M - (8 - 11M)\cdot(-1) = 8 - 10M$

1. Como ya hay un 1 en la columna X_2 de la vieja fila X_6, el elemento pivote ya es 1 y no hay que hacer nada más con esta fila excepto cambiar su nombre a X_2.
2. Los cálculos de las otras filas y la función objetivo se muestran a continuación. La segunda tabla símplex es la tabla 12-15.

Tabla 12-15 Segunda solución

C_j	Variables de solución	Valores de solución	M X_3	0 X_4	M X_6	2 X_1	8 X_2	0 X_5
M	$\rightarrow X_3$	10	1	0	−10	5	0	(10)
0	X_4	20	0	1	0	1	0	0
8	X_2	14	0	0	1	0	1	−1
	Z_j	112 + 10M	M	0	8 − 10M	5M	8	−8 + 10M
	$C_j - Z_j$		0	0	11M −8	2 − 5M	0	8 − 10M

↑

Iteraciones adicionales. La columna con mayor valor negativo (C, - *Zj)* de la tabla 12-15 es X_5 (- *10M* es un valor muy grande) y la variable de salida es X_3 (se escoge ^{io}/io, ya que ^{2O}/o no está definido matemáticamente y ^{14}/-1 no es elegible, ya que la razón es negativa).[2]

La tabla 12-16 es la tercera tabla símplex de este ejemplo. La nueva fila X_s se calcula dividiendo la vieja fila X_3 entre 10, el valor encerrado en un círculo en la columna X_5 *y* la fila X_3 de la tabla 12-15. Los cálculos de la fila X_4, la fila X_2 *y* la fila *Cj - Zj* se presentan a continuación.

Fila X_4	*Fila* X_2	*Fila* $C_j - Z_j$
20 − (0)· 1 = 20	14 − (−1)· 1 = 15	
0 − (0)· 1/10 = 0	0 − (−1)· 1/10 = 1/10	0 − (8 − 10M)· 1/10 = M − 8/10
1 − (0)· 0 = 1	0 − (−1)· 0 = 0	0 − (8 − 10M)· 0 = 0
0 − (0)· (−1) = 0	1 − (−1)· (−1) = 0	11M − 8 − (8 − 10M)· (−1) = M
1 − (0)· ½ = 1	0 − (−1)· ½ = ½	2 − 5M − (8 − 10M)· ½ = − 2
0 − (0)· 0 = 0	1 − (−1)· 0 = 1	0 − (8 − 10M)· 0 = 0
0 − (0)· 1 = 0	− 1 − (−1)· 1 = 0	8 − 10M − (8 − 10M)· 1 = 0

La columna con mayor valor negativo (C, - *Zj)* de la tabla 12-16 es X_f (X_3 es no negativo, ya que *M* es un valor muy grande). La variable de salida es X_5.

[2] En este punto podríamos ahorrar varios pasos si reemplazáramos la fila *X$* con la variable *X*. El ahorro total de usar X_x es mayor que el ahorro total al usar X_i, pero el método símplex basa su elección de la variable de entrada en los costos unitarios. Si no se desarrolla el problema no se sabe que X_i es una opción mejor; por lo tanto , el uso del método símplex siempre lleva a la solución correcta, pero no simpre por la ruta más corta.

* Observe que en este punto las variables artificiales X_i yX_6 ya no se encuentran en la solución. Podrían eliminarse de las tablas posteriores.

Tabla 12-16 Tercera solución*

C_j	Variables de solución	Valores de solución	M X_3	0 X_4	M X_6	2 X_1	8 X_2	0 X_5
0	$\rightarrow X_5$	1	1/10	0	−1	1/2	0	1
0	X_4	20	0	1	0	1	0	0
8	X_2	15	1/10	0	0	1/2	1	0
	Z_j	120	8/10	0	0	4	8	0
	$C_j - Z_j$		$M - 8/10$	0	M	−2	0	0
						↑		

Tabla 12-17 Cuarta solución

C_j	Variables de solución	Valores de solución	M X_3	0 X_4	M X_6	2 X_1	8 X_2	0 X_5
2	X_1	2	2/10	0	−2	1	0	2
0	X_4	18	−1/5	1	2	0	0	−2
8	X_2	14	0	0	1	0	1	−1
	Z_j	116	4/10	0	4	2	8	−4
	$C_j - Z_j$		$M - 4/10$	0	$M - 4$	0	0	4

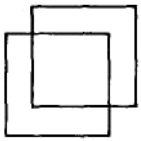
La tabla 12-17 es la cuarta tabla símplex de este ejemplo. La nueva fila X! es (2,^{2}/io, 0, -2,1,0,2), es decir, dos veces la vieja fila X_5. A continuación se muestran los cálculos de las filas X_A, X_2 y C_i - Zj.

Fila X_4			*Fila X_2*			*Fila $C_j - Z_j$*			
20 − (1)·	2 =	18	15 − (1/2)·	2 =	14				
0 − (1)·	2/10 =	−1/5	1/10 − (1/2)·	2/10 =	0	$M - 8/10$	− (−2)·	2/10 =	$M - 4/10$
1 − (1)·	0 =	1	0 − (1/2)·	0 =	0	0	− (−2)·	0 =	0
0 − (1)· (−2) =		2	0 − (1/2)· (−2) =		1	M	− (−2)· (−2) =		$M - 4$
1 − (1)·	1 =	0	1/2 − (1/2)·	1 =	0	−2	− (−2)·	1 =	0
0 − (1)·	0 =	0	1 − (1/2)·	0 =	1	0	− (−2)·	0 =	0
0 − (1)·	2 =	−2	0 − (1/2)·	2 =	−1	0	− (−2)·	2 =	4

Con la tabla 12-17 hemos llegado a una solución óptima, ya que todos los valores de la fila C, - Z_i son positivos o cero.

La solución óptima consiste en usar dos unidades (10 kilogramos) de A y 14 unidades (140 kilogramos) de B. Esta combinación tiene un costo de 116 dólares, la combinación de menor costo posible de materias primas consistente con las restricciones. El producto final pesa 150 kilogramos; hay dos unidades de X! < 20, 14 unidades de X_2 £ 14; por lo tanto se satisfacen las restricciones. Aunque fue más fácil resolver este problema con el análisis gráfico, si el problema fuera más complicado (por ejemplo, 30 materias primas y 20 restricciones), tendríamos que usar el método símplex por computador para obtener una solución óptima.

RESUMEN Resumen del procedimiento símplex:



1. Modificar las restricciones:

   Añadir una variable de holgura para cada restricción del tipo "menor o igual".
   Agregar una variable artificial para cada restricción de igualdad.
   Añadir una variable artificial y una de excedente para cada restricción del tipo "mayor o igual". Asignar, a cada variable artificial, un costo muy grande (beneficios negativos) en la función objetivo.

2. Identificar la solución inicial compuesta por las variables artificiales y de holgura.

3. Revisar si es óptima. La solución actual es óptima si:

   En el caso de maximización, todos los coeficientes de la fila C, - Z, son cero o negativos. En el caso de minimización, todos los coeficientes de la fila C_v - Z, son cero o positivos. Si se ha llegado a una solución óptima se detiene el procedimiento símplex.

4. Variable de entrada. Es la variable asociada con el mayor coeficiente positivo (para maximización) o negativo (para minimización) de la fila $C_j - Z_j$.

5. Variable de salida. Calcular, para cada fila, la razón de los valores de la columna "Valores de solución" divididos entre los coeficientes de la columna de la variable de entrada. Omita las razones negativas. La variable de salida será la que corresponda a la fila que tiene la menor razón.

6. Resolver de nuevo la ecuación, como sigue:

   a. Identificar el elemento pivote como el coeficiente de la columna de la variable de entrada y la fila de la variable de salida.
   b. Dividir todos los coeficientes de la fila de la variable de salida entre el elemento pivote.
   c. Modificar todas las otras filas, posiblemente incluyendo la fila de función objetivo, de la siguiente manera:

$$\begin{pmatrix}\text{Nueva}\\ \text{fila}\end{pmatrix} = \begin{pmatrix}\text{Vieja}\\ \text{fila}\end{pmatrix} - \begin{pmatrix}\text{Coeficiente de la fila de la}\\ \text{columna de la variable que entran}\end{pmatrix} \cdot \begin{pmatrix}\text{Fila obtenida}\\ \text{en el paso 6(}b\text{)}\end{pmatrix}$$

Tabla 12-18 Tabla 12-16 modificada

C_j	Variables de solución	Valores de solución	M X_3	0 X_4	M X_6	-16 X_1	8 X_2	0 X_5
0	X_5	1	1/10	0	−1	−½	0	1
0	X_4	20	0	1	0	−1	0	0
8	X_2	15	1/10	0	0	−½	1	0
	Z_j	120	8/10	0	0	−4	8	0
	$C_j - Z_j$		M − 8/10	0	M	−12	0	0

7.* Calcular las *Zj*. Para la columna y": para cada fila, multiplique los coeficientes de sustitución por el valor de C_i para esa fila y luego sume. El total es *Zj*. Repita este paso para todas las columnas.
8.* Calcular las C_i - Z_i. Reste los valores Z_i a los coeficientes de la función objetivo original *(CJ)* de la parte superior de la tabla.
9. Regrese al paso 3.

Situaciones especiales

A continuación presentaremos algunas situaciones poco comunes que pueden causar algunas confusiones. Cada situación se presentará con un ejemplo.

Ejemplo 3: Problema con solución infinita

En algunos casos es posible que un problema de programación lineal no tenga una solución finita. Por ejemplo, suponga que la tercera tabla símplex del ejemplo 2 (Tabla 12-16), aparece como se muestra en la tabla 12-18.

La variable X_x es la de entrada. La columna X_x se ha cambiado para que todos sus coeficientes sean negativos, no sólo (C, - *ZJ)* (como sucedió en la Tabla 12-16). En esta situación no hay una solución óptima finita. Si se maximizaran los beneficios se presentaría una situación análoga si el total *(C_i - ZJ)* fuera positivo y todos los coeficientes de la columna fueran negativos.

La (C, - *Zj)* negativa de la tabla 12-18 indica que se ahorran 12 dólares de costos por cada unidad de X, que se introduzca en la solución. Sin embargo, los coeficientes negativos de *-V2,* -1 y *-V2* indican que por cada unidad de X_x que se introduzca en la solución, digamos como sustituto de X_5, aumentará la capacidad de introducir unidades adicionales. Entonces, la acción deseable sería continuar añadiendo unidades de X_x. Cuanto más X_x se use, más bajos son los costos; el problema no tiene una solución óptima finita, ya que no hay restricción para X_x.

Si surge la situación anterior, lo más probable es que se deba a una restricción mal planteada o a datos incorrectos. Las situaciones empresariales correctamente

* No hay que efectuar estos pasos si se calculó la fila C_i - Z_i en el paso 6 (c).

Tabla 12-19 Segunda modificación de la tabla 12-16

C_j	Variables de solución	Valores de solución	0 X_4	4 X_1	8 X_2	0 X_5
0	X_5	1	0	½	0	1
0	X_4	20	1	1	0	0
8	X_2	15	0	½	1	0
	Z_j	120	0	4	8	0
	$C_j - Z_j$		0	0	0	0

descritas, pocas veces darán como resultado una solución infinita como la que se acaba de presentar.

Ejemplo 4: Soluciones múltiples

Un problema de programación lineal puede tener más de una solución óptima. En este caso, dos (o más) soluciones básicas[3] tendrán el mismo beneficio (o costo).

Modifiquemos de nuevo el problema del ejemplo 2 para ilustrar esta situación. Suponga que el costo unitario de la materia prima A es cuatro dólares, en lugar de dos dólares. Entonces, la tabla 12-16 (con la modificación y excluyendo las variables artificiales X3 y *X(,)* aparecería como se muestra en la tabla 12-19.

Ninguno de los valores *Cj - Z¡* es negativo, lo cual indica que se ha llegado a una solución óptima. Pero debe observarse que la variable X_j no es una variable de solución y que C_j - Z, = 0. Esto indica que la variable X, se puede incorporar a la solución sin aumentar o reducir el costo. Si se incorpora, el resultado es el mismo que se presentó en la tabla 12-17 (excepto que el costo total es de 120 dólares, ya que X\ ahora cuesta cuatro dólares por unidad). Las dos soluciones son:

	Solución 1	*Solución 2*
Materia prima A	**0**	**2**
Materia prima B	**15**	**14**
Costo Total	$120	$120

Degeneración

Recuerde que la solución básica de un problema de programación lineal con *m* restricciones supone la selección de *m* variables de solución y luego la asignación del valor cero a las variables restantes. Por lo general, al resolver las ecuaciones, las variables de solución escogidas tendrán valores positivos (distintos de cero). No obstante, puede suceder que una o más de las variables de solución sean cero.

[3] Además, cualquier combinación convexa de estos vértices es una solución óptima.

Esta situación es una degeneración. Se dice que hay **degeneración** cuando hay menos de m variables de solución distintas de cero para *m* ecuaciones de restricción, e indica que por lo menos una de las ecuaciones de restricción es redundante para la solución dada.

La degeneración se presenta cuando se unen dos variables o más en la selección de la variable de salida durante el procedimiento símplex. La degeneración es un problema potencial, ya que en teoría es posible que el procedimiento símplex produzca ciclos y regrese a soluciones anteriores, sin llegar nunca a la óptima. En la práctica pocas veces se presenta este ciclo y los programas de computación casi nunca tienen dificultades para llegar a la solución óptima incluso si hay degeneración. Durante la ejecución manual del procedimiento símplex, si hay un empate en la definición de la variable de salida, escoja cualquiera en forma arbitraria. Si se presenta un ciclo y reaparece una solución en las tablas, regrese al punto en el cual se presentó el empate y seleccione otra de las variables.

La degeneración también causa otros problemas en la interpretación de los resultados de programación lineal (véase el apéndice del capítulo 11 para conocer más al respecto).

Ejemplo 5: No hay solución factible

Es posible que las ecuaciones de restricción no sean consistentes con las soluciones factibles. Por ejemplo, suponga que se tiene:

$$4X_1 + 2X_2 \leq 10$$
$$X_2 \geq 6$$
$$X_1 \geq 0$$

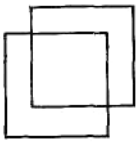
No hay valores de X, y X_2 que cumplan las tres restricciones.

En este ejemplo es obvio que las restricciones son contradictorias y que no hay una solución factible. Por ello no es tan evidente en un problema más complicado.

La falta de una solución factible se puede detectar en la tabla símplex. En algún punto de este procedimiento se presenta una solución que parece ser el óptimo (todos los coeficientes de la fila $C_j - Z_j$ son no positivos en una maximización, o no negativos en una minimización). Sin embargo, una de las variables de solución es artificial. Los programas de computación se detendrían en este punto y presentarían un mensaje que señala la inexistencia de una solución factible.

En una situación empresarial, la inexistencia de una solución factible generalmente indica un error en la formulación del problema o durante el registro de datos. Si usted aplica algunos de los ejercicios de este libro en un computador y encuentra el mensaje "no hay solución factible", debe revisar su formulación y sus datos.

RESUMEN



Algunas situaciones especiales que ocurren al resolver problemas de programación lineal son:

- Soluciones infinitas, en las cuales no hay límite para una variable de entrada y por lo tanto hay rentabilidad ilimitada.

- Inexistencia de una solución factible, cuando las condiciones son tan restrictivas que no hay manera de satisfacerlas.

Ambas situaciones se pueden detectar durante el procedimiento símplex. En la mayoría de los casos la causa es la formulación inadecuada del problema o los datos incorrectos.

Los problemas de programación lineal pueden tener soluciones múltiples. Esta situación se indica cuando una de las variables externas tiene valor $C_v - Z_j$ igual a cero en la solución óptima.

La degeneración se presenta cuando por lo menos una de las variables de solución es igual a cero.

Análisis de sensibilidad

Los modelos de programación lineal no sólo ofrecen a los gerentes una solución óptima, sino también una amplia gama de información que puede proporcionar conocimiento adiciona] acerca del problema que se resuelve. A este análisis se le llama **análisis de sensibilidad** y se estudió con detalle en el capítulo 11. Volvemos a tocar este tema para mostrar cómo se obtiene la información del procedimiento símplex.

Interpretación económica de los valores *Cj - Zj*

Considere primero la interpretación económica de los valores $C_j - Z_j$, la fila inferior de la tabla símplex. Recuerde que Z_j es el costo de oportunidad de la introducción de una unidad de la variable *j* en la solución, o sea, el costo de sustituir otras variables de solución. C_j representa el beneficio por unidad; entonces, $C_j - Z_j$ equivale al beneficio neto (beneficio menos costo de oportunidad) que se obtiene de la introducción de una unidad de y en la solución.

Como muestra, regresemos al ejemplo 1 de este capítulo, un problema con dos productos y restricciones acerca del tiempo disponible en dos máquinas. La situación final se presenta en la tabla 12-12 y se ha reproducido en la tabla 12-20. Considere primero el valor C, - Z_j asociado con una *variable de holgura,* como sería X_3 en la tabla 12-20. La variable X_3 es la variable de holgura que se relaciona con la primera restricción: el límite del tiempo disponible en la máquina 1. En la solución óptima de la tabla 12-20, $C_j - Z_j$ tiene valor de -2, lo cual indica que la introducción de una unidad de X_3 (es decir, una hora de holgura) en la solución reducirá el beneficio en dos dólares. Observe que la introducción de una unidad de holgura en la solución equivale a reducir en una hora la capacidad de la máquina 1. Por lo tanto, los valores $C_j - Z_j$ de las variables de holgura se pueden considerar como los *valores marginales* asociados con los cambios en la capacidad de la restricción. En el capítulo anterior llamamos **precios duales** a estos valores marginales. Observe que los valores *Cj - Zj* de la tabla 12-20 son exactamente iguales (con excepción del signo) a los precios duales

Tabla 12-20 Tabla final del ejemplo 1

C_j	Variables de solución	Valores de solución	0 X_3	0 X_4	6 X_1	7 X_2
7	X_2	4	½	−½	0	1
6	X_1	6	−¼	¾	1	0
	Z_j	64	2	1	6	7
	$C_j - Z_j$		−2	−1	0	0

que se obtuvieron en forma gráfica y en los resultados del programa de computación del capítulo II.[4]

Cuando no se incluye una variable de decisión en la solución óptima, el valor de *Cj - Zj* representa el costo de introducir una unidad en la solución. El término **costo reducido** se utilizó en el capítulo 11 para designar este costo.

Intervalos del término independiente

La interpretación del precio dual de X_3 en la tabla 12-20 es que una hora adicional en la máquina 1 valdría dos dólares. Nos podríamos preguntar lo siguiente: Si compráramos horas adicionales para la máquina 1 a menos de dos dólares, ¿podríamos aumentar nuestros beneficios indefinidamente añadiendo más horas?

La respuesta a esta pregunta se puede obtener examinando la columna X_3 de la tabla 12-20. Recuerde el significado de los coeficientes de la tabla; si introducimos una unidad de X_3, ésta reemplazaría *Vz* unidad de X_2 *y* -'/» de unidad de X! **(es** decir, en realidad se agregaría '/t de unidad de X_t).

Entonces, es posible responder la pregunta anterior si se considera cuánto puede cambiar X_3 antes de que ocurra una variación en la solución.

Si se introduce una X_3 *positiva* en la solución, la interpretación es que habrá horas de *holgura* adicionales en la máquina 1 y, por lo tanto, se *reduce* la cantidad de horas que se usarán para la producción. El proceso de introducir X_3 en la tabla es lo mismo que efectuar una iteración del procedimiento símplex con X_3 como variable de entrada. Se divide la columna "Valores de solución" entre la cantidad localizada en la fila correspondiente de la columna X_3. El menor número no negativo que se obtenga representa la cantidad de unidades de X_3 que pueden entrar. En el ejemplo:

[4] El análisis gráfico y la solución de computador del capítulo 11 se efectuaron con una versión modificada del ejemplo 1, en la cual se incluyó una restricción adicional para la demanda del producto B. Por ello los resultados del análisis de sensibilidad efectuado en este capitulo no son totalmente comparables.

	Valores de solución	X_3	$\left(\frac{\text{Valores de solución}}{X_3}\right)$
X_2	4	½	8
X_1	6	−¼	−24

Aquí, la fila X_2 es la única con valor positivo y por lo tanto es también el menor valor no negativo. Esto quiere decir que se pueden introducir ocho unidades de X_3 antes de que la variable X_2 salga de la solución. En términos del problema, significa que se puede recortar un máximo de ocho horas de las disponibles en la máquina 1 antes de que se detenga la producción de A.

También se puede considerar la adición de una Xj negativa, lo cual equivale a tener más horas disponibles en la máquina 1. Para considerar la introducción de una X_3 negativa en la tabla, se puede proceder igual que antes, pero hay que multiplicar todos los valores de la columna X_3 por -1 antes de continuar con el siguiente paso del procedimiento símplex. Entonces, se tendría:

	Valores de solución	$(-1)X_3$	$\left(\frac{\text{Valores de solución}}{(-1)X_3}\right)$
X_2	4	−½	−8
X_1	6	¼	24

Como antes, el menor valor no negativo determina cuántas unidades de X_3 negativa se pueden introducir. En este caso es 24; después de añadir 24 horas (es decir, X_3 negativa) en la máquina 1, la variable X, se convierte en cero y sale de la solución.

Los dos pasos se pueden combinar en uno solo. Observe las razones entre la columna "Valores de solución" y la columna de la variable de holgura. El menor valor no negativo determina la cantidad de la reducción; la menor razón no positiva (la más cercana a cero) determina la cantidad del aumento.[5]

Hemos obtenido un intervalo de valores relativos a la cantidad de tiempo disponible en la máquina 1. Comenzamos con 24 horas disponibles y después se encontró que se podían quitar ocho horas o agregar 24 antes de que cambiara la composición de la solución. Por lo tanto, hay un intervalo de 16 a 48 para las horas disponibles en la máquina 1, más allá del cual no cambia la composición de la solución básica. Recuerde que el precio dual de una hora marginal de la máquina 1 era de dos dólares (el valor C_j - Z, de la tabla 12-20). Este valor se mantiene en el intervalo que se acaba de determinar. En resumen, el tiempo de la máquina 1

[5] Para esta regla se considera positiva una razón de cero dividido entre un número positivo, y negativa una de cero dividido entre un número negativo.

tiene un valor de dos dólares por hora en un intervalo de 16 a 48 horas disponibles (suponiendo que las horas de la máquina 2 se quedan fijas en 16).

Observe que el intervalo de 16 a 48 es aquel en el cual la *composición* de la solución no cambia. Es decir, no varía la *lista de variables de solución*. Los *valores* de solución cambiarán al haber más o menos tiempo disponible en la máquina 1. Además, los beneficios totales cambiarán a razón de dos dólares por hora (el valor marginal de X_3) con los incrementos en el tiempo de la máquina 1.

El mismo tipo de análisis se puede aplicar al tiempo disponible en la máquina 2. La variable de holgura relacionada con la máquina 2 es X_4 . Observe las razones entre la columna "Valores de solución" y la columna de la variable de holgura para X_4.

	Valores de solución	X_4	$\left(\frac{\text{Valores de solución}}{X_4}\right)$
X_2	4	$-\frac{1}{2}$	-8
X_1	6	$\frac{1}{4}$	8

Como se señaló antes, el menor valor no negativo determina la cantidad de la reducción; la menor (en el sentido de estar más cerca de cero) razón no positiva determina el aumento. La máquina 2 tiene 16 horas disponibles y tanto el aumento como la reducción en este caso son de 8 o un intervalo de 8 a 24 horas.

En la tabla 12-21 se presenta un resumen de estos resultados.

En algunos casos no se usa toda la capacidad disponible de una restricción y la variable de holgura tendrá un valor positivo en la solución. En estos casos el precio dual es cero; no se usa toda la capacidad disponible, por lo que no tiene valor la capacidad adicional. En esta situación no hay un límite superior para el intervalo en el cual se mantiene el precio dual. Sin embargo, ¿cuánto se podría reducir la capacidad antes de que cambiara la solución? La respuesta es sencilla: si hay, por ejemplo, ocho horas de holgura para una restricción, la capacidad se puede reducir ocho horas antes de que sea necesario cambiar la solución.

Tabla 12-21 Análisis de sensibilidad para el primer ejemplo: Intervalos del termino independiente

Recurso	*Restricción original del recurso (horas-máquina disponibles)*	*Precio dual*	*Intervalo en el cual es válido el precio dual*	
			Límite inferior	*Límite superior*
Máquina 1	24	\$2	16	48
Máquina 2	16	\$1	8	24

Cambios en los precios

Otra preocupación de los gerentes es la sensibilidad de la solución de programación lineal ante los cambios en los precios, es decir, ante los cambios en los beneficios (o costos) por unidad de las variables de la función objetivo.

En el caso de variables que no se encuentran en la solución es bastante fácil determinar esta sensibilidad. Recuerde que Z_v mide el costo de oportunidad de la introducción de una unidad de la variable en la solución. Si la variable no se encuentra en la solución óptima, su rentabilidad *(Cj)* no es tan grande como el costo de oportunidad Z_v. En otras palabras, $C_j - Z_j$ es negativo.[6] Para entrar en la solución, el beneficio debe exceder Zy. Éste es el límite superior antes de que ocurra un cambio. Por otra parte, como la variable no es suficientemente rentable para estar en la solución, cualquier reducción en el beneficio por unidad no cambiará su estado.

En resumen, los intervalos de precios para una variable que no se encuentra en la solución óptima son:

Limite inferior	*Valor actual*	*Límite superior*
Ninguno	C,	Z,

Dentro de estos límites no varía la solución óptima.

En el caso de variables que ya están en la solución, no es tan sencillo determinar la sensibilidad ante los cambios en los beneficios unitarios. El *dual* de un problema de programación lineal es un problema complementario cuyos detalles se explican en el apéndice de este capítulo. El mismo tipo de análisis que se usó para determinar los intervalos del término independiente se puede emplear en el problema dual para determinar los intervalos de los coeficientes de beneficios.

Considere la variable X,, que tenía precio original de seis dólares y es una variable de solución. Dividimos los coeficientes de la fila C, - Z_j de la tabla 12-20 entre los de la fila X_f. Esto equivale al problema dual de la división de la columna "Valores de solución" entre la columna de la variable de holgura que se usó para los intervalos del término independiente. Entonces, la menor razón no negativa determina la cantidad del aumento en el precio y la menor razón no positiva (más cercana a cero) determina la reducción en el precio[7] (excluya la columna $X\chi$ de estos cálculos).

---

[6] Esto se aplica al maximizar. Tratándose de una minimización, la variable entrará en la solución si el costo es menor que Z_j.

[7] Obsérvese que la asociación entre una razón no positiva y una reducción y entre una razón no negativa y un aumento , es lo opuesto a lo que se usó para los intervalos del término independiente. Esto se debe a la manera en que hemos establecido la fila $C_j - Z_j$ en las tablas.

	X_3	X_4	X_2
Fila $C_j - Z_j$	−2	−1	0
Fila X_1	−¼	¾	1
Razón fila $(C_j - Z_j)$/fila X_1	8	−4/3	0

Por lo tanto, el posible aumento en el beneficio es de ocho dólares y la reducción es de 1.33 dólares para la variable X,. En otras palabras, el cambio en el beneficio por unidad puede variar entre 4.67 dólares (es decir, $6 - $1.33) y 14 dólares (o sea, $6 + $8) sin que ocurran cambios en la solución.

Se puede efectuar un análisis similar para la variable X_2. Los resultados se resumen en la tabla 12-22.

Recuerde que la solución del problema estipulaba la producción de seis unidades de X, y cuatro de X_2. La tabla 12-22 indica que esta solución no variará a menos que el beneficio de una unidad de X_λ sea menor que 4.67 dólares o ascienda a más de 14 dólares. Además, la solución no variará si el beneficio por unidad de X_2 no es menor que tres dólares ni mayor que nueve. La composición y los valores de solución no cambian dentro de los intervalos especificados por los valores de la función objetivo. Sin embargo, los beneficios totales varían cuando cambia el beneficio por unidad (valores individuales).

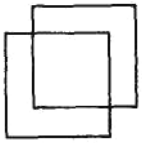
El tipo de información que contiene el análisis de sensibilidad es muy valioso para la gerencia. Las C_i generalmente están sujetas a variaciones esporádicas. Si el cambio cae dentro del intervalo determinado por el análisis de sensibilidad, no hay efecto en la solución óptima. Si el cambio cae fuera del intervalo, se requiere una nueva solución y debe resolverse de nuevo el problema de programación.

El problema de programación lineal se plantea como un problema de decisión en condiciones de certidumbre y son pocos los problemas reales que tienen esta característica. En la mayoría de los casos se desconocen muchos factores y deben estimarse de la mejor manera posible. El análisis de sensibilidad ayuda a ver en qué intervalos la solución está o no está sujeta a cambios; de esta manera, representa un auxiliar importante para la interpretación de la solución del problema de programación lineal.

Tabla 12-22 Análisis de sensibilidad para el primer ejemplo: Intervalos de coeficientes de la función objetivo

		Intervalo	
Precio	***Valor original***	***Límite inferior***	***Límite superior***
Precio de Xj	$6	$4.67	$14
Precio de X_2	7	3	9

RESUMEN



El análisis de sensibilidad determina el intervalo en el cual un factor puede variar sin alterar la composición de la solución o los precios duales. Suponga que hacemos una maximización.

Para los intervalos de las constantes del término independiente:

1. Identifique la variable de holgura asociada con la restricción dada.
2. Divida la columna "Valores de solución" de la tabla final entre la columna de la variable de holgura.
3. El límite de la reducción es la menor razón no negativa que se determine en (2).
4. El valor absoluto de la menor razón no positiva (más cercana a cero) que se calculó en (2) es el límite del aumento.

Para los intervalos de coeficientes de la función objetivo: Si la variable es de solución, entonces:

1. Identifique la fila relacionada con la variable de la tabla final. Omita la columna asociada con la variable.
2. Divida la fila C_j - Z, entre la fila de (1).
3. La menor razón no negativa que se calcule en (2) es el límite del aumento.
4. El valor absoluto de la menor razón no positiva (más cercana a cero) calculada en (2) es el límite de la reducción.

Si la variable no es de solución, el límite del aumento es $Z_j - C_j$ y no hay límite para la reducción.

Ejemplo integral

Los ejemplos anteriores de este capítulo han comprendido sólo dos dimensiones. Para ilustrar la formulación y la solución símplex de un problema de programación lineal con varias dimensiones se proporciona el siguiente ejemplo.

Una empresa de manufactura fabrica un equipo que utiliza varios componentes. La empresa lleva a cabo el montaje y las pruebas de la unidad completa, pero no tiene la capacidad, el personal técnico ni los fondos suficientes para producir todos los componentes en sus propias plantas. Por lo tanto, debe comprar varios componentes a proveedores externos. En la tabla 12-24, de la página 381, se muestran siete de estos componentes y sus requerimientos.

A partir de la tabla 12-24 se puede ver que las partes requieren distintas cantidades de recursos y tienen costos de adquisición diferentes. La pregunta es: ¿Cuáles de estos componentes (y cuántas unidades) deben fabricarse internamente y cuáles deben comprarse fuera?

Esta situación se puede expresar como un problema de programación lineal en el cual se maximicen los ahorros de la manufactura interna, sujeto a restricciones de capacidad, personal y fondos. Supongamos que se cuenta con los recursos de

Tabla 12-23 Recursos disponibles

Horas de maquinado	90
Horas de montaje	97
Horas de pruebas	200
Horas de supervisión de ingeniería	150
Efectivo disponible	$250

la tabla 12-23. Entonces, se puede formular el problema de programación lineal como sigue:

Maximizar:

$$P = 50X_1 + 100X_2 + 100X_3 + 50X_4 + 150X_5 + 100X_6 + 60X_7$$

donde X_j es la cantidad del ¿ésimo componente que se fabrique internamente y los coeficientes son los ahorros adicionales por unidad (costo de compra menos costo variable).

Sujeto a:

$$\begin{aligned}
5X_1 + 2X_2 + X_3 + 3X_4 + X_5 + 0X_6 + 2X_7 &\leq 90 \\
X_1 + X_2 + 4X_3 + 0X_4 + 5X_5 + 2X_6 + X_7 &\leq 97 \\
0X_1 + 0X_2 + 2X_3 + 3X_4 + 2X_5 + 2X_6 + X_7 &\leq 200 \\
X_1 + X_2 + 3X_3 + 2X_4 + 2X_5 + 3X_6 + X_7 &\leq 150 \\
3X_1 + 5X_2 + X_3 + X_4 + 2X_5 + 2X_6 + 4X_7 &\leq 250
\end{aligned}$$

y:

$$\begin{aligned}
X_1 &\leq 10 \qquad X_5 \leq 10 \\
X_2 &\leq 5 \qquad X_6 \leq 5 \\
X_3 &\leq 50 \qquad X_7 \leq 20 \\
X_4 &\leq 25 \qquad \text{y toda } X_j \geq 0,\ j = 1, 2, \ldots, 7
\end{aligned}$$

La tabla símplex inicial se presenta en la tabla 12-25, incluyendo las variables de holgura X_8 a X_{19}.

Observe que hay 12 ecuaciones de restricción, por lo que la parte principal de la tabla 12-25 tiene 12 filas. La solución inicial se presenta utilizando las variables de holgura e indica que no se fabrica nada internamente y todos los requerimientos se compran a proveedores externos. Por supuesto, no es la solución óptima y produce un ahorro de cero.

Ahora se puede aplicar el método símplex a la tabla 12-25. La variable de entrada es X_5 y la de salida es X_{17}. No pretendemos llevar este problema por todos los pasos del procedimiento símplex, ya que lo único que queremos es ilustrar la formulación del problema. No obstante, en la tabla 12-26 se muestra la tabla símplex final. La solución produce un ahorro de 4450 dólares. En la tabla 12-27 se indica el significado de las variables de solución.

Para las variables de holgura correspondientes a las restricciones de recursos se tiene:

Tabla 12-24

Número de componente	*Designación de variable*	*Horas de maquinado requeridas*	*Horas de montaje requeridas*	*Horas de pruebas requeridas*	*Supervisión de ingeniería requerida*	*Fondos de capital de trabajo requeridos*	*Número total de unidades requeridas*	*Precio fijado por el fabricante externo*	*Costo variable de materiales, fuerza de trabajo directa, etcétera*
182	X_1	5	1	0	1	3	10	$100	$ 50
184	X_2	2	1	0	1	5	5	150	50
193	X_3	1	4	2	3	1	50	200	100
197	X_4	3	0	3	2	1	25	100	50
284	X_5	1	5	2	2	2	10	250	100
629	X_6	0	2	2	3	2	5	200	100
845	X_7	2	1	1	1	4	20	100	40

Variable de holgura		*Cantidad*	*Significado*
X_8	=	0	Todas las horas de máquina se usan (es decir, holgura = 0).
X_9	=	0	Todas las horas de montaje se usan.
X_{10}	=	117	No se usan 117 horas de pruebas.
X_{11}	=	63	No se usan 63 horas de supervisión de ingeniería.
X_{12}	=	103	No se usan 103 dólares de capital de trabajo.

Precios duales y costos **reducidos**

La fila inferior (C_j - Z_j) de la tabla 12-26 presenta los precios duales asociados con las restricciones (es decir, con las variables de holgura) y los costos reducidos relacionados con las variables de decisión. Las variables X_8 a X_{12} son las variables de holgura que se relacionan con las restricciones de recursos (horas de capacidad, personal y fondos). Cuando estas variables de holgura tienen precio dual nulo (como es el caso de X_{10}, X_{11} y X_{12}), no se pueden aumentar los beneficios por medio de la obtención de más recursos. Los recursos no se utilizan por completo en la solución óptima (por ejemplo, hay X_{10} =117 horas de prueba no utilizadas). Por otra parte, los precios duales que se relacionan con X_8 y X_9 indican el aumento en los beneficios que se obtiene de contar con una unidad más de estos recursos. Por ejemplo, los beneficios podrían aumentar casi en 21 dólares si se cuenta con una hora más de tiempo de montaje (o sea, $C_9 - Z_9$ = -20%). Los beneficios disminuirían $20^5/_6$ dólares si se reduce una unidad de tiempo de montaje.

Tabla 12-25 Solución inicial

C_j		*Variables de solución*	*Valores de solución*	*0* X_8	*0* X_9	*0* X_{10}	*0* X_{11}	*0* X_{12}	*0* X_{13}	*0* X_{14}	*0* X_{15}
0		X_8	90	1							
0		X_9	97		1						
0		X_{10}	200			1					
0		X_{11}	150				1				
0		X_{12}	250					1			
0		X_{13}	10						1		
0		X_{14}	5							1	
0		X_{15}	50								1
0		X_{16}	25								
0	→	X_{17}	10								
0		X_{18}	5								
0		X_{19}	20								
		Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0
		$C_j - Z_j$		0	0	0	0	0	0	0	0

Las variables X_{13} a X_{19} son las variables de holgura asociadas con los límites superiores de los requerimientos de producción. Los precios duales representan los ahorros adicionales (de la manufactura interna) si los requerimientos aumentan en una unidad. Si, por ejemplo, se requiere una unidad más del componente 284 (X_5), los ahorros de la manufactura interna aumentarán en 29.16 dólares (la variable de holgura para el componente 284 es X_{17} y $C_{17} - Z_{17} = -29^1/_6$). Por el contrario, si se necesitaran sólo nueve unidades del componente 284, en lugar de diez, entonces los ahorros por la manufactura interna bajarían 29.16 dólares. Si todas las unidades requeridas de un componente se fabrican fuera y aumentan las necesidades de este componente, sólo aumentará el número de unidades que se compran fuera de la empresa, sin afectar los ahorros de la manufactura interna. Además, los requerimientos de un componente pueden disminuir sin afectar los ahorros (únicamente se reduciría la cantidad que se compra fuera de la empresa). En el ejemplo, X_4, el componente 197, requiere 25 unidades y, de éstas, sólo nueve se producirán internamente y $C_{16} - Z_{16} = 0$. Los ahorros, como se miden en el modelo de programación lineal, no se verían afectados por un cambio pequeño en las necesidades de X_4.

Los valores $C_j - Z_j$ para X_1 a X_7 son los costos reducidos e indican la pérdida de oportunidad si hay que incluir en la solución una unidad de un componente. Las pérdidas de oportunidad son cero para X_2 a X_7 y cada una de estas variables está en la solución. $C_1 - Z_1 = -54^1/_6$ indica que la gerencia reduciría en esta cantidad su beneficio si tiene que producir internamente una unidad de X_1 (componente 182).

0 X_{16}	*0* X_{17}	*0* X_{18}	*0* X_{19}	*50* X_1	*100* X_2	*100* X_3	*50* X_4	*150* X_5	*100* X_6	*60* X_7
				5	2	1	3	1		2
				1	1	4		5	2	1
						2	3	2	2	1
				1	1	3	2	2	3	1
				3	5	1	1	2	2	4
					1					
					1					
						1				
1							1			
	1							1		
		1							1	
			1							1
0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
0	0	0	0	50	100	100	50	150	100	60
								↑		

Tabla 12-26 Solución final

C_j	Variables de solución	Valores de solución	0 X_8	0 X_9	0 X_{10}	0 X_{11}	0 X_{12}	0 X_{13}	0 X_{14}	0 X_{15}
100	X_3	3		1/4					−1/4	
50	X_4	9	1/3	−1/12					−7/12	
0	X_{10}	117	−1	−1/4	1				9/4	
0	X_{11}	63	−2/3	−7/12		1			11/12	
0	X_{12}	103	−1/3	−1/6			1		−25/6	
0	X_{13}	10						1		
100	X_2	5							1	
0	X_{15}	47		−1/4					1/4	1
0	X_{16}	16	−1/3	1/12					7/12	
150	X_5	10								
100	X_6	5								
60	X_7	20								
	Z_j	4 450	50/3	20 5/6	0	0	0	0	45 5/6	0
	$C_j - Z_j$		−50/3	−20 5/6	0	0	0	0	−45 5/6	0

Adición de nuevos productos

Como ya se ha visto, los precios duales indican el costo de oportunidad de la utilización de recursos escasos en un problema de programación lineal. En los ejemplos, el factor de escasez ha sido la disponibilidad de tiempo en las máquinas, pero también es posible usar los precios duales para evaluar el valor de la adición de nuevos productos o nuevos procesos de producción. Suponga que se introduce un nuevo componente y no se sabe si debe fabricarse internamente o comprarse fuera. El nuevo componente requiere dos horas de tiempo de máquina, una hora de tiempo de montaje, dos horas de pruebas y media hora de supervisión, así como 50 centavos de capital de trabajo. Los ahorros variables de la fabricación interna del nuevo componente son de 50 dólares por unidad.

El costo de oportunidad de producir internamente este componente se puede determinar multiplicando los precios duales por la utilización de recursos, como se muestra en la tabla 12-28.

El costo de oportunidad es mayor que el ahorro adicional (50 dólares), por lo que no se debe producir el componente internamente. Si el costo de oportunidad hubiera sido menor que 50 dólares, habría sido rentable producir por lo menos algunas unidades del nuevo producto.

Es peligroso interpretar los precios duales en forma demasiado literal. Si una restricción es efectiva y tiene precio dual alto, la gerencia puede asignar capacidad para reducir el cuello de botella. Al añadir capacidad se llegará a un punto en el cual otro recurso se convierta en cuello de botella y cambien los precios duales.

0 X_{16}	*0* X_{17}	*0* X_{18}	*0* X_{19}	*50* X_1	*100* X_2	*100* X_3	*50* X_4	*150* X_5	*100* X_6	*60* X_7
	$-5/4$	$-1/2$	$-1/4$	$1/4$		1				
	$1/12$	$1/6$	$-7/12$	$19/12$			1			
	$1/4$	$-3/2$	$5/4$	$-21/4$						
	$19/12$	$-11/6$	$11/12$	$-35/12$						
	$-5/6$	$-5/3$	$-19/6$	$7/6$						
				1						
					1					
	$5/4$	$1/2$	$1/4$	$-1/4$						
1	$-1/12$	$-1/6$	$7/12$	$-19/12$						
	1							1		
		1							1	
			1							1
0	$29\frac{1}{6}$	$58\frac{1}{3}$	$5\frac{5}{6}$	$104\frac{1}{6}$	100	100	50	150	100	60
0	$-29\frac{1}{6}$	$-58\frac{1}{3}$	$-5\frac{5}{6}$	$-54\frac{1}{6}$	0	0	0	0	0	0

Intervalos del término independiente

Los precios duales, que indican el valor del cambio de una restricción, sólo se mantienen en un intervalo limitado; el procedimiento para determinar estos valores se mostró antes. Ilustremos de nuevo el procedimiento con el problema cuya tabla final se presenta en la tabla 12-26. Como ejemplo, los intervalos relacionados con la variable X_9 (tiempo de montaje no utilizado) se determinan en la tabla 12-29.

El menor valor no negativo de la cuarta columna de la tabla 12-29 es 12 y está asociado a la variable X_3. Por lo tanto es posible reducir en 12 horas el tiempo de

Tabla 12-27

		Manufacturado			*Comprado*		
Número de componente	*Unidades requeridas*	*Variable*		*Cantidad*	***Variable de holgura***		***Cantidad***
182	10	X_1	=	0	X_{13}	=	10
184	5	X_2	=	5	X_{14}	=	0
193	50	X_3	=	3	X_{15}	=	47
197	25	X_4	=	9	X_{16}	=	16
284	10	X_5	=	10	X_{17}	=	0
629	5	X_6	=	5	X_{18}	=	0
845	20	X_7	=	20	X_{19}	=	0

Tabla 12-28 Evaluación del costo de oportunidad de un producto nuevo

(1) *Recurso escaso*	*(2)* *Precio dual*	*(3)* *Cantidad requerida*	*(4)* *Costo de oportunidad* *(2) · (3)*
Tiempo de máquina	$16.67	2	$33.33
Tiempo de montaje	20.83	1	20.83
Tiempo de pruebas	0.00	2	0.00
Tiempo de supervisión	0.00	½	0.00
Capital de trabajo	0.00	½	0.00
Costo de oportunidad total			$54.16

Tabla 12-29 Determinación de los límites de la reducción y adición de horas de montaje

Variables de solución	*Valores de solución*	X_9	$\left(\frac{\text{Valores de solución}}{X_9}\right)$
X_3	3	¼	12
X_4	9	−1/12	−108
X_{10}	117	−¼	−468
X_{11}	63	−7/12	−108
X_{12}	103	−⅙	−618
X_{13}	10	0	—
X_2	5	0	—
X_{15}	47	−¼	−188
X_{16}	16	1/12	192
X_5	10	0	—
X_6	5	0	—
X_7	20	0	—

montaje, de las 97 disponibles actualmente a 85, antes de que cambie la composición de la solución.

El menor valor (absoluto) no positivo de la columna 4 de la tabla 12-29 es 108, asociado con X_4 (componente 197) y X_{11} (horas de supervisión de ingeniería). Por lo tanto, las horas de montaje pueden aumentar de 97 a 205 antes de que cambie la composición de la solución. En este intervalo de 85 a 205 horas es válido el precio dual de 20.83 dólares.

Como otro ejemplo, considere la variable de holgura X_{10}, asociada con las horas de pruebas. En la solución final, X_{10} = 117, lo cual implica que no se usan 117 horas de tiempo de pruebas. El precio dual es cero. En este caso no tendrán efecto las horas adicionales para pruebas, por lo cual no hay límite superior para la adición de horas. Además, si se quitaran las 117 horas no usadas, la restricción sí sería efectiva, por lo que el límite inferior es la cantidad disponible menos 117 horas, o sea, 83 horas.

No se muestran los cálculos detallados de las restantes variables del problema, pero en la tabla 12-30 se muestra el conjunto completo de los intervalos.

Hay que tener cuidado al aplicar los resultados del análisis de sensibilidad, ya que todos se refieren a cambios "de uno en uno". Por ejemplo, se encontró que el número de horas de montaje se puede reducir a 85 o aumentar a 205 sin que varíe la composición de la solución. Este caso sólo es verdadero si no se efectúan otros cambios (es decir, si todos los demás recursos están en sus niveles iniciales). Si se realiza más de un cambio en los niveles de recursos, los intervalos generalmente serán distintos de los que se obtienen con el análisis de sensibilidad. En estas situaciones puede ser más sencillo ejecutar de nuevo la programación lineal con otros conjuntos de niveles de recursos, para estudiar el efecto sobre la rentabilidad.

Intervalos de coeficientes en la función objetivo

Como se mencionó antes, el valor del coeficiente en la función objetivo, el beneficio o costo por unidad, puede variar dentro de un intervalo sin cambiar la solución de programación lineal. Un ejemplo claro de esta situación, que no se presentó antes, es el caso en que una variable de decisión no se incluye en la solución final. Por ejemplo, considere la variable X_1 de la tabla 12-26: no se fabricará internamente ninguna X_1 (unidades del componente 182). El coeficiente actual en la función objetivo para el componente 182 es 50 dólares (los ahorros

Tabla 12-30

Nombre de la variable	*Variable de holgura asociada*	*Cantidad disponible*	*Cantidad utilizada en la solución óptima*	*Precio dual*	*Intervalo en el cual es válido el precio dual*	
					Límite inferior	*Límite superior*
Restricciones de recursos:						
Tiempo de máquina	X_8	90	90	$16.67	63	138
Tiempo de montaje	X_9	97	97	20.83	85	205
Tiempo de pruebas	X_{10}	200	83	0.00	83	Ninguno
Tiempo de supervisión	X_{11}	150	87	0.00	87	Ninguno
Capital de trabajo	X_{12}	250	147	0.00	147	Ninguno
Restricciones de necesidades:						
Componente 182	X_{13}	10	0	0.00	0	Ninguno
Componente 184	X_{14}	5	5	45.83	0	17
Componente 193	X_{15}	50	3	0.00	3	Ninguno
Componente 197	X_{16}	25	9	0.00	9	Ninguno
Componente 284	X_{17}	10	10	29.17	0	12.4
Componente 629	X_{18}	5	5	58.33	0	11
Componente 845	X_{19}	20	20	5.83	0	32

unitarios de la manufactura interna). Como no se incluyen estas unidades en la solución, este ahorro se podría reducir sin límite y aun así no se fabricaría ninguna. El valor $C_j - Z_j$ para X_{15} llamado costo reducido, es 54.17 dólares. Si los ahorros aumentaran en esta cantidad, o más, sería rentable introducir X, en la solución. Por ello, el límite superior del intervalo es \$50 + \$54.17 = 104.17 dólares. En este intervalo que se acaba de definir permanecerá igual la solución de programación lineal que se presentó en la tabla 12-26.

APÉNDICE Programación lineal: El problema dual



Todos los problemas de programación lineal resueltos hasta ahora han sido del tipo *primal,* término que se refiere al primer problema que es foco de nuestra atención. Todo problema primal tiene un problema acompañante, llamado *dual.* El dual tiene la misma solución óptima que el primal, pero se obtiene con otro procedimiento y el análisis de este procedimiento puede ser útil para varios tipos de problemas de decisión.

Es frecuente que el problema económico que se resuelve como primal comprenda la maximización de una función objetivo (por ejemplo, el beneficio), sujeta a restricciones que muchas veces son de naturaleza física (como horas de tiempo de máquina). En este tipo de situación, el dual supone la minimización de los costos totales de oportunidad, sujeta a que el costo de oportunidad (o, lo que es lo mismo, el valor) de las entradas de cada producto sea igual o mayor que el beneficio unitario del producto. A continuación veremos con mayor detalle la interpretación económica del dual, después de analizar un ejemplo específico.

Ejemplo: El problema primal

Suponga que se fabrican dos productos, A y B, en dos máquinas, 1 y 2.

El producto A requiere tres horas en la máquina 1 y media hora en la máquina 2.

El producto B requiere dos horas en la máquina 1 y una hora en la máquina 2.

Hay seis horas de capacidad disponible en la máquina 1 y cuatro en la máquina 2.

Cada unidad de A produce un aumento neto de 12 dólares en el beneficio y cada unidad de B tiene beneficio marginal de cuatro dólares. Sea:

X_1 = Número de unidades del producto A que se fabricarán
X_2 = Número de unidades del producto B que se fabricarán
P = Beneficio

La función objetivo (o función de beneficio) que se desea maximizar es:

$$P = 12X_1 + 4X_2$$

Las restricciones son:

$3X_1 + 2X_2 \leq 6$ (Hay seis horas disponibles en la máquina 1. Cada unidad de A requiere tres horas y cada unidad de B requiere dos.)

$\frac{1}{2}X_1 + X_2 \leq 4$ (Hay cuatro horas disponibles en la máquina 2. Cada unidad de A requiere media hora y cada unidad de B requiere una.)

Tabla 12-31 Tabla símplex final del problema primal

C_j	*Variables de solución*	*Valores de solución*	*0* X_3	*0* X_4	*12* X_1	*4* X_2
12	X_1	2	⅓	0	1	⅔
0	X_4	3	−⅙	1	0	⅔
	Z_j	24	4	0	12	8
	$C_j - Z_j$		−4	0	0	−4

$X_1 \geq 0, X_2 \geq 0$ (Las X no pueden ser negativas, pues no puede producirse una cantidad negativa de productos.)

Después de introducir las variables de holgura para convertir las desigualdades en igualdades, se tiene:

$$3X_1 + 2X_2 + X_3 + 0X_4 = 6$$
$$\tfrac{1}{2}X_1 + X_2 + 0X_3 + X_4 = 4$$

La tabla símplex final se muestra en la tabla 12-31.

En la tabla 12-31, todas las $C_j - Z_j$ son menores o iguales que cero; por lo tanto se ha llegado a una solución óptima. Hay que producir dos unidades de A, con lo cual se obtienen beneficios de 24 dólares. Ninguna otra combinación de productos generará tanto beneficio. Por ejemplo, la producción de una unidad de A y 1.5 unidades de B genera beneficios de $\$12 \cdot 1 + \$4 \cdot 1.5 = 18$ dólares. No se puede producir una unidad de A y dos unidades de B, ya que para esto se requerirían más horas que las disponibles en la máquina 1. La inclusión de tres unidades de X_4 en la solución indicaría que la máquina 2 estaría inactiva durante tres horas.

Ejemplo: El problema dual

Ahora elaboraremos el dual de este problema. Hay cinco pasos para obtener el dual de un problema primal:

1. Si la función objetivo se *maximiza* en el problema primal, la función objetivo del dual se *minimiza.* En este ejemplo, la función objetivo del problema primal es una ecuación de beneficio, por lo cual la función objetivo del dual será una ecuación de costo.
2. Los coeficientes de las variables de la ecuación de costo (la función objetivo del dual) son las constantes del término independiente de las restricciones del primal. En este ejemplo, son seis y cuatro y representan las horas disponibles en cada máquina. Las variables U_1 y U_2 de la ecuación de costo del dual son los costos respectivos por hora de usar la máquina 1 y la máquina 2.[8] La ecuación de costo (o función objetivo dual) es:

$$C = 6U_1 + 4\,U_2$$

[8] U_1 y U_2 son mediciones de costo de oportunidad y no se relacionan con los costos contables convencionales.

3. Las constantes de las restricciones del dual se obtienen de la función de beneficio (la función objetivo) del problema primal. Por consiguiente, las constantes serán 12 y 4.

4. Las restricciones del dual se forman *transponiendo* los coeficientes que se usaron en el primal. Las ecuaciones y los coeficientes del problema primal fueron:

Restricciones del primal	*Coeficientes*	
$3X_1 + 2X_2 \leq 6$	3	2
$\frac{1}{2}X_1 + X_2 \leq 4$	$\frac{1}{2}$	1

La transposición es la siguiente (A^T indica que A ha sido transpuesta):

$$A = \begin{pmatrix} 3 & 2 \\ 1/2 & 1 \end{pmatrix}$$

$$A^T = \begin{pmatrix} 3 & 1/2 \\ 2 & 1 \end{pmatrix}$$

La primera columna de A se convierte en la primera fila de A^T y la segunda columna de A es ahora la segunda fila de A^T.

5. Si se maximiza una función objetivo primal y si las restricciones del problema primal son del tipo "menor o igual que", las restricciones del dual serán del tipo "mayor o igual que". Entonces, las restricciones del dual son:

$$3U_1 + \frac{1}{2}U_2 \geq 12$$
$$2U_1 + U_2 \geq 4$$

Si se realiza todo este procedimiento para el problema dual, se obtiene el problema original (primal). Por lo tanto, el dual del problema dual es el problema primal.

Estas reglas requieren que el problema primal sea un problema de maximización con restricciones "menor o igual que" o un problema de minimización con restricciones "mayor o igual que". Si un problema de programación lineal no tiene una de estas formas, basta multiplicar por -1 la función objetivo o las restricciones y escribir las restricciones de igualdad como dos restricciones de desigualdad, para colocarla en una de las formas que requieren las reglas anteriores.

Interpretación de las restricciones del dual

La interpretación de las restricciones del dual debe servir para esclarecer la relación entre los problemas primal y dual. La primera desigualdad establece que el tiempo de producción del producto A en la máquina 1 (tres horas), multiplicado por el costo de oportunidad de horas de uso de la máquina 1 (U_1), más el tiempo de producción de A en la máquina 2 (media hora), multiplicado por el costo por hora de uso de la máquina 2 (U_2), es mayor o igual que 12 dólares. Esta cifra de

12 dólares representa el beneficio neto de una unidad de A (véase la función de beneficio del primal). Por lo tanto, el costo de oportunidad de producir A será igual al beneficio neto (en cuyo caso se producirá A) o mayor que el beneficio neto (en este caso no se producirán unidades de A y los recursos se aplicarán a otra cosa para obtener mayores beneficios).

La interpretación de la segunda restricción es similar. El costo total de producción por unidad de B es U_1, (costo de usar la máquina 1) más U_2 (costo de usar la máquina 2). El costo total por unidad es igual o mayor que cuatro dólares, donde esta cantidad es el aumento neto en el beneficio por unidad de producto B. Por ello, el costo de producción será igual que el beneficio neto unitario de B (en este caso se producirá B) o mayor que el beneficio neto (entonces no se producirían unidades de B).

Debe observarse que la forma de solución no permite que los costos de oportunidad de la producción de cualquiera de los productos sea menor que el beneficio marginal del producto. Esto es razonable, ya que el valor de las horas-máquina se mide de acuerdo con los beneficios que puedan producir. Si los costos totales fueran menores que los beneficios, deberían producirse más unidades del producto; pero si el producto se produce al límite de la capacidad productiva, los costos de la última unidad serán iguales a los beneficios. La única situación en la cual los costos serán mayores que los beneficios marginales es aquella en que no es deseable producir unidades del producto. Recuerde que son costos de oportunidad, no contables.

Las ecuaciones de restricción, ampliadas para incluir las variables de holgura y artificiales, son:

$$3U_1 + \tfrac{1}{2}U_2 - U_3 + 0U_4 + U_5 + 0U_6 = 12$$
$$2U_1 + U_2 + 0U_3 - U_4 + 0U_5 + U_6 = 4$$

La ecuación de costo ampliada es:

$$C = 6U_1 + 4U_2 + 0U_3 + 0U_4 + MU_5 + MU_6$$

El coeficiente *M,* de gran magnitud, que se asigna a U_5 y U_6 es la ecuación de costo ampliada para eliminar a las dos variables de la solución; esto se hace porque U_5 y U_6 son variables artificiales.

La tabla 12-32 contiene la solución final símplex para este programa lineal dual.

El mínimo de la ecuación de costo es 24 dólares (véase Z_o en la Tabla 12-32 del problema dual). Esto equivale al máximo de la ecuación de beneficio (véase Z_o de la Tabla 12-31 del problema primal). Esta situación siempre existirá; en la solución óptima, el valor de la función objetivo primal será igual **al valor de** la función objetivo dual.

La tabla 12-32 ofrece la solución óptima, ya que ninguna variable tiene valor $C_j - Z_j$ negativo. U_1 tiene valor de cuatro dólares, U_2 y U_3 son iguales a cero y U_4 tiene valor de cuatro dólares. En la siguiente sección se estudiará la importancia de estos valores.

Tabla 12-32 Tabla final símplex dual

C_j	*Variables de solución*	*Valores de solución*	M U_5	M U_6	0 U_3	0 U_4	6 U_1	4 U_2
0	U_4	4	⅔	−1	−⅔	1	0	−⅔
6	U_1	4	⅓	0	−⅓	0	1	⅙
	Z_j	24	2	0	−2	0	6	1
	$C_j - Z_j$		$M - 2$	M	2	0	0	3

Solución dual como precios duales

La interpretación económica de la solución dual es muy importante y útil. Considere primero las variables duales U_1 y $U_2 \cdot U_1$ tiene valor de cuatro dólares, lo cual representa que una hora de la máquina 1 vale cuatro dólares. ¿Cómo cambiaría la solución óptima si estuviera disponible una hora adicional en la máquina 1? Puesto que la solución original era producir dos unidades de A ($X_1 = 2$) y ninguna de B, el tiempo adicional en la máquina 1 se usaría para producir más unidades de A. Una unidad de producto A requiere tres horas en la máquina 1, por lo que una hora adicional permitiría producir un tercio de unidad de A. El cambio en el beneficio es un tercio de 12 dólares, o sea, cuatro dólares (observe que hay suficiente exceso de capacidad en la máquina 2 para permitir la producción).

El costo real del alquiler de capacidad adicional para la máquina 1 puede ser mayor o menor que cuatro dólares. Si es menor (digamos, tres dólares), la compañía debe considerar el alquiler de capacidad adicional. Esto se debe a que el rendimiento de cada hora adicional de capacidad disponible es cuatro dólares y el costo es de sólo tres dólares, lo que representa una ganancia marginal de un dólar.

El valor de U_2 es cero, lo que significa que el "costo de oportunidad" de una hora de la máquina 2 es cero. Este resultado es consistente con el hecho de que la máquina 2 tiene *horas de inactividad* si se sigue el programa óptimo de producción; entonces, el beneficio no aumentaría si hay más horas disponibles en la máquina 2.

Observe que la interpretación es la misma que se asignó a los precios duales en el capítulo 11 y ahora podrá comprender dónde tuvo su origen el término. Los precios duales también reciben el nombre de precios sombra o valores marginales.

Los precios duales se pueden considerar como el "costo" de una restricción. Se puede decir que una unidad de holgura de la máquina 1, la cual sólo tiene seis horas disponibles, "cuesta" cuatro dólares por hora (U_1 tiene valor de cuatro dólares por unidad). Valdría cuatro dólares por hora de rentabilidad adicional si se obtuviera una hora más de capacidad en la máquina 1 (por ejemplo, con un segundo turno). Por lo tanto, *el precio dual mide el valor de ampliar una restricción al adquirir una unidad adicional del factor de producción.*

Considere ahora las variables de holgura duales, U_3 y U_4. Estas variables miden la *pérdida de oportunidad de* la producción de la variable primal correspondiente. Como U_3 es la variable de holgura de la primera restricción dual, corresponde a X_Y en el problema primal. Además, U_4 corresponde a X_2. U_4 tiene valor de cuatro dólares; esto quiere decir que el costo de introducir en la solución una unidad de X_2 es de cuatro dólares.[9] U_3 tiene un valor de cero, lo que significa que no hay pérdida de oportunidad con la producción de X_1. Por ello se produce una cantidad positiva de X_1 en la solución óptima y no se produce X_2. Si hay una pérdida de oportunidad positiva relacionada con una variable, tendrá valor de cero en la solución óptima; a la inversa, si la pérdida de oportunidad asociada a una variable es cero en la solución óptima, la variable tendrá un valor positivo en la solución. En el capítulo 11 se empleó el término **costos reducidos** para hacer referencia a las variables de solución dual.

Observe que los valores de cuatro para U_1 y U_4 son iguales (excepto por el signo), lo mismo que los valores $C_j - Z_j$ de X_3 y X_2 de la tabla 12-31. Esto no es una coincidencia. Los valores U de la solución dual son los valores $C_j - Z_j$ de las variables correspondientes en la solución primal. Por variables correspondientes se debe entender que las variable duales ordinarias $(U_1$ y $U_2)$ se relacionan con variables de holgura primales $(X_3$ y X_4, respectivamente), y que las variables de holgura duales (U_3 y U_4) están asociadas con variables ordinarias primales $(X_1$ y X_2, respectivamente). Esta relación tiene sentido, ya que la variable ordinaria dual U_1 mide el costo de oportunidad por hora de la utilización de la máquina 1 y la variable de holgura primal X_3 representa la cantidad de capacidad no utilizada en la máquina 1. Así mismo, los valores $C_j - Z_j$ del dual proporcionan los valores de las variables correspondientes de la solución primal. Por lo tanto, la tabla símplex para la solución primal presenta tanto la solución primal como los valores de las variables duales (a través de los valores $C_j - Z_j$).

Con base en este análisis, se puede establecer que los siguientes productos siempre serán cero:

$$X_3U_1 = X_4U_2 = 0$$
$$X_1U_3 = X_2U_4 = 0$$

Los primeros productos son los de una variable de holgura primal y los de la variable ordinaria dual correspondiente. Si una restricción es efectiva, la variable de holgura primal será cero (como lo es X_3 en el ejemplo), y si una restricción no es efectiva, entonces el precio dual de esa restricción $(U_2$ en el ejemplo) será cero. Los segundos productos incluyen una variable ordinaria primal y la variable de holgura dual correspondiente. Si una variable ordinaria primal (X_1 en este caso) es positiva, la pérdida de oportunidad (U_3 en el ejemplo) asociada con el producto

[9] Si incluimos la producción de una unidad de X_2, la restricción que representa las horas en la máquina 1 nos obligaría a reducir la producción de X_1 a cuatro tercios de unidad. El beneficio sería entonces 12 ($^4/_3$) + 4(1) = \$20, una reducción de cuatro dólares con respecto al beneficio óptimo de 24 dólares. Por consiguiente, U_4 es cuatro dólares.

será cero. Si la pérdida de oportunidad es positiva (í/4 en este caso), entonces será cero la variable ordinaria primal que le corresponde (X_2). Estas relaciones siempre se mantienen en la solución óptima.

Bibliografía

Véase la bibliografía que se presenta al final del capítulo 10.

Problemas con respuestas

Algunos de los problemas que se presentan a continuación están diseñados para que usted practique el método símplex. El cálculo de una tabla símplex requiere muchas operaciones aritméticas y, como los errores son acumulativos, debe comparar sus respuestas con las que se presentan al final del libro cuando termine cada parte de la pregunta. Haga las correcciones necesarias y luego continúe con la siguiente parte. Una calculadora de bolsillo le será útil para este trabajo.

12-1. Suponga que se fabrican dos productos, A y B, en dos máquinas, 1 y 2. El producto A requiere cuatro horas en la máquina 1 y dos horas en la máquina 2; el producto B necesita dos horas en la máquina 1 y 8/3 de hora en la máquina 2. Hay 10 horas de capacidad disponible en la máquina 1 y ocho horas en la máquina 2. Además, hay un límite de ventas de seis unidades del producto A. El producto A tiene beneficio marginal de cuatro dólares por unidad y el producto B genera tres dólares por unidad. Si se usa Xi para las del producto A y *Xz* para las unidades del producto B, el problema se formula de la siguiente manera:

Maximizar: $P = 4X_1 + 3X_2$

Sujeto a:
$$4X_1 + 2X_2 \leq 10$$
$$2X_1 + {}^{8}/_{3}X_2 \leq 8$$
$$0 \leq X_1 \leq 6$$
$$X_2 \geq 0$$

Use el método símplex para encontrar los valores de X_1 y X_2 que maximicen *P*.

a. Elabore la primera tabla símplex
b. Determine las variables de entrada y salida.
c. Resuelva de nuevo para obtener la siguiente tabla símplex.
d. Revise si la solución es óptima.
e. Determine las siguientes variables de entrada y salida.
f. Resuelva de nuevo para obtener la tercera tabla símplex.
g. Revise para ver si la solución es óptima. ¿Cuál es la solución?

12-2. Remítase al problema 12-1 y a la tabla óptima que se presenta al final del libro como respuesta de (/).

a. ¿Cuál es el precio dual asociado con la máquina 1? ¿En qué intervalo de horas es válido?
b. ¿Cuál es el precio dual asociado con la máquina 2? ¿En qué intervalo es válido?
c. ¿Cuál es el precio dual relacionado con el límite de ventas del producto A? ¿En qué intervalo es válido?

12-3. Remítase al problema 12-1 y a la tabla óptima que se presenta al final del libro como respuesta de (*f*).

a. ¿Cuánto tendría que cambiar el beneficio por unidad del producto A para que varíe la solución óptima? Remítase al

12-4. problema 12-1 y a la tabla óptima que se presenta al final del libro como respuesta de (*f*). Suponga que se considera un nuevo producto que requeriría dos horas en cada máquina. El beneficio por unidad de este producto es de tres dólares. ¿Debe fabricarse?

12-5. Dado:

$$3X_1 + 2X_2 \geq 12$$
$$^1/_2X_1 + X_2 \geq \$4$$
$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$

Use el método símplex para encontrar los valores de X_1 y X_2 que minimicen la función $C = 6X_1 + 4X_2$.

a. Establezca la primera tabla símplex.
b. Determine las variables de entrada y salida.
c. Resuelva de nuevo para obtener la siguiente tabla símplex.
d. Revise si la solución es óptima. Si no lo es, repita *(b)* y (c) hasta obtenerla.

12-6. Una compañía enlatadora ha formulado un modelo de programación lineal como auxiliar para la planificación del proceso de enlatado de la cosecha de melocotones (duraznos). Hay dos productos (mitades y rebanadas de melocotón) y dos categorías, (A y B). Las mitades se obtienen de melocotones de categoría A y las rebanadas se pueden obtener de una mezcla de melocotones de categoría A y B. Las variables de decisión son:

X_1 = Número de kilogramos de melocotones de categoría A que se usan en las mitades
X_2 = Número de kilogramos de melocotones de categoría A que se usan en las rebanadas
X_3 = Número de kilogramos de melocotones de categoría B que se usan en las rebanadas

Todas las unidades se expresan en miles de kilogramos.
El objetivo es maximizar la contribución al beneficio del enlatado de la cosecha de melocotones. El problema de programación lineal se ha formulado como sigue:

Maximizar:

$$P = 0.15X_1 + 0.12X_2 + 0.12X_3$$

Sujeto a:

Demanda de mitades: $X_1 \leq 180$
Demanda de rebanadas: $X_2 + X_3 \leq 125$
Categoría A disponible: $X_1 + X_2 \leq 225$
Categoría B disponible: $X_3 \leq 75$
Mezcla de categorías para rebanadas: $-4X_2 + X_3 \leq 0$

$$X_1 \geq 0$$
$$X_2 \geq 0$$
$$X_3 \geq 0$$

Las variables de holgura X_4 a X_8 se añaden a las restricciones.

La tabla inicial de programación lineal es la 12-33.

a. Consulte la tabla 12-33. ¿Cuál es la variable de entrada? ¿Cuál es la variable de salida?
b. Calcule la siguiente tabla símplex.
c. Después de unas iteraciones se obtiene la tabla 12-34. Calcule los valores *Zj* y *Cj - Zj* para esta tabla. ¿Cuál es la si-

Tabla 12-33 (para el problema 12-6)

C_j	*Variables de solución*	*Valores de solución*	*0* X_4	*0* X_5	*0* X_6	*0* X_7	*0* X_8	*0.15* X_1	*0.12* X_2	*0.12* X_3
0	X_4	180	1					1		
0	X_5	125		1					1	1
0	X_6	225			1			1	1	
0	X_7	75				1				1
0	X_8	0					1		−4	1
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$		0	0	0	0	0	0.15	0.12	0.12

guiente variable de entrada? ¿Cuál es la variable de salida?

d. Por último se obtiene la tabla 12-35. ¿Es la solución óptima? ¿Cómo lo sabe? ¿Existen soluciones óptimas alternativas? ¿Cómo lo sabe?

12-7. Remítase al problema 12-6 (y a la Tabla 12-35). Responda cada una de las siguientes preguntas en forma independiente de las demás.

a. ¿Cuál es el precio máximo que estaría dispuesta a pagar la enlatadora por melocotones adicionales de categoría A? ¿Cuánto compraría a ese precio?

b. ¿Cuál es el valor marginal de los melocotones adicionales de categoría B? ¿En qué intervalo es válido este valor marginal?

c. El gerente de mercadotecnia de la enlatadora ha modificado la demanda estimada de las mitades, de 180 000 a 200 000 kilogramos. ¿Afectará este cambio a la solución del problema de enlatado? ¿Cuál será el incremento de beneficio asociado con el cambio?

d. Suponga que el gerente de mercadotecnia ha modificado su estimación de la demanda de las rebanadas, de 125 000 a **145** 000 kilogramos. ¿Afectará a la solución del problema de enlatado? ¿Cuál será el incremento de beneficio asociado con el cambio?

e. ¿Cuánto tendría que variar el precio de las mitades de melocotón para que cambiara la solución óptima?

Tabla 12-34 (para el problema 12-6)

C_j	Variables de solución	Valores de solución	0 X_4	0 X_5	0 X_6	0 X_7	0 X_8	0.15 X_1	0.12 X_2	0.12 X_3
0.15	X_1	180	1					1		
0	X_5	80	1	1	−1					1
0.12	X_2	45	−1		1				1	
0	X_7	75				1				1
0	X_8	180	−4		4		1			1
	Z_j									
	$C_j - Z_j$									

Tabla 12-35 (para el problema 12-6)

C_j	Variables de solución	Valores de solución	0 X_4	0 X_5	0 X_6	0 X_7	0 X_8	0.15 X_1	0.12 X_2	0.12 X_3
0.15	X_1	180	1					1		
0	X_5	5	1	1	−1	−1				
0.12	X_2	45	−1		1				1	
0.12	X_3	75				1				1
0	X_8	105	−4		4	−1	1			
	Z_j	41.4	.03	0	0.12	0.12	0	0.15	0.12	0.12
	$C_j - Z_j$		−.03	0	−0.12	−0.12	0	0	0	0

f. La enlatadora considera un nuevo producto, rebanadas de lujo, con contribución de 0.14 dólares por kilogramo. Un kilogramo de rebanadas de lujo está compuesto por medio kilogramo de melocotones de categoría A y medio kilogramo de categoría B. ¿Debe fabricarse este producto?

Problemas

12-8. Resuelva el siguiente problema con el método símplex.

Maximizar: $P = 3X_1 + 2X_2$
Sujeto a: $X_1 + 2X_2 \leq 6$
$2X_1 + X_2 \leq 6$
$X_1, X_2 \geq 0$

12-9. La compañía ABC tiene la opción de fabricar dos productos durante los periodos de poca actividad. La producción de la próxima semana se ha programado de manera que la máquina fresadora esté libre durante 10 horas y la fuerza de trabajo calificada tenga ocho horas disponibles.

El producto A requiere cuatro horas de tiempo de máquina y dos horas de trabajo por unidad. El producto B requiere dos horas de tiempo de máquina y dos horas de trabajo.

El producto A contribuye con cinco dólares por unidad a los beneficios y el producto B aporta tres dólares por unidad (sin incluir el costo de tiempo de máquina o de mano de obra).

Use el método símplex para encontrar las cantidades de los productos A y B que deben producirse.

12-10. La compañía Z combina los factores A y B para formar un producto que debe pesar 50 kilogramos. No se pueden usar menos de 20 kilogramos de A ni más de 40 kilogramos de B. El producto A cuesta 25 dólares por kilogramos y B, 10 dólares por kilogramo.

Use el método símplex para encontrar las cantidades de los factores A y B que deben usarse.

12-11. El departamento de publicidad de una empresa quiere planificar su estrategia publicitaria para llegar a ciertos porcentajes mínimos de los grupos de altos y bajos ingresos. Se consideran dos alternativas: televisión y revistas. La publicidad en revistas tiene un factor de exposición del *2%* por página para el grupo de altos ingresos, pero sólo del 1 % para el grupo de ingresos bajos. La televisión, por otra parte, tiene un factor de exposición del 3 % por programa para el grupo de ingresos bajos y del 1 % para el de ingresos altos.

La publicidad en revistas cuesta 1000 dólares por página; la de televisión, 4000 dólares por programa. Si la empresa quiere una exposición mínima del 50% del grupo de ingresos altos y del 30% del grupo de ingresos bajos, ¿qué estrategia debe usar para minimizar el costo de la publicidad? *Nota:* Si una persona ve dos veces un programa o lee dos veces un anuncio, se considera que hay doble exposición; por lo tanto, es posible obtener una exposición mayor del 100%.

Formule el caso anterior como un problema de programación lineal y obtenga la solución con el método símplex.

12-12. La compañía de madera contrachapada Ajax revisa el programa de producción para el próximo mes. Ajax produce tres tipos de tableros de madera contrachapada. Los tableros A y B se pueden producir en dos formas, las cuales requieren distintas cantidades de pino, abeto y picea. Las cantidades disponibles de estas maderas son limitadas. Ajax tiene también capacidad limitada para secar el recubrimiento de los tableros. Existe una limitación de 10 000 tableros como capacidad máxima del aserradero Ajax. Estos requisitos se presentan en la tabla 12-36.

Ajax quiere maximizar la contribución total al beneficio. Se añaden las siguientes variables de holgura:

X_6 = Pino no utilizado (miles de unidades)
X_7 = Abeto no utilizado (miles de unidades)
X_8 = Picea no utilizada (miles de unidades)
X_9 = Tiempo de secado no utilizado (miles de minutos)
X_{10} =Capacidad total no utilizada (miles de tableros)

La primera tabla símplex es la 12-37.

a. Suponga que la variable X_3 será la variable de *entrada.* ¿Cuál es, entonces, la variable de *salida?* ¿Por qué?
b. Después de dos iteraciones se obtiene la tabla 12-28. ¿Cuál es la solución en esta etapa? ¿Es óptima? ¿Cómo lo sabe? ¿Cuál es la variable de entrada? ¿Cuál es la variable de salida?
c. Después de otras tres iteraciones se obtiene la tabla 12-39. ¿Es la solución óptima? ¿Cómo lo sabe? Proporcione una descripción verbal de la solución del problema.
d. ¿Hay soluciones alternativas (véase la Tabla 12-39)? De ser así, indique por lo menos una.

12-13. Remítase al problema 12-12(c) (Tabla 12-39). Responda las siguientes preguntas en forma independiente.

a. ¿Cuál es el valor marginal (precio dual) de una unidad adicional de pino? ¿En

Tabla 12-36 (para el problema 12-12)

		Requisitos					
Producto	*Variable*	*Pino (unidades)*	*Abeto (unidades)*	*Picea (unidades)*	*Tiempo de secado (minutos)*	*Capacidad global (cada uno)*	*Contribución al beneficio (dólares por unidad)*
A-l	X_1	2	0	1	5	1	1.00
A-2	X_2	0	2	1	7	1	1.00
B-l	X_3	2	1	0	4	1	1.20
B-2	X_4	1	2	0	5	1	1.20
C	X_5	1	1	1	6	1	0.80
Total disponible (miles) (000)		12	15	6	60	10	

Tabla 12-37 (para el problema 12-12)

C_j	*Variables de solución*	*Valores de solución*	*1.0* X_1	*1.0* X_2	*1.2* X_3	*1.2* X_4	*0.8* X_5	*0* X_6	*0* X_7	*0* X_8	*0* X_9	*0* X_{10}
0	X_6	12	2		2	1	1	1				
0	X_7	15		2	1	2	1		1			
0	X_8	6	1	1			1			1		
0	X_9	60	5	7	4	5	6				1	
0	X_{10}	10	1	1	1	1	1					1
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$		1.0	1.0	1.2	1.2	0.8	0	0	0	0	0

Tabla 12-38 (para el problema 12-12)

C_j	Variables de solución	Valores de solución	1.0 X_1	1.0 X_2	1.2 X_3	1.2 X_4	0.8 X_5	0 X_6	0 X_7	0 X_8	0 X_9	0 X_{10}
1.2	X_3	0		−1	1	0.5	−.5	0.5		−1		
0	X_7	15		3		1.5	1.5	−.5	1	1		
1.0	X_1	6	1	1			1			1		
0	X_9	30		6		3	3	−2		−1	1	
0	X_{10}	4		1		1.5	0.5	−.5				1
	Z_j	6	1	−0.2	1.2	0.6	0.4	0.6	0	−0.2	0	0
	$C_j - Z_j$		0	1.2	0	0.6	0.4	−0.6	0	0.2	0	0

Tabla 12-39 (para el problema 12-12)

C_j	Variables de solución	Valores de solución	1.0 X_1	1.0 X_2	1.2 X_3	1.2 X_4	0.8 X_5	0 X_6	0 X_7	0 X_8	0 X_9	0 X_{10}
1.2	X_3	5	2		1		1		−1			2
1.2	X_4	2	−2			1	−1	1	2			−4
0	X_8	3						1	1	1		−3
0	X_9	9						2	1		1	−9
1.0	X_2	3	1	1			1	−1	−1			3
	Z_j	11.4	1.0	1.0	1.2	1.2	1.0	0.2	0.2	0	0	0.6
	$C_j - Z_j$		0	0	0	0	−0.2	−0.2	−0.2	0	0	−0.6

qué intervalo es válido este valor marginal?

b. ¿Cuál es el valor marginal de una unidad de abeto adicional? ¿En qué intervalo es válido este valor marginal?

c. ¿Cuál es el valor marginal de una unidad adicional de picea? ¿En qué intervalo es válido este valor marginal?

d. Suponga que la empresa quiere agregar tiempo de secado. ¿Sería rentable? ¿Cuál es el valor marginal de un minuto adicional de tiempo de secado? ¿En qué intervalo es válido este valor?

e. ¿Cuál es el valor marginal de una unidad adicional de capacidad global? ¿En qué intervalo es válido este valor?

f. ¿Cuánto tendría que aumentar la contribución de un tablero tipo C para que Ajax considerara su producción?

g. Considere el producto B-l (variable X_1). ¿Cuáles son los límites del aumento y de la reducción del beneficio por unidad antes de que cambie la solución?

h. Suponga que se considera un nuevo tipo de tablero, D, que requiere una unidad de pino, una de abeto y una de picea y 10 minutos de secado. Su contribución al beneficio es de 1.10 dólares. ¿Debe fabricarse este tablero?

12-14. Una empresa tiene un problema de decisión acerca de cuánto producir de cada uno de sus cinco artículos (X_1 a X_5). El problema se ha formulado como un problema de programación lineal y en la tabla 12-40 se muestra la primera tabla símplex es la 12-40. Se incluyen las variables de holgura X_6, X_7 y X_8.

a. ¿Cuál es la variable de entrada? ¿Cuál es la variable de salida?

b. Un analista de la compañía, el señor Opti Miza, ha aplicado el procedimiento símplex. Después de varios intervalos llega a la tabla 12-41. Identifique las variables de solución y determine los valores de las filas Z_j y $C_j - Z_j$.

c. ¿Cuál es la siguiente variable de entrada? ¿Cuál es la variable de salida?

d. Después de varias iteraciones se obtiene la tabla 12-42. ¿Cuál es la solución? ¿Es óptima?

12-15. Remítase al problema 11-10 y a la tabla 11-7. La tabla símplex final es la 12-43, con las variables X_1, X_2, X_3 y X_4 que representan el número de modelos Deportista, Normal, Viajero y Super, respectivamente, y las va-

Tabla 12-40 (para el problema 12-14)

C_j	Variables de solución	Valores de solución	0 X_6	0 X_7	0 X_8	10 X_1	10 X_2	20 X_3	15 X_4	12 X_5
0	X_6	120	1			3	6	9		
0	X_7	108		1			3	6	6	6
0	X_8	36			1			3	3	9
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$		0	0	0	10	10	20	15	12

Tabla 12-41 (para el problema 12-14)

C_j	Variables de solución	Valores de solución	0 X_6	0 X_7	0 X_8	10 X_1	10 X_2	20 X_3	15 X_4	12 X_5
		4	⅓		−1	1	2		−3	−9
		36		1	−2		3			−12
		12			⅓			1	1	3
	Z_j									
	$C_j - Z_j$									

Tabla 12-42 (para el problema 12-14)

C_j	Variables de solución	Valores de solución	0 X_6	0 X_7	0 X_8	10 X_1	10 X_2	20 X_3	15 X_4	12 X_5
10	X_1	40	⅓			1	2	3		
0	X_7	36		1	−2		3			−12
15	X_4	12			⅓			1	1	3
	Z_j	580	3.3	0	5	10	20	45	15	45
	$C_j - Z_j$		−3.3	0	−5	0	−10	−25	0	−33

Tabla 12-43 (para el problema 12-15)

C_j	Variables de solución	Valores de solución	40 X_1	60 X_2	80 X_3	100 X_4	0 X_5	0 X_6	0 X_7	0 X_8
0	X_8	50	−0.2		0.2		0.1	−0.5		1
60	X_2	125	0.5	1			0.25	−0.75		
0	X_7	5	0.3		0.2		−0.15	0.25	1	
100	X_4	50	0.2		0.8	1	−0.1	0.5		
	Z_j	12,500								
	$C_j - Z_j$		−10.0	0	0.0	0	−5.0	−5.0	0	0

riables X_5, X_6, X_7 y X_8 que representan las variables de holgura.

a. Compare la solución con la que se obtuvo en las salidas de LINDO de la tabla 11-7. ¿Son iguales? ¿Deberían serlo?

b. Los intervalos del término independiente y los intervalos de coeficientes de la función objetivo se muestran en la tabla 11-7. Use la tabla símplex para verificar estos resultados.

12-16. Los siguientes problemas de los capítulos 10 y 11 son de tamaño moderado y pueden resolverse a mano con el método símplex.

a. Problema 10-3.

b. Problema 10-8.

c. Problema 10-10.

d. Problema 11-1.

Problemas más difíciles

12-17. La compañía de nueces Ajax vende mezclas de nueces de dos niveles de calidad. La mezcla más costosa tiene mayor proporción de almendras, y la más barata contiene más maní (cacahuate).

El precio de las nueces que compra Ajax es: avellanas, un dólar por kilogramo; maní, 40 centavos por kilogramo. Las dos mezclas que vende Ajax y sus precios son: mezcla A, 1.60 dólares el kilogramo; mezcla B, 80 centavos por kilogramo. Ajax puede vender cualquier cantidad de estas mezclas pero, debido a la escasez de nueces, no puede obtener más de 100 kilogramos de avellana ni más de 200 kilogramos de maní.

La gerencia ha decidido que la mezcla A no debe contener más del 25% de maní ni menos del 40% de avellanas. La mezcla B no debe tener más del 60% de maní ni menos del 20% de avellanas.

¿Cómo deben mezclarse las nueces? Es decir, ¿cuántos kilogramos de la mezcla A se deben producir (y cuál debe ser su composición) y cuántos kilogramos de la mezcla B (y su composición)? Formule la tabla símplex y resuelva.

12-18. Paul Bunyan Lumber Company produce tablas de madera de pino y abeto y dos tipos de madera contrachapada. La compañía tiene una contribución al beneficio de cuatro centavos por metro de tabla (m) de pino y de seis centavos por m de abeto. La madera contrachapada de tipo 1 contribuye con 1.20 dólares por tablero y la del tipo 2 obtiene 1.50 dólares por tablero.

La compañía tiene 2580 millares de metros de tabla (MMT) de pino para el mes de diciembre, los cuales puede usar para tablas o madera contrachapada; también hay 2040 MMT de abeto. Un tablero de madera con-

Tabla 12-44 Paul Bunyan Lumber Co.: Tabla inicial (para el problema 12-18)

C_j	Variables de solución	Valores de solución	0 X_5	0 X_6	0 X_7	0 X_8	0 X_9	0 X_{10}	0 X_{11}	0.04 X_1	0.06 X_2	1.20 X_3	1.50 X_4
0	X_5	2 580	1							1		16	12
0	X_6	2 040		1							1	8	12
0	X_7	400			1					1	1		
0	X_8	250				1						1	1
0	X_9	920					1					4	6
0	X_{10}	120						1				1	
0	X_{11}	100							1				1
	Z_j	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$		0	0	0	0	0	0	0	0.04	0.06	1.20	1.50

trachapada de tipo 1 requiere 16 m de pino y 8 m de abeto. Un tablero de tipo 2 requiere 12 m de cada especie.

Las tablas de madera están limitadas sólo por la capacidad de la sierra maestra. Esta sierra puede manejar 400 MMT de cualquier especie en un mes.

El aserradero de madera contrachapada puede estar restringido por la máquina descortezadora o por la secadora. En un mes no se pueden descortezar más de 250 000 tableros y hay sólo 920 000 minutos de tiempo de secado disponible. Cada tablero de tipo 1 requiere cuatro minutos de secado; los tableros de tipo 2 requieren seis minutos cada uno.

Las condiciones del mercado limitan el número de tableros de tipo 1 que se pueden vender a un máximo de 120 000; para el tipo 2 el límite es de 100 000 tableros. Se puede vender cualquier cantidad de tablas de madera. La compañía formuló un modelo de programación lineal para sus operaciones, de la siguiente manera: Sea:

P = Contribución al benficio, en miles de dólares
X_1 = Ventas de MMT de madera de pino
X_2 = Ventas de MMT de madera de abeto
X_3 = Ventas de millares de tableros de madera contrachapada de tipo 1
X_4 = Ventas de millares de tableros de madera contrachapada de tipo 2

Maximizar.

$P = 0.04*, + 0.06X, + 1.20*3 + 1\text{-}50*4$

Sujeto a:

$$
\begin{aligned}
X_1 \quad &+ 16X_3 + 12X_4 \le 2\,580 \quad \text{(disponibilidad de pino)} \\
X_2 + \; &8X_3 + 12X_4 \le 2\,040 \quad \text{(disponibilidad de abeto)} \\
X_1 + X_2 \quad &\le 400 \quad \text{(capacidad del aserradero)} \\
X_3 + \; &X_4 \le 250 \quad \text{(capacidad de la descortezadora)} \\
4X_3 + \; &6X_4 \le 920 \quad \text{(capacidad de secado) (demanda} \\
X_3 \quad &\le 120 \quad \text{del mercado, madera contrachapada de tipo 1)} \\
X_4 &\le 100 \quad \text{(demanda del mercado, madera contrachapada de tipo 2)}
\end{aligned}
$$

La primera tabla símplex que se obtiene después de agregar las variables de holgura es la 12-44. Después de varias iteraciones se obtiene la tabla 12-45.

a. ¿Cuál es la solución en la segunda tabla? ¿Es la óptima? ¿Cuáles son los beneficios totales? ¿Hay soluciones óptimas alternativas?

b. Suponga que se puede disponer de una unidad más (miles de minutos) de tiempo de secado. ¿Qué efecto tendría en la solución (es decir, cuáles serían los nuevos valores de X_1 X_2, X_3 y X_4)?

c. ¿Cuál es el beneficio adicional asocia do con la adición de una unidad (miles de minutos) de tiempo de secado? ¿En qué intervalo es válido este incremento de beneficio?

d. ¿Cuál es el valor de la capacidad adicional en la sierra maestra del aserradero? ¿Cuál es el aumento o la reducción de la capacidad antes de que ocurra un cambio básico en las variables de solución?

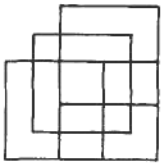
e. Suponga que se pudiera aumentar la demanda de la madera contracliapada de tipo 2 en una unidad (mil tableros). ¿Cuál sería el incremento de beneficio? ¿En qué intervalo sería válido?

f. Se propone un tercer tipo de madera contrachapada, con contribución de 1.60 dólares al beneficio. Para ello se requerirían 8 m de pino y 16 m de abeto. Además, el tiempo de secado sería de ocho minutos. ¿Debe producirse este tipo de tablero? ¿Cuál sería su beneficio marginal?

Tabla 12-45 Paul Bunyan Lumber Co.: Tabla final (para el problema 12-18)

C_j	Variables de solución	Valores de solución	0 X_5	0 X_6	0 X_7	0 X_8	0 X_9	0 X_{10}	0 X_{11}	0.04 X_1	0.06 X_2	1.20 X_3	1.50 X_4
0.04	X_1	100	1				−4.0		12.0	1			
0.06	X_2	200		1			−2.0				1		
0	X_7	100	−1	−1	1		6.0		−12.0				
0	X_8	70				1	−0.25		0.5				
1.20	X_3	80					0.25		−1.5			1	
0	X_{10}	40					−0.25	1	1.5				
1.50	X_4	100							1.0				1
	Z_j	262	0.04	0.06	0	0	0.02	0	0.18	0.04	0.06	1.20	1.50
	$C_j - Z_j$		−0.04	−0.06	0	0	−0.02	0	−0.18	0	0	0	0

CAPÍTULO 13



Programación lineal
Temas especiales

En este capítulo se presentan dos temas especiales que se relacionan con la programación lineal. El primero es un caso especial llamado *problema de transporte y* el segundo trata el problema de objetivos múltiples y la programación por metas.

Problema de transporte

Hay un tipo de problema de programación lineal que se puede resolver con una versión simplificada de la técnica símplex.[1] Como su aplicación principal en la resolución de problemas comprende varias fuentes de productos y varios destinos para ellos, es frecuente que a este tipo de problema se le denomine **problema de transporte.** Aunque la formación se puede usar para representar problemas más generales de asignación y programación, además de problemas de transporte y distribución, lo ilustraremos con un ejemplo que implica la distribución de productos de fábricas a almacenes.

Ejemplo Suponga que hay tres fábricas (F_1, F_2 *y* F_3) que abastecen a tres almacenes (W_1, W_2 y W_3). En la tabla 13-1 se proporcionan las capacidades de las fábricas y los requisitos de los almacenes; en el cuerpo de la tabla 13-2 se indican los costos de envío de cada fábrica a cada destino. En los márgenes de esta tabla están las cantidades disponibles en las fábricas y los requerimientos de los almacenes.

Es necesario preparar una solución inicial factible y existen varias maneras de hacerlo; el único requisito es que hay que satisfacer las necesidades del almacén

[1] Los coeficientes de todas las variables de las ecuaciones de restricción son 0 o 1 y siguen un patrón específico. Véase el apéndice de este capítulo.

Tabla 13-1 Capacidades de las fábricas y requerimientos de los almacenes.

Fábricas	*Cantidad disponible*	*Almacenes;*	*Cantidad requerida*
F_1	20	W_1	5
F_2	15	W_2	20
F_3	10	W_3	20
Total	45	Total	45

Tabla 13-2 Costos de envío y datos de suministro y demanda

Destino / *Fuente*	W_1	W_2	W_3	*Unidades disponibles*
F_1	\$0.90	\$1.00	\$1.30	20
F_2	\$1.00	\$1.40	\$1.00	15
F_3	\$1.00	\$0.80	\$0.80	10
Unidades demandadas	5	20	20	45

sin exceder la capacidad de producción de la fábrica. Un método común es comenzar por la esquina superior izquierda (la esquina "noroeste") y suministrar primero las demandas de W_1 luego W_2 y después W_3. Otro procedimiento (el cual usaremos) comienza en la tabla 13-2. El razonamiento que se aplica en este caso es que cada una de las fábricas debe enviar su producto y que el menor costo de cada fila representa el envío más barato desde cada fábrica. Análogamente, el costo menor de una columna es la manera menos costosa de enviar el producto a un almacén. Este método por lo general no producirá la solución óptima, pero generalmente es un buen punto de partida.

El costo de 80 centavos de F_3W_2 es igual a los 80 centavos de F_3W_3.[2] Se podría tomar cualquiera de los dos valores, pero escogeremos arbitrariamente F_3W_2. Como la fábrica (F_3) sólo puede suministrar 10 unidades, aunque el almacén (W_2) requiere 20 unidades, se coloca un 10 en la casilla F_3W_2 de la tabla 13-3. En la tabla 13-3 los costos se colocan en la esquina superior izquierda de la casilla, y las unidades enviadas en la esquina inferior derecha (en círculo con pantalla).

Ya se ha agotado la capacidad de la fábrica 3, por lo que se pueden colocar ceros en las demás casillas de la fila 3.

Regresando a la tabla 13-2, los 90 centavos de la casilla F_1W_1 representan la menor cantidad de la fila y la menor de su columna. La fábrica puede suministrar 20 unidades, pero el almacén sólo requiere cinco; por lo tanto, se colo-

[2] $F_3\ W_2$ indica que la fábrica 3 abastece al almacén 2.

Tabla 13-3 Primera solución

Destino / Fuente	W_1	W_2	W_3	*Unidades disponibles*
F_1	\$0.90 **5**	\$1.00 **10**	\$1.30 **5**	20
F_2	\$1.00 **0**	\$1.40 **0**	\$1.00 **15**	15
F_3	\$1.00 **0**	\$0.80 **10**	\$0.80 **0**	10
Unidades demandadas	5	20	20	45

ca un 5 en la casilla F_1W_1 de la tabla 13-3. Ya están satisfechas las necesidades del almacén 1, por lo cual se pueden colocar ceros en las demás casillas de la columna 1.

Al llegar a este punto no hay más casillas que sean el mínimo de su fila y su columna (por esto el procedimiento generalmente no llega a una solución óptima). Para colocar las unidades restantes se aplica el sentido común: nos aseguramos de que no se tome de una fábrica más de lo que puede producir y de que no se envíe a un almacén más de lo que requiere. Sobran 15 unidades de F_1; asignaremos 10 unidades a F_1W_2 y cinco a F_1W_3. Las necesidades del almacén 2 se satisfacen con esta asignación, pues ya se habían asignado 10 unidades de F_3 a W_2.

Las 15 unidades de F_2 se asignan a F_2W_3, ya que el almacén 3 es el único cuyas necesidades no se han cubierto. Con este paso se ha asignado la producción de todas las fábricas y en esta primera solución se cumplen los requerimientos de todos los almacenes.

Una condición de la solución inicial es que el número de rutas que se usen sea igual a la suma del número de fábricas, F, más el número de almacenes, W, menos 1; es decir:

$$\text{Rutas utilizadas} = F + W - 1$$

Este número de rutas corresponde a una solución básica (véanse capítulos 11 y 12).[3] Si se usa un número mayor de casillas hay que ajustar la solución con cambios arbitrarios consistentes con las necesidades de los almacenes y con la capacidad de producción de las fábricas, para reducir el número de rutas.

La tabla 13-3 muestra la primera solución de prueba. Observe que se usan cinco rutas y que $F + W - 1 = 5$ (es decir, $3 + 3 - 1 = 5$). Sería una coincidencia que

[3] Hay F ecuaciones para las capacidades de las fábricas, y Inecuaciones para la demanda de los almacenes; sin embargo, la suma de las capacidades de las fábricas debe ser igual a la suma de las demandas de los almacenes, por lo que una de estas ecuaciones es redundante y el número de ecuaciones independientes es $F + W - 1$.

la solución de prueba fuera la óptima; pero cuanto más se aproxime la primera solución a la óptima, menos trabajo se requiere.

Evaluación de rutas alternativas

Ahora tenemos que probar si es posible reducir los costos con un reacomodo de las rutas. A partir de la tabla 13-3, los costos totales de envío de la primera solución son:

$$5(0.90) + 10(1.00) + 10(0.80) + 5(1.30) + 15(1.00) = \$44$$

Procederemos a evaluar la ventaja relativa de las rutas alternativas en cuanto a costo. Considere una ruta que no se usa, por ejemplo, el envío de la fábrica 1 al almacén 2 (es decir, la casilla $F_2W\backslash$ tiene cero en la esquina inferior derecha). El costo "directo" de usar esta ruta es la cantidad de la esquina superior izquierda de la casilla: un dólar; esta cantidad se compara con los costos actuales de una ruta indirecta de F_2 a W_1. La **ruta indirecta** es la que tendría que seguir una unidad de una fábrica a un almacén únicamente por canales establecidos (es decir, el envío debe evitar las casillas con ceros; de lo contrario, se hace un envío de una casilla que no tiene unidades o se introducen dos casillas en la solución en lugar de una).

Los costos indirectos se obtienen trazando una ruta indirecta y sumando los costos. Si se considera la casilla F_2W_1 la ruta indirecta es: $+ F_2W_3 - F_1W_3 + F_1 W_1$ Esto significa que se podría enviar una unidad de F_2 a W_3, reducir en una unidad el envío actual de F_1 a W_3 y enviar la unidad F_1 que no se utiliza de F_1 a W_3. El resultado neto de estas transacciones es que aún se cumplen todos los suministros y requerimientos. El costo indirecto es:

Cargo por envío de F_2 a W_3	+$1.00
Cada unidad que envía F_2 a W_3 ahorra el costo de suministro desde F_1 a W_3	- 1.30
Cargo por envío de F_1 a W_3	+ 0.90
Costo indirecto	+ 0.60

El costo de evitar la casilla F_2W_1 es de 60 centavos (el costo inicial de un dólar por usar F_2W_3, el ahorro de 1.30 dólares por no usar F_1W_3 en la medida de lo posible y el costo de 90 centavos por usar la casilla $F_1 W_1$). En comparación con este costo indirecto total de 60 centavos está un costo de un dólar, resultado de usar la ruta directa F_2W_3; por lo tanto, es preferible la ruta indirecta.

Sólo puede existir una ruta indirecta para cada casilla cero, excepto si la solución de prueba anterior contenía más de F + brutas directas.

Las otras casillas cero se pueden evaluar en forma similar. Por ejemplo, el envío indirecto de F_2 a W_2 es el cargo de F_2 a W_3 (un dólar) menos el cargo F_1W_3 (1.30 dólares) más el cargo F_1W_2 (un dólar) = 70 centavos. Una vez más, esta

Tabla 13-4

Ruta no utilizada	*Costo de la ruta directa*	*Costo de la ruta indirecta*
F_2W_1	\$1.00	\$0.60
F_3W_1	1.00	0.70
F_2W_2	1.40	0.70
F_3W_3	0.80	1.10

cantidad es menor que el costo del envío directo (1.40 dólares) y se seguiría la ruta indirecta. La casilla $F_3\ W_1$ también tiene un costo de 70 centavos para el envío indirecto y, una vez más, es menor que el costo de la ruta directa (un dólar). Sin embargo, al evaluar la última ruta no utilizada, F_3W_3, el costo que se obtiene para la ruta indirecta es:

$$\$0.80\text{-}\$1.00+ \$1.30 = \$1.10$$

lo cual es mayor que el costo de 80 centavos de la ruta directa. En este caso hay que usar la ruta directa F_3W_3 en lugar de la ruta indirecta

$$F_3W_2\text{-}F_1W_2 + F_1W_3$$

ya que se puede obtener un ahorro de

$$\$1.10\text{-}\$0.80 = \$0.30$$

por unidad con la ruta directa (véase Tabla 13-4).

¿Cuántas unidades pueden desplazarse de la ruta indirecta a la ruta directa F_3W_3? La respuesta es el número mínimo que aparezca en las conexiones de la ruta indirecta que debe proporcionar unidades para la transferencia. En este caso es cinco unidades, de la casilla F_1W_3. Por lo tanto, se envían cinco unidades por la ruta directa F_3W_3; como F_3 sólo produce 10 unidades, esto obliga a reducir a cinco la casilla F_3W_2 y ahora se requieren cinco unidades adicionales en el almacén 2. Esta deficiencia se compensa sin problemas con la fábrica 1, la cual se vio obligada a reducir precisamente en cinco unidades su envío a W_3 como resultado de la nueva fuente de suministro de W_3. El nuevo patrón se muestra en la tabla 13-5.

Todas las rutas que no se utilizan, identificadas con las casillas cero de la tabla 13-5, deben evaluarse de nuevo para ver si es posible una reducción adicional en el costo. Este paso se puede efectuar como se describió previamente; los resultados se muestran en la tabla 13-6.

En cada uno de los casos el costo de la ruta indirecta es menor que el de la ruta directa, lo cual indica que se ha obtenido una solución óptima que minimiza los costos de envío. A partir de la tabla 13-5, el costo total de envío de las fábricas a los almacenes es:

Tabla 13-5 Segunda solución

Fuente \ Destino	W_1	W_2	W_3	Unidades disponibles
F_1	\$0.90 (5)	\$1.00 (15)	\$1.30 (0)	20
F_2	\$1.00 (0)	\$1.40 (0)	\$1.00 (15)	15
F_3	\$1.00 (0)	\$0.80 (5)	\$0.80 (5)	10
Unidades demandadas	5	20	20	45

$$(5)(\$0.90) + (15)(\$1.00) + (15)(\$1.00) + (5)(\$0.80) + (5)(\$0.80) = \$42.50$$

Observe que la solución final usa cinco rutas directas, donde:

$$F + W - 1 = 5$$

Se puede generalizar $F + W$ y denominarse "suma de números de requisitos marginales", ya que se puede tratar con otras entidades que no sean almacenes o fábricas.

Soluciones enteras

Si todos los números que representan la disponibilidad de las fábricas y los requerimientos de los almacenes son enteros, entonces la solución óptima de un problema de transporte sólo contendrá enteros. Este resultado surge del hecho de que el procedimiento sólo implica sumas y restas de enteros, por lo que una solución inicial de enteros permanecerá con enteros hasta llegar a la solución óptima. En el problema general de programación lineal que se analizó en los capítulos 10, 11 y 12 no se garantizaban soluciones enteras.

Degeneración

En algunas situaciones de programación aparece el problema de la degeneración, que se debe a la utilización de menos de $F + W - 1$ casillas, lo que hace imposible evaluar una casilla cero con los métodos directos que se describieron antes.[4]

Para resolver el caso de la degeneración, registre una pequeña cantidad, digamos *d,* en cada una de las casillas cero. A *d* se le tratará como si fuera una

[4] Por ejemplo, puede presentarse la degeneración si una fábrica envía toda su producción a un almacén y satisface todos los requerimientos de éste.

Tabla 13-6

Ruta no utilizada	*Costo de usar la ruta directa*	*Costo de usar la ruta indirecta*
F_1W_3	$1.30	$1.00
F_2W_1	1.00	0.90
F_2W_2	1.40	1.00
F_3W_1	1.00	0.70

cantidad normal y, por lo tanto, representa un nudo elegible para la evaluación de rutas indirectas. A *d* se le asigna el valor de cero en la solución final si aún se mantiene en los cálculos.

Oferta distinta de la demanda

Si la oferta no es igual a la demanda, se puede agregar una fuente o destino "ficticio" para eliminar la discrepancia. Por ejemplo, suponga que la oferta disponible $(F_1 + F_2 + F_3)$ excede en 10 unidades el total de los requerimientos de los almacenes ($W_1 + W_2 + W_3$). En este caso se crearía un almacén ficticio 4 con demanda $W_4 = 10$ unidades y los envíos de cualquiera de las fábricas al almacén 4 tendrían costo de cero en la función objetivo. Estas fábricas que abastecen al almacén ficticio en realidad reducirán su producción en la cantidad que se dirige al almacén 4.

Soluciones por computador

Así como en la práctica un problema de programación lineal se resuelve con un programa de computación que lleva a cabo los pasos necesarios, existe *software* de computador para resolver el problema menos complicado de transporte. Estos programas de "programación lineal de transporte" operan mucho más rápidamente que los programas normales de programación lineal, ya que pueden aprovechar la estructura especial del problema de transporte. Se han mostrado los pasos de estos métodos para que se comprenda mejor el problema y su solución.

Interpretaciones económicas

Costos de rutas indirectas

Los costos de las rutas indirectas son equivalentes a los valores *Zj* (véase Cap. 12) de la programación lineal normal y se pueden usar de la misma manera.[5] Suponga,

[5] Los valores *Cj - Zj,* que representan los **costos reducidos,** son la diferencia entre los costos de las rutas directas e indirectas.

Tabla 13-7 Efecto de una unidad adicional para F_2 y W_2

Destino / Fuente	W_1	W_2	W_3	*Unidades disponibles*
F_1	5	15		20
F_2			15 + 1	15 + 1
F_3		5 + 1	5 − 1	10
Unidades demandadas	5	20 + 1	20	45 + 1

por ejemplo, que después de concluir el análisis de las tablas 13-5 y 13-6 se nos informa que las necesidades de W_2 aumentaron en una unidad y que se ampliaría la capacidad de F_2 para manejar este aumento. ¿Cuál sería el costo incremental de los costos de envío?

El costo de la ruta indirecta F_2W_2 nos proporciona la respuesta de inmediato. La ruta directa costaría 1.40 dólares y la indirecta sólo representa un dólar. Por consiguiente, el costo incremental del envío de esta unidad es un dólar. La tabla 13-7 muestra cómo se modificaría la solución original. Observe que se pueden enviar hasta cinco unidades con esta ruta indirecta.

Cambios en los costos de envío

También se puede examinar la sensibilidad de la solución ante cambios en los costos de envío. Por ejemplo, si cambiara el costo de enviar F_1 a W_1 (que en este momento es de 1.30 dólares), ¿variaría la solución? Observe que el costo de la ruta indirecta para F_1 W_3 es de un dólar. El costo de envío tendría que ser menor que esta cantidad para que se usara la ruta directa, es decir, antes de que cambie la solución de la tabla 13-5.

Ventajas de la ubicación

Suponga que se agrega una unidad a la demanda de W_1 (de cinco unidades a seis). ¿Qué fábrica debe ampliarse para satisfacer esta necesidad? Utilizando el método que se presentó antes, se puede determinar el costo de cada fábrica para entregar una unidad a W_1.

Fábrica	*Ruta utilizada*	*Costo*
F_1	Directa	$0.90
F_2	Indirecta	0.90
F_3	Indirecta	0.70

Observe que cuesta 20 centavos menos (considerando sólo los costos de envío) enviar la unidad adicional desde F_3 en lugar de F_1 o F_2. Existe una **ventaja de ubicación** de 20 centavos para F_3. De hecho, esta ventaja se mantiene incluso si se requiere la unidad adicional para W_2 o W_3.[6]

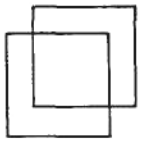
El mismo método se puede aplicar para revisar las ventajas de ubicación de los almacenes. Suponga que la fábrica F_1 contara con una unidad más de capacidad y que se realizara una campaña de ventas en una de las regiones de los almacenes para aumentar la demanda en una unidad. Si sólo se consideran los costos de transporte, ¿en qué región debe realizarse la campaña? Los costos para suministrar a los almacenes desde F_1 son:

Almacén	*Ruta utilizada*	*Costo*
W_1	Directa	\$0.90
W_2	Directa	1.00
W_3	Indirecta	1.00

Esto demuestra que W_1 tiene una ventaja de ubicación de 10 centavos con respecto a los otros dos almacenes, lo cual significa que costaría 10 centavos menos cubrir la demanda de una unidad adicional en la región W_1 que en las demás.

El conocimiento de estas ventajas de la ubicación puede ser muy útil para decisiones empresariales acerca de la expansión de una planta o de las regiones donde debe intentarse aumentar las ventas.

RESUMEN



El problema de transporte es un caso especial del problema general de programación lineal y existe un método de solución simplificado para aquellos problemas que se ajustan a su estructura. Se encuentra primero una solución factible con $F + W - 1$ rutas; luego se evalúa cada una de las rutas no utilizadas calculando su costo indirecto. Si el costo directo es menor que el indirecto, entonces se añade la ruta directa. Este proceso se repite hasta que no sea favorable ninguna de las rutas no utilizadas. Cuando la oferta no es igual a la demanda hay que crear fuentes ficticias de suministro o demanda.

Objetivos múltiples y programación por metas

En la programación lineal se maximiza o se minimiza un objetivo sujeto a restricciones. Pero en muchos problemas importantes, sobre todo en el sector público, el decisor trata de lograr varios objetivos. En el capítulo 6 se analizó la toma de decisiones con objetivos múltiples para problemas generales. Aquí se tratarán los objetivos múltiples en el contexto de los problemas de programación lineal.

[6] Así como sucede con los precios duales en la programación lineal, la ventaja de la ubicación es un valor marginal. Se mantiene sólo dentro de un intervalo limitado de variaciones en la capacidad o en las demandas.

Tabla 13-8 Costos y beneficios para las actividades forestales

	Actividad	
	Limpieza (variable X_1, por hectárea)	*Brechas contra incendio (variable X_2, por kilómetro)*
Costos:		
Costo (dólares)	$500	$500
Fuerza de trabajo requerida (horas)	150	50
Beneficios:		
Crecimiento de árboles (unidades)	10	-5
Refugio para animales (unidades)	-10	60

Considere como ejemplo el gerente de un bosque provincial. Las leyes de la provincia pueden especificar que el gerente debe administrar el bosque de manera que se estimule el crecimiento de los árboles, que aumenten los refugios y los alimentos para los animales y que, por supuesto, lo haga con el menor costo posible.

Suponga que hay dos actividades que puede poner en marcha el gerente: limpiar el bosque (cortar los arbustos) y abrir brechas contra incendio. Sea:

X_1 = Hectáreas de tierra limpiada
X_2 = Kilómetros de brechas contra incendio.

Cada una de estas actividades tiene un costo y requiere mano de obra. Además, cada una produce beneficios (quizás negativos) en función del crecimiento de árboles y del refugio para animales.

Como se presenta en la tabla 13-8, la limpieza cuesta 500 dólares por hectárea, requiere 150 horas de trabajo por hectárea y el resultado es 10 unidades de crecimiento de árboles, pero reduce el refugio para animales en 10 unidades por cada hectárea que se limpie. Las brechas contra incendio cuestan 500 dólares por kilómetro, se requieren 50 horas de trabajo por kilómetro, el crecimiento de los árboles se reduce en 5 unidades por cada kilómetro que se corte y el refugio para animales aumenta en 60 unidades por kilómetro de brecha.

El problema de decisión para el gerente del bosque es determinar X_1 y X_2, es decir, cuántas hectáreas limpiar y cuántos kilómetros de brechas cortar. El gerente sólo dispone de 90 000 horas de trabajo. Además, las condiciones del bosque limitan la apertura de brechas contra incendio a un máximo de 303 kilómetros. El gerente tiene una restricción de presupuesto de 350 000 dólares

Las restricciones de este problema se pueden expresar de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} 150X_1 + 50X_2 &\leq 90\,000 \quad \text{(horas de trabajo)} \\ X_2 &\leq 300 \quad \text{(límite de brechas contra incendio)} \\ 500X_1 + 500X_2 &\leq 350\,000 \quad \text{(presupuesto)} \end{aligned}$$

Hay que cumplir con tres objetivos al mismo tiempo. El gerente debe lograr el mayor crecimiento posible de los árboles, proporcionar todo el refugio que pueda a los animales y reducir los costos todo lo posible dentro del presupuesto. Hay varias estrategias para incorporar estos objetivos múltiples, que se describen a continuación.

Método 1: Un objetivo con otros como restricciones

El gerente puede decidir que un objetivo tiene tanta importancia que se impone a los demás. Éstos se pueden incorporar como restricciones con un nivel mínimo. Así, el caso se convierte en un problema normal de programación lineal de maximización de una función objetivo sujeta a restricciones.

El gerente puede decidir, por ejemplo, que lo más importante es el crecimiento de los árboles. Entonces, el objetivo se convierte en:

Maximizar: $10X_1 - 5X_2$

donde los coeficientes 10 y -5 de la tabla 13-8 son el efecto de la limpieza y de las brechas contra incendio en el crecimiento de la madera. Aquí se aplicarían las restricciones de horas de trabajo, de brechas contra incendio y de presupuesto que se mencionaron antes. El gerente también podría especificar que deben existir por lo menos mil unidades de refugio para animales, con la restricción adicional:

$$-10X_1 + 60X_2 \geq 1000$$

donde los coeficientes de -10 y 60 representan el efecto de la limpieza y de las brechas contra incendio en el refugio para animales (véase Tabla 13-8).

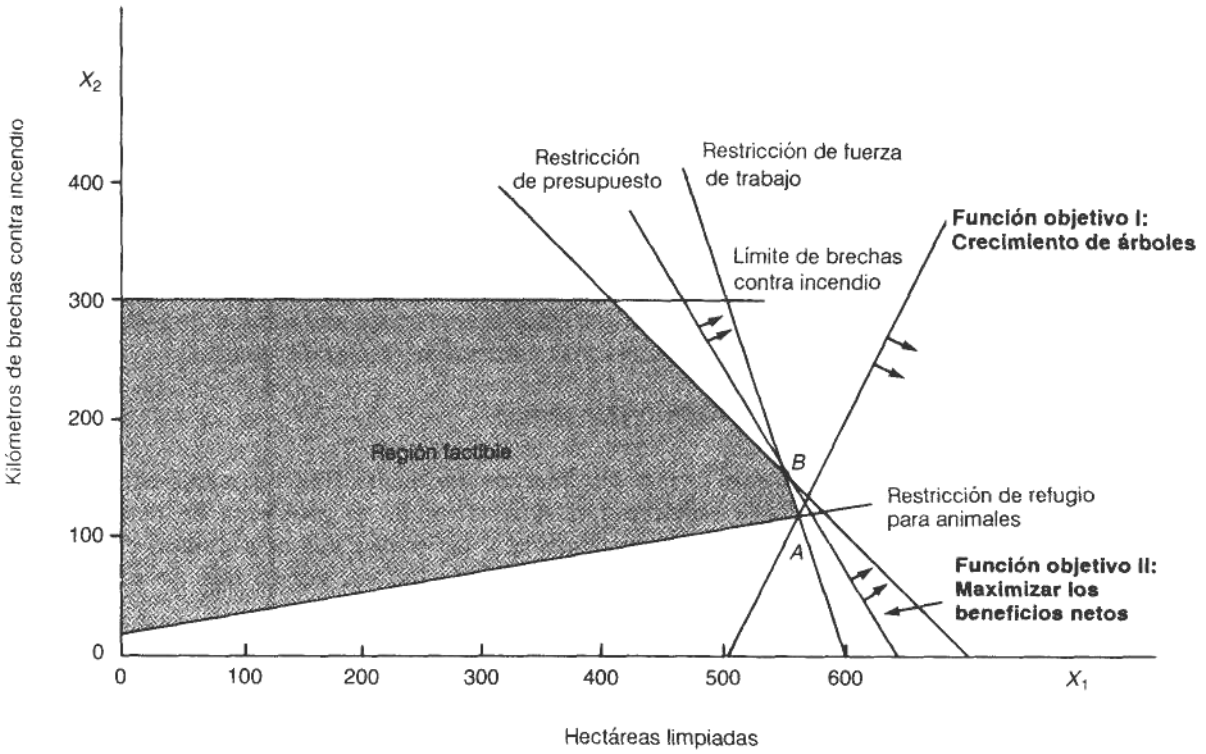
La figura 13-1 representa gráficamente este problema. La región sombreada es la región factible que satisface todas las restricciones, incluyendo la del refugio para animales. El objetivo de maximizar el crecimiento de árboles se obtiene en el punto X_1 - 563 y X_2 - 111, con crecimiento de 5080 unidades de árboles (véase el punto *A* de la figura 13-1).

También sería posible que el gerente prefiriera maximizar el refugio para animales y establecer como restricción un nivel mínimo para el crecimiento de árboles. Otra posibilidad sería especificar niveles mínimos para el refugio de animales y el crecimiento de árboles y minimizar el costo. La mayor dificultad de este método es que no incorpora un equilibrio o *compensación* entre los diversos objetivos. El gerente puede estar más satisfecho si hubiera más refugio para animales y menos crecimiento de árboles, pero no hay manera directa de lograrlo. Podría probar diferentes conjuntos de restricciones hasta obtener una solución satisfactoria, pero éste sería un método muy poco práctico.

Método 2: Definición de compensaciones entre objetivos

Uno de los métodos del capítulo 6 para los problemas con objetivos múltiples era especificar las compensaciones entre los objetivos. En este ejemplo se especificaría cuánto vale una unidad de crecimiento de madera y cuánto una unidad de

Figura 13-1 Solución del ejemplo de la maximización del objetivo de crecimiento de árboles.



refugio de animales, los dos en términos monetarios. Después se establecerían compensaciones entre estos objetivos y los dólares del costo. Con este proceso se podrían maximizar los beneficios monetarios netos totales.

Suponga, por ejemplo, que el gerente decide que una unidad de crecimiento de madera vale 600 dólares y que una unidad de refugio para animales vale 100 dólares. Esto implica que le sería indiferente obtener una unidad adicional de crecimiento de madera, seis unidades de refugio de animales o un ahorro de 600 dólares.

Con base en estos valores se puede calcular el beneficio neto de cada una de las variables de decisión, X_1 y X_2. Recuerde que cada unidad de X_1 (hectárea limpiada) produce 10 unidades de árboles (con valor de 600 dólares cada una), elimina 10 unidades de refugio para animales (a 100 dólares cada unidad) y cuesta 500 dólares. Entonces, el beneficio neto de una unidad de X_1 es:

$$10(\$600) - 10(\$100) - \$500 = \$4500$$

Así mismo, el cálculo del beneficio neto de un kilómetro de brecha contra incendio es -5 ($600) + 60($100) - $500 = $2500. Entonces, el problema de programación lineal para maximizar los beneficios netos es:

$$\text{Maximizar: } 4500X_1 + 2500X_2$$

$$\begin{aligned} \text{Sujeto a: } & 150X_1 + 50X_2 \leq 90\,000 \\ & X_2 \leq 300 \\ & 500X_1 + 500X_2 \leq 350\,000 \end{aligned}$$

La solución óptima de este problema de programación lineal genera valores de Xi = 550 y X_2 = 150 (véase punto *B,* Fig. 13-1). Esto puede convertirse en unidades de árboles y de refugio para animales: 3750 unidades de árboles y 3500 unidades de refugio.

El secreto del éxito de este método es definir las compensaciones necesarias. Sin embargo, como se señaló en el capítulo 6, la tarea no es sencilla. Para el gerente podría ser muy difícil asignar un valor monetario a una unidad de refugio para animales e incluso algunas personas rehusarían a tratar de hacerlo.

Método 3: Programación por metas

Un tercer método es el de la *programación por metas.* El decisor especifica metas deseables para cada objetivo y después formula el problema de manera que se minimice la variación con respecto a las metas. Lo más común es que se especifiquen las metas en niveles deseables (altos), por lo que no es posible satisfacer todas al mismo tiempo.

Suponga que el gerente del ejemplo establece como metas deseables la producción de 5000 unidades de árboles y 6000 unidades de refugio para animales. Las restricciones serían entonces:

$$\begin{aligned} \textbf{Árboles:} \quad & 10X_1 - 5X_2 + U_1 - E_1 = 5\,000 \\ \textbf{Refugio para animales:} \quad & -10X_1 + 60X_2 + U_2 - E_2 = 6\,000 \\ \textbf{Costo:} \quad & 500X_1 + 500X_2 + U_3 - E_3 = 350\,000 \\ \textbf{Fuerza de trabajo:} \quad & 150X_1 + 50X_2 \leq 90\,000 \\ \textbf{Brechas contra incendio:} \quad & X_2 \leq 300 \end{aligned} \qquad \textbf{(13–1)}$$

Las variables U_1 y U_2 representan las diferencias entre el plan y el logro de la meta de 5000 unidades de árboles y la meta de 6000 unidades de refugio para animales. Por lo tanto, se pueden considerar como la *carencia* (o faltante). La variable U_3 representa los ahorros, en dólares, por debajo del nivel del presupuesto.

Las variables E_1, E_2 y E_3 representan las cantidades en que se *exceden* las metas especificadas, es decir, el excedente.

Un método para formar la función objetivo en la programación por metas es minimizar las carencias. De esta manera, el objetivo sería minimizar (U_1 + U_2 - U_3), con lo cual se minimizarían las cantidades que faltan para cumplir con las metas de árboles y refugio para animales y maximizar la carencia de costo (por medio de la minimización del negativo de U_3), todo ello sujeto a las-restricciones antes mencionadas. La sencillez de este método es muy atractiva, pero existe una hipótesis fundamental: un ahorro unitario en dólares tiene el mismo valor que la carencia de una unidad de árboles y de una unidad de refugio para animales. La función objetivo otorga el mismo peso a todos.

Un método, más apropiado, consiste en definir específicamente las compensaciones entre los objetivos. Suponga que el gerente decide que la carencia de una unidad de árboles vale 600 veces más que un dólar de ahorro y que la carencia de una unidad de refugio para animales vale 100 veces el ahorro de un dólar. En este caso la función objetivo sería:

Minimizar: $600\,U_1 + 100U_2 - U_3$

sujeta, una vez más, a las restricciones (13-1).

Esta función objetivo alcanza el valor cero si se excede alguna de las metas de crecimiento de árboles o refugio para animales. El gerente puede decidir que estos excedentes tienen valor y asignar también pesos a las variables *E*. Por ejemplo, el valor de un excedente de una unidad de árboles puede ser de 50 dólares, y el de una unidad excedente de refugio para animales puede ser de 25 dólares. Así mismo, un dólar por encima del presupuesto (E_3) puede ser cinco veces más importante que el ahorro de un dólar ($t/_3$). Ahora, la función objetivo se convierte en:

Minimizar: $600U_1 + 100U_2 - U_3 - 50E_1 - 25E_2 + 5E_3$

La minimización de los valores negativos de U_3, E_1 y E_2 equivale a la maximización.

Una solución óptima para este problema de programación lineal requiere la limpieza de 550 hectáreas y el corte de 150 kilómetros de brechas contra incendio, con lo cual se cubre exactamente el presupuesto. Con esta solución faltan 250 unidades para alcanzar la meta de los árboles y 2500 unidades para la meta de refugio de animales. Hay otra solución básica óptima, la cual requiere la limpieza de 537 hectáreas y 189 kilómetros de brechas contra incendio, lo que representa una carencia de 579 unidades con respecto a la meta de los árboles pero sí se alcanza la meta del refugio para animales. Sin embargo, para ello hay que exceder el presupuesto en 13 160 dólares.

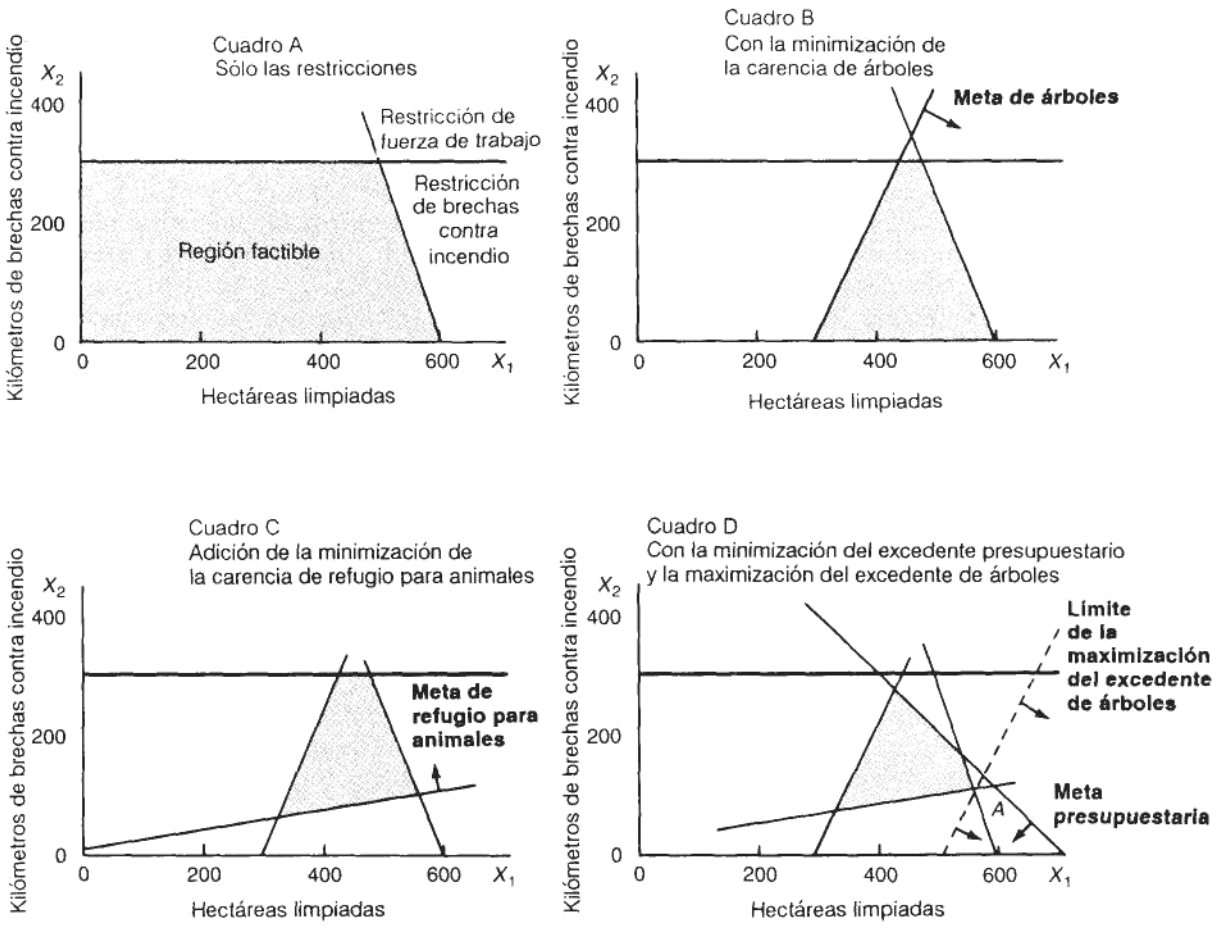
Ahora se puede observar que la programación por metas difiere del segundo método (definición directa de las compensaciones) en dos aspectos:

1. Se incorporan metas específicas y se asigna un valor diferente a la carencia y al excedente con respecto a la meta. En el método 2 se asignaba un solo peso a cada objetivo y se aplicaba a toda la gama de valores posibles.
2. La función objetivo se define en función de los propios objetivos. En el segundo método había que calcular los beneficios netos de cada actividad y luego se incluían los beneficios en la función objetivo. Con el método de programación de metas es más sencillo ver el valor relativo que se asigna a cada uno de los objetivos.

Método 4: Programación por prioridades

Suponga que el gerente del ejemplo se rehusa a asignar compensaciones específicas a los diversos objetivos, pero está dispuesto a asignarles prioridades e indicar

Figura 13-2 Pasos del ejemplo de programación por prioridades



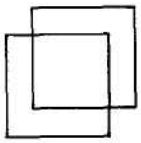
el orden en que debe satisfacerse cada uno. Por ejemplo, suponga que se especifican las siguientes restricciones de metas:

Crecimiento de árboles:
Refugio para animales:
Costo:

El gerente elabora la siguiente lista de prioridades:

1. Minimizar la carencia de crecimiento de árboles (U_1).
2. Minimizar la carencia de refugio para animales (U_2).
3. Minimizar el excedente del presupuesto (E_3).
4. Maximizar el excedente de crecimiento de árboles (E_4).

RESUMEN



APÉNDICE



5. Maximizar el excedente de refugio de animales *(E_2)*.
6. Maximizar los ahorros presupuestarios *(U_3)*.

El método de programación por prioridades intenta alcanzar los objetivos *en secuencia,* en vez de hacerlo *al mismo tiempo*. Ilustraremos este método en forma gráfica.

Considere la figura 13-2. El cuadro A muestra la región factible y sólo considera las restricciones de fuerza de trabajo y el límite de brechas contra incendio. La primera prioridad del gerente es minimizar la carencia de crecimiento de árboles, lo cual se minimiza en el cuadro B hasta que no haya carencia; la región factible se indica con el área sombreada. Si no quedara ninguna región factible, se detendría el proceso de programación por prioridades y sólo se obtendría lo más posible de la meta con mayor prioridad.

Pero, aún queda una región factible, por lo que se considera la siguiente prioridad más alta, o sea, la minimización de la carencia de refugio para animales. Esto se presenta en el cuadro C y también puede minimizarse hasta que no haya carencia; la región factible restante se muestra sombreada.

La meta con la tercera prioridad, minimizar el excedente del presupuesto, se muestra en el cuadro D. Esta meta también se puede cubrir totalmente. Por último se pretende la cuarta meta: maximización del crecimiento de árboles. Con esto se obtiene la solución, la cual se indica como el punto *A* del cuadro D, correspondiente a la limpieza de 563 hectáreas (X,) y a 111 kilómetros de brechas contra incendio *(X_2)*. Como ya no queda región factible, no es posible continuar con las metas con quinta y sexta prioridad.

Se han desarrollado programas de computación especiales para la programación por prioridades. Por supuesto, si el problema tiene dos variables, se puede resolver en forma gráfica; pero, como ya se ha visto, los problemas reales comprenden varias dimensiones y no es posible la solución gráfica. El lector que se interese por el algoritmo de programación por prioridades puede consultar las referencias que se presentan al final del capítulo.

Hay varios métodos para incorporar objetivos múltiples en problemas de programación lineal. Los método más sencillos implican la conversión en una función de un solo objetivo, ya sea ponderando los objetivos o incorporando los objetivos secundarios como restricciones. La programación por metas comprende la definición de metas y la inclusión de diversas variables correspondientes a las desviaciones con respecto a estas metas (ya sean carencias o excedentes). La función objetivo se define para minimizar las desviaciones (las cuales pueden estar ponderadas). La programación por prioridades define en forma parecida las restricciones de las metas, pero implica satisfacer las metas secuencialmente en vez de hacerlo al mismo tiempo.

Problema de transporte expresado en forma convencional de programación lineal

En este apéndice se presenta el problema de transporte con la notación normal de programación lineal.

- F_1, F_2 y F_3 son las capacidades productivas de las tres fábricas.
- W_1, W_2 y W_3 son las necesidades de los tres almacenes.
- $C_{11}, C_{12}, \ldots, C_{ij}, \ldots, C_{33}$ son los costos unitarios relacionados con la fábrica i que abastece al almacén j.
- El costo total de transporte es f (se quiere minimizar f).
- X_{ij} es la cantidad que se transfiere de la fábrica i al almacén y.

La formulación de programación lineal de este problema es:

Minimizar: $f = C_{11}X_{11} + C_{12}X_{12} + \ldots + C_{ij}X_{ij} + \ldots + C_{33}X_{33}$

Sujeto a:

$$
\begin{array}{cccccccccccc}
X_{11} & + & X_{12} & + & X_{13} & & & & & & & = F_1 \\
 & & & & & X_{21} & + & X_{22} & + & X_{23} & & = F_2 \\
 & & & & & & & & X_{31} & + X_{32} & + X_{33} & = F_3 \\
X_{11} & & & + & X_{21} & & & + & X_{31} & & & = W_1 \\
 & X_{12} & & & & + & X_{22} & & & + X_{32} & & = W_2 \\
 & & X_{13} & & & & + & X_{23} & & & + X_{33} & = W_3
\end{array}
$$

Toda $X_ij > 0$. Observe que los coeficientes de todas las X_ij en las ecuaciones de restricción serán 0 o 1 y forman un patrón distintivo. Si todas las variables y las restricciones de un problema de programación lineal se ajustan al patrón anterior, entonces es un problema de transporte y se puede usar el procedimiento especial de este capítulo para resolverlo (no es necesario que el problema tenga que ver con transporte o distribución).

Bibliografía

Ignizio, J. P., *Goal Programming and Extensions,* Lexington, Mass., Lexington Books, 1976.

Ignizio, J. R, *Linear Programming in Single and Multiple Objective Systems,* Englewood Cliffs, N.J., Prentice Hall, 1982.

Lee, S. M., *Goal Programming for Decision Analysis,* Nueva York, Van Nostrand Reinhold, 1973.

Véase también la bibliografía que aparece al final del capítulo 10.

Problemas con respuestas

13-1. Use el método de transporte para elaborar una tabla de asignación óptima de envíos de las fábricas a los almacenes:

Fábricas	*Cantidad disponible*
F_1	10
F_2	20
F_3	30
Total	60

Almacenes	*Cantidad requerida*
W_1	15
W_2	28
W_3	17
Total	60

Los costos unitarios de envío son:

	W_1	W_2	W_3
F_1	\$0.90	\$0.95	\$1.30
F_2	1.00	1.40	0.95
F_3	1.05	0.85	1.10

13-2. Use el método de transporte para elaborar una tabla de asignación óptima de envíos de las fábricas a los almacenes:

Fábricas	*Cantidad disponible*
F_1	20
F_2	15
F_3	30
Total	65

Almacenes	*Cantidad requerida*
W_1	10
W_2	26
W_3	29
Total	65

Los costos unitarios de envío son:

	W_1	W_2	W_3
F_1	\$1.10	\$1.12	\$1.20
F_2	1.20	1.00	1.05
F_3	1.10	0.90	0.95

13-3. Use el método de transporte para tratar de elaborar una tabla de asignación óptima de envíos de las fábricas a los almacenes. Use los datos y la solución inicial que se presentan a continuación.

Costos unitarios y unidades suministradas y requeridas

Destino / *Fuente*	W_1	W_2	W_3	*Unidades disponibles*
F_1	\$0.80	\$0.85	\$1.45	10
F_2	\$0.90	\$0.70	\$1.05	20
F_3	\$1.00	\$0.60	\$1.15	30
Unidades requeridas	10	28	22	60

Primera solución

Destino / *Fuente*	W_1	W_2	W_3	*Unidades disponibles*
F_1	10			10
F_2		20		20
F_3		8	22	30
Unidades requeridas	10	28	22	60

13-4. Una empresa fabrica dos productos, A y B. La contribución al beneficio y la utilización de recursos por unidad de producto se presentan a continuación.

	Producto A	*Producto B*
Contribución al beneficio (dólares por unidad)	15	10
Utilización de recursos:		
Tiempo de máquina (horas por unidad)	4	5
Materia prima (toneladas por unidad)	5	4
Mano de obra calificada (horas por unidad)	1	5
Mano de obra no calificada (horas por unidad)	2	0

La empresa dispone de un máximo de 100 horas de tiempo de maquina y 30 horas de mano de obra no calificada.

Hay escasez de materia prima. Las oficinas centrales asignaron 100 toneladas, con instrucciones de usar lo menos posible y devolver todo el excedente para usarlo en otras divisiones. Se pueden obtener más de las 100 toneladas asignadas, pero sólo si es "absolutamente necesario".

La empresa tiene mano de obra calificada con 75 horas disponibles en tiempo regular. A estos trabajadores calificados no les gusta trabajar tiempo extra, pero lo harán si se requiere. La gerencia quiere aprovechar al máximo el tiempo regular de estos trabajadores calificados.

La empresa tiene un objetivo de beneficios de 300 dólares, meta que espera alcanzar o superar.

a. Defina las variables de decisión y las restricciones de tiempo de máquina y mano de obra no calificada.

b. Formule las restricciones de metas de la mano de obra calificada, las materias primas y los beneficios. Tome en cuenta las carencias y los excedentes en es tas restricciones.

c. Suponga que la gerencia asigna costos de 15 dólares por tonelada que se use por encima de la asignación, 10 dólares por hora de tiempo extra de los trabajadores calificados y cinco dólares por hora de tiempo de inactividad de los trabajadores calificados. Además, la materia prima que no se use (por debajo de la asignación) tiene un valor de cinco dólares por tonelada. Un dólar de beneficio tiene el mismo valor, sin importar si se excede o no la meta de beneficios.

Formule la función objetivo de programación por metas.

d. Antes de proseguir con esta parte, verifique que su formulación esté correcta (vea las respuestas al final del libro).

Represente gráficamente el problema de decisión. Primero incluya las restricciones de mano de obra no calificada y tiempo de máquina. Luego incluya las líneas que representan las metas de mano de obra calificada y materia prima. Por último, dibuje la meta de los beneficios.

e. Evalúe los siguientes puntos de solución posibles. Encuentre cada punto en su gráfico y sustituya en las ecuaciones de metas para determinar la carencia o el excedente. Luego sustituya estos valores en las funciones objetivo de (c). Encuentre la solución óptima (con el menor valor). Los puntos son:

(1) Producto A = 8.33 unidades; producto B = 13.33 unidades.
(2) Producto A = 11.11 unidades; producto B = 11.11 unidades.
(3) Producto A = 15 unidades; producto B = 8 unidades.
(4) Producto A = 15 unidades; producto B = 6.25 unidades.

Problemas

13-5. En lugar de usar la primera solución que se presenta con el problema 13-3, resuelva el problema 13-3 a partir de la solución que se muestra en la tabla del lado derecho.

Primera solución alternativa

Fuente \ Destino	W_1	W_2	W_3	Unidades disponibles
F_1	5	5		10
F_2	5		15	20
F_3		23	7	30
Unidades demandadas	10	28	22	60

13-6. Hay tres clasificaciones de trabajadores *(P_1, P_2 y P_3)* que se pueden usar en tres trabajos *(J_1, J_2 y J_3)*. Cada trabajador tiene costo diferente para cada trabajo, como se indica en la tabla de la página siguiente. El número de trabajadores que se requiere para cada trabajo también se incluye en dicha tabla.

Costos directos

Trabajador \ Trabajo	J_1	J_2	J_3	*Trabajadores disponibles*
P_1	\$1.00	\$1.10	\$1.20	10
P_2	\$0.90	\$0.80	\$1.10	15
P_3	\$0.80	\$0.85	\$1.15	20
Trabajadores requeridos		10	30	45

Use el método de transporte para encontrar la asignación óptima.

13-7. Una empresa tiene dos fábricas que abastecen a tres almacenes regionales. Los costos unitarios de transporte son:

Costos unitarios de transporte

	Almacén		
Fábrica	W_1	W_2	W_3
F_1	\$2	\$2	\$5
F_2	4	1	1

La fábrica 2 es vieja y tiene costo variable de manufactura de dos dólares por unidad. La fábrica 1 es moderna y su producción cuesta un dólar por unidad. La fábrica 2 tiene capacidad de 25 unidades y la fábrica 1 tiene capacidad de 40 unidades. Las necesidades de los almacenes son:

Almacén	*Unidades requeridas*
W_1	20
W_2	10
W_3	25

¿Cuánto debe enviar cada fábrica a cada almacén?

Recomendación: Sume el costo de manufactura al costo de transporte para obtener un costo por "unidad entregada". Minimice esta cantidad. Establezca también un almacén ficticio para manejar el exceso de capacidad.

13-8. La compañía ABC tiene cuatro fábricas que abastecen a cinco almacenes. Los costos de envío, los requerimientos y las capacidades se indican en las tablas siguientes:

Costos de envío (dólares por caja)

	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5
F_1	1	3	4	5	6
F_2	2	2	1	4	5
F_3	1	5	1	3	1
F_4	5	2	4	5	4

Requerimientos (miles de cajas)		*Capacidades de la fábrica (miles de cajas)*	
W_1	80	F_1	100
W_2	50	F_2	60
W_3	50	F_3	60
W_4	30	F_4	50
W_5	40		

La compañía consideraba el cierre de la cuarta fábrica (F_4) por sus altos costos operativos. Si lo hiciera, se agregarían 30 unidades de capacidad a la fábrica 3. El gerente de transporte se preocupaba por el efecto de esta acción sobre los costos de transporte de la compañía. Él había observado que el almacén 2 *(W_2)* recibía cerca de 30 000 cajas de F_4. Como el costo de envío de F_3 a *W-*, era de cinco dólares (comparado con dos dólares de F_4 a *W_2),* el gerente estimaba que el efecto de cerrar F_4 sería un aumento de 90 000 dólares en los costos de transporte. ¿Está usted de acuerdo con el gerente de transporte? ¿Qué efecto cree que tendría el cierre de F_4 sobre los costos de transporte?

13-9. Remítase al problema 10-14.

a. ¿Es un problema de transporte de programación lineal el apartado *(a)* de dicho problema? ¿Por qué?

b. ¿Es un problema de transporte de programación lineal el apartado *(b)* de dicho problema? ¿Por qué?

13-10. La compañía de transportes Genesee tiene cuatro terminales, A, B, C y D. Al comenzar cada día hay ocho, seis, cuatro y siete tractores en las terminales respectivas. Durante la noche anterior se cargaron los remolques en las plantas E, F, G, H e I con las siguientes cantidades: tres, seis, cinco, seis y cinco, respectivamente. La distancia entre las terminales y las plantas se indica en la tabla "Kilómetros entre las terminales y las plantas".

Kilómetros entre las terminales y las plantas

Terminales \ Plantas	*E*	*F*	*G*	*H*	*I*
A	20	47	17	41	62
B	74	13	52	40	32
C	60	31	51	71	68
D	39	41	37	21	38

¿De qué terminales a qué plantas hay que enviar los tractores si debe minimizarse la distancia total que recorran todos los tractores para recoger los remolques?

13-11. El director de una escuela de administración planifica las inscripciones a los dos programas principales de la escuela: un curso de licenciatura y un curso de nivel master. El director cuenta con 36 profesores titulares y 42 adjuntos. Para impartir los cursos de la licenciatura se requieren 0.02 profesores titulares y 0.03 adjuntos. En otras palabras, por cada 100 estudiantes de licenciatura, la escuela necesita dos profesores titulares y tres adjuntos. Para cada cien estudiantes de grados master se requieren seis profesores titulares y cuatro adjuntos.

El problema del director es determinar cuántos estudiantes de licenciatura y de grado master pueden inscribirse. Las cuotas de un estudiante de master ascienden a 15 000 dólares por año; para la licenciatura son 12 000 dólares por año. El director de la universidad ha decretado que el número de inscripciones en el programa master no puede ser superior al número de inscritos en el programa de licenciatura.

El director tiene tres objetivos. El primero corresponde a los ingresos por cuotas y ha establecido una meta de 15 millones de dólares. Otro objetivo es satisfacer las necesidades de licenciados en administración que tienen las empresas locales, por lo que se ha fijado un nivel de inscripciones de 1000 licenciados. El tercer objetivo es satisfacer la demanda de masters y se ha establecido una meta de 400. Suponga que el director quiere cumplir lo mejor que se pueda con la demanda de licenciados y masters, evitando, de ser posible, las carencias y excedentes. También quiere obtener todos los ingresos posibles por concepto de cuotas.

a. Formule las restricciones para el problema del director como un problema de programación por metas. Tome en cuenta las carencias y los excedentes para las restricciones de las metas.

b. Formule la función objetivo, suponiendo que se han asignado las siguientes ponderaciones a las carencias y a los excedentes:

Producción (equivalente en dólares)	*Objetivo*
15	Carencia de cuotas
30 000	Carencias para cubrir la demanda de licenciados
24 000	Carencias para cubrir la demanda de masters
3	Excedente de cuotas
9 000	Excedente de la meta de licenciados
6 000	Excedente de la meta de masters

c. Represente gráficamente el problema. Represente primero las restricciones que no se apliquen a las metas. Luego dibuje las ecuaciones de las metas. Encuentre la solución óptima. Tal vez tenga que evaluar varios puntos para ver cuál es el óptimo. Considere los puntos que sean intersecciones de las restricciones y las ecuaciones de metas.

d. Suponga que el director desea asignar prioridades a las metas, en el orden que se especifica en *(b)*. La prioridad más alta es minimizar la carencia de cuotas, la siguiente es minimizar la carencia de demanda de licenciados, etc. Use el método de programación por prioridades y resuelva este problema en forma gráfica.

Problemas más difíciles

13-12. Una compañía fabrica dos líneas de sus productos: normales y especiales. Los productos están sujetos a fluctuaciones por temporada. Para que los costos permanezcan bajos, la compañía produce durante los meses de bajo volumen y almacena los bienes para los meses de volumen alto. En la tabla adjunta se proporciona la proyección de ventas para las dos líneas de productos.

La instalación productiva de la fábrica tiene capacidad de 10 000 cajas por mes en el turno regular. Se puede usar tiempo extra, hasta un límite de 8000 cajas por mes. Sin embargo, la producción en tiempo extra cuesta 1.20 dólares más por caja.

El inventario del producto terminado se puede almacenar cualquier número de meses, pero el almacenamiento del producto normal durante un mes cuesta 80 centavos por caja; para el producto especial cuesta un dólar por mes.

¿Cuál es el programa de producción de la compañía que minimiza la producción en tiempo extra y los costos de almacenamiento de inventario?

	Ventas (miles de cajas)		
Mes	*Línea normal*	*Línea especial*	*Total*
Enero	4	2	6
Febrero	6	2	8
Marzo	6	6	12
Abril	8	10	18
Mayo	8	12	20
Junio	4	8	12
Totales	36	40	76

Recomendaciones: Considere los turnos de cada mes como las fuentes; los requerimientos de producto de los meses son los destinos. Después resuelva como un problema de transporte.

13-13. La compañía de productos Zeta tiene cuatro fábricas que abastecer a cinco almacenes. Los costos variables de manufactura y envío de una tonelada de producto de las fábricas a los almacenes se indican como números en la esquina superior izquierda de las casillas de la tabla anexa. Las capacidades de las fábricas y los requerimientos de los almacenes se expresan en miles de toneladas en los márgenes de la tabla. Observe que hay un almacén ficticio (llamado *holgura)* para tener en cuenta la diferencia entre la capacidad total y el total de los requerimientos.

Después de varias iteraciones se obtiene una solución (los números en círculo con pantalla en la tabla). Responda a las siguientes preguntas en forma independiente.

a. ¿Es la solución óptima? De ser así, ¿cuál es costo total?

b. ¿Hay una solución óptima alternativa? De ser así, ¿cuál es?

c. Suponga que se instala nuevo equipo que reduce el costo operativo variable en dos dólares por tonelada en la segunda fábrica (F_2). ¿Es aún óptima la solución? De no ser así, ¿cuál es la nueva solución óptima?

d. Suponga que el costo de transporte de F_1 a W_1 se reduce en dos dólares. ¿Cambia el programa de envíos? De ser así, ¿cuál sería la nueva solución óptima?

e. ¿Cuánto tendría que bajar el costo de manufactura de la fábrica 1 antes de que la producción pueda aumentar a más de 55 000 toneladas?

f. Suponga que las nuevas estimaciones indican que los requerimientos de W_2 serán 25, en lugar de los 20 que se estimaron originalmente. Diga cuál sería el costo adicional total si:
   (1) No se ampliara ninguna de las plantas.
   (2) Se ampliara F_3 en cinco unidades para cumplir con los requerimientos adicionales.

g. Se va a iniciar un programa para aumentar las ventas en uno de los distritos de los almacenes. Si la efectividad del programa fuera la misma en todos los distritos, ¿cuál propondría para llevar a cabo el programa? ¿Por qué? Suponga que el precio de venta es el mismo en todos los distritos.

13-14. Una compañía tiene tres fábricas que abastecen a tres áreas de mercado. Los costos de transporte de las fábricas a los almacenes se presentan en la esquina superior izquierda de las casillas de la tabla adjunta. En el margen de la tabla se presentan las capacidades de las fábricas y los requerimientos de las áreas de mercado.

Después de varias iteraciones se obtiene la solución que se muestra (la solución se indica en círculo con pantalla). Responda las siguientes preguntas en forma independiente.

a. ¿Hay alguna solución que sea igual o mejor que la que se exhibe en la tabla? De ser así, encuéntrela.

b. Suponga que la demanda del destino W_1 aumenta en dos unidades. ¿Qué fábrica suministraría las unidades adicionales? ¿Cuál es el costo adicional de transporte en el sistema? ¿Cuál es la nueva solución?

c. Suponga que el destino W_3 requiere 15 unidades adicionales. ¿Cuáles son las fábricas que proporcionarían las unida des adicionales? ¿Cuáles serían los cos tos adicionales de transporte del sistema?

d. ¿Cuáles serían los ahorros en el costo de transporte si la capacidad de F_3 aumentara 10 unidades?

e. Suponga que el costo de transporte de la fuente F, al destino W_3 baja a dos dólares, en lugar de ser cuatro. ¿Cambiaría la solución? ¿Cuál sería la reducción en costos del sistema?

13-15. Una empresa fabrica cuatro productos, A, B, C y D. El comité ejecutivo se reúne para tratar de decidir cuál será la combinación de productos. El controlador quiere la combinación que obtenga mayor beneficio; el gerente de ventas quiere obtener la mayor cuota de mercado; y el gerente de producción quiere equilibrar las instalaciones productivas. El presidente debe promediar estos objetivos potencialmente conflictivos.

La información de los cuatro productos se presenta en la tabla 13-9.

Destinos / *Fuentes*	W_1	W_2	W_3	W_4	W_5	*Holgura*	*Capacidad*
F_1	17	9	14 (25)	10 (30)	14	0 (20)	**75**
F_2	13 (10)	6 (20)	11 (15)	11	12	0	**45**
F_3	8 (30)	17	9	12	12	0	**30**
F_4	15	20	11 (10)	14	6 (40)	0	**50**
Requerimientos	**40**	**20**	**50**	**30**	**40**	**20**	**200**

Destinos / Fuentes	W_1	W_2	W_3	*Holgura*	*Capacidades*
F_1	2	1 **10**	4	0 **10**	**20**
F_2	1 **10**	2	3 **10**	0 **10**	**30**
F_3	2	1	2 **10**	0	**10**
Requerimientos	**10**	**10**	**20**	**20**	**60**

La tabla muestra las horas por unidad de producto que se requieren para montaje, pruebas y tiempo de máquina, así como el tiempo en los departamentos 1 y 2.

El beneficio por unidad de producto se muestra también en la tabla 13-9. El controlador cree que la empresa debe dar mayor realce a los productos B y C, ya que generan mayor beneficio por unidad. El controlador desea que la empresa tenga beneficios de 10 000 dólares.

El gerente de mercadotecnia considera a cada producto como una venta y, como tal, cuenta como un punto de la cuota del mercado. Un punto de la cuota de mercado equivale a una cuota del 0.01 %. El objetivo del gerente de mercadotecnia es 800 puntos (o sea, el 8% del mercado total).

El gerente de producción señala que la empresa dispone de 3000 horas de montaje, 1000 horas para pruebas y 7500 horas de tiempo de máquina. No hay límites para los departamentos 1 y 2, pero le preocupa el equilibrio de las horas que se trabajan en los dos departamentos y quisiera que el número de horas de trabajo en los departamentos 1 y 2 fuera lo más parecido posible.

El presidente ha decidido asignar ponderaciones a cada objetivo. Un dólar de beneficio vale lo mismo, si está por encima o

Tabla 13-9 (para el problema 13-15)

	Producto			
	A	*B*	*C*	*D*
Recursos:				
Tiempo de montaje (horas)	4	15	5	2
Tiempo de pruebas (horas)	2	2	2	1
Tiempo de máquina (horas)	6	2	10	12
Departamento 1 (horas)	1	2	1	*
Departamento 2 (horas)	½	1	2	*
Metas:				
Beneficio (dólares)	10	50	20	5
Cuota de mercado (puntos)	1	1	1	1

* El producto D requiere dos horas, pero éstas se pueden aplicar en el. departamento 1 o en el 2 o con una combinación de ambos.

por debajo de la meta de 10 000 dólares del controlador. Un punto de cuota de mercado vale 10 dólares si está por debajo de la meta de 800 puntos, pero sólo cinco dólares si está encima. Un desequilibrio de una hora en los departamentos de producción cuesta 10 dólares.

Formule lo anterior como un problema de programación por metas. De ser posible, resuélvalo en un computador. Remítase al

13-16. problema 10-16.

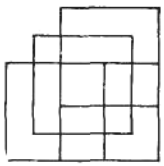
a. ¿Es un problema de transporte de programación lineal el apartado *(a)* de dicho problema? ¿Por qué?

b. ¿Es un problema de transporte de programación lineal el apartado (*b*) de dicho problema? ¿Por qué?

13-17. Remítase al problema 10-26. ¿Es un problema de transporte de programación lineal? ¿Por qué?

13-18. Una forma de obtener una solución factible inicial para un problema de transporte es usar rutas que sean el menor costo de la fila y el menor costo de la columna. Prepare un pequeño ejemplo (dos fuentes y dos destinos) que muestre que la solución óptima no tiene que usar esa ruta.

CAPÍTULO 14



Programación entera y procedimientos de ramificación y acotamiento[1]

Muchos problemas empresariales se podrían formular y resolver con la programación lineal, si no fuera por una circunstancia: requieren soluciones enteras. Por ejemplo, una variable X de un modelo de programación lineal puede indicar si se construye o no una planta nueva. Si $X = 1$, se construirá la planta; si $X = 0$, no habrá planta; y cualquier valor de X situado entre estos dos valores (por ejemplo, $X = 0.56$) no tiene sentido. No hay una garantía de que los procedimientos de solución normales de la programación lineal generen una solución entera.[2]

Para tratar este problema se ha desarrollado una serie de técnicas llamadas **programación entera.** Algunos problemas pueden requerir que todas las variables del problema sean enteros, la **solución sólo de enteros.** Un caso especial de la solución sólo de enteros ocurre cuando todas las variables sólo pueden asumir valores de 0 o 1. El caso más general de la programación entera es aquel en el que se requiere que algunas variables sean enteros, pero las demás pueden tener cualquier valor. A este problema se le conoce como **programación entera mixta.**

La primera parte de este capítulo explica cómo las formulaciones de programación entera pueden representar varios problemas de negocios importantes. En la segunda parte se describen los procedimientos de solución para los problemas de enteros. El apéndice de este capítulo describe la forma de aplicar estos procedimientos a otros problemas combinatorios. Antes de continuar, veremos un problema sencillo de programación entera con dos variables.

---

[1] Deben estudiarse los capítulos 10 y 11, que abarcan la programación lineal, antes de estudiar este capítulo.

[2] Una excepción importante es la resolución de problemas de redes por programación lineal, en la que sí se obtienen soluciones de enteros. El problema de transporte y el problema de la ruta crítica son ejemplos de estos problemas de redes, los cuales se analizan en los capítulos 13 y 20, respectivamente.

Ejemplo Considere el siguiente problema de programación entera:

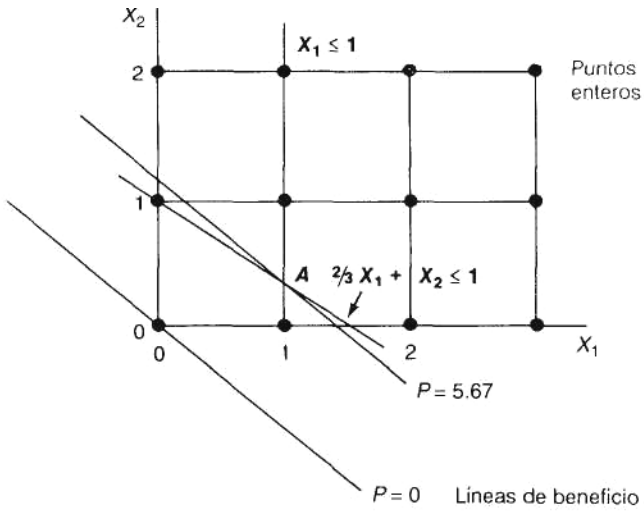
$$\begin{aligned} \text{Maximizar:} \quad & P = 4X_1 + 5X_2 \\ \text{Sujeto a:} \quad & \tfrac{2}{3}X_1 + X_2 \leq 1 \\ & X_1 \leq 1 \\ & X_1, X_2 \geq 0 \\ & X_1, X_2 \text{ enteros} \end{aligned}$$

Las restricciones y la función objetivo se representan gráficamente en la figura 14-1. Las posibles soluciones enteras se señalan con puntos en color.

Si tratamos de resolver este problema sin tomar en cuenta las restricciones de valores enteros, la solución óptima de programación lineal es $X_1 = 1$, $X_2 = \frac{1}{3}$, indicado como *A,* que produce beneficios de 5.67 dólares. Pero esta solución no es entera, ya que $X_2 = \frac{1}{3}$. Se podría ajustar la solución de programación lineal a la solución entera más próxima; en la figura 14-1, la solución entera más cercana al punto *A* es $X_1 = 1$, $X_2 = 0$, que produce beneficios de cuatro dólares. Este redondeo a veces puede producir una solución no factible; por ejemplo, si la segunda restricción fuera $X_1 \leq 0.95$ en lugar de $X_1 \leq 1$, la solución $X_1 = 1$, $X_2 = 0$ no cumpliría las restricciones.

Algo más importante es que la solución redondeada quizás no sea óptima. Considere la solución $X_1 = 0$, $X_2 = 1$ en el ejemplo; esta solución es factible y genera beneficios mayores (cinco dólares), aunque no sea la solución entera "más cercana" a la respuesta que se usó con la programación lineal ordinaria. Al añadir más dimensiones al problema, cada vez es menos deseable el redondeo de la solución y es necesario un método sistemático para encontrar la solución.

Figura 14-1



Antes de describir las maneras de resolver problemas de programación lineal entera, veremos varios problemas que se pueden formular de esta manera.

Formulación de problemas de programación entera

En términos generales, los problemas de programación entera se formulan de manera muy parecida a los problemas normales de programación lineal que se analizaron en el capítulo 10, con la consideración adicional de que una o más variables deben tener valores enteros. Es decir, se establece una función objetivo lineal que se maximizará o minimizará sujeta a restricciones lineales. Sin embargo, hay algunos usos de las variables binarias que son exclusivos de la programación entera. Una variable **cero/uno** o **binaria** es aquella que sólo puede asumir valores de 0 o 1. El valor 1 se puede emplear para indicar la presencia de algo (por ejemplo, una fábrica); 0 indica su ausencia. A continuación se muestra el uso de las variables binarias.

Problema de cargo fijo

Suponga que un producto nuevo contribuirá con cinco dólares por unidad a los beneficios, y que se realiza un gasto único de 100 dólares para preparar la maquinaria para una sesión de producción. El costo es cero si no se producen unidades.

Sea X el número de unidades que se producirán. Entonces, podemos formular el problema para que:

$$\text{Contribución} = \begin{cases} 5X - 100 & \text{si } X > 0 \\ 0 & \text{si } X = 0 \end{cases}$$

Para reescribir la formulación en forma lineal, se introduce una nueva variable, Y, que sólo toma los valores enteros de 0 y 1. Después se maximiza $(5X - 1007)$ con sujeción a las restricciones existentes, más las dos siguientes:

$$Y \leq 1 \qquad Y \text{ es un entero}$$
$$\text{y } X \leq MY \qquad \text{donde } M \text{ es un número muy grande}$$

Observe que cuando $Y = 0$, la segunda restricción hace que X sea 0 y la contribución $(5X - 100Y)$ también es cero; cuando $Y = 1$, no existe un límite práctico para X; además, la cantidad de cargo fijo de 100 dólares se deduce del beneficio. Por lo tanto, la utilización de la variable binaria o cero/uno Y permite formular este tipo de problema con restricciones lineales.

Los problemas del tipo de cargo fijo son comunes en los negocios. Hay un costo de inversión para construir una planta antes de que pueda empezar la producción. Por lo general hay costos fijos si se emprende un segundo turno o se abre un almacén nuevo.

Observe en el ejemplo anterior que el valor de la función objetivo y las restricciones son *lineales,* es decir, comprenden sólo una constante multiplicada por una variable (no hay potencias ni productos de variables). Un error que en ocasiones se comete en las formulaciones de programación entera es que se emplean funciones no lineales. Por ejemplo, el problema de cargo fijo se podría formular como la maximización de $5XY - 100Y$, donde Y es una variable binaria como las anteriores. Observe que se cumplen los requisitos, ya que no hay beneficio si $Y = 0$ y el beneficio es $5X - 100$ si $Y = 1$. No obstante, el término $5XY$ no es lineal porque implica el producto de las dos variables, X y Y. Por lo tanto, esta formulación no representa un problema válido de programación lineal entera.

Problema de tamaño de lote

Un problema similar es aquel en el cual se requiere un nivel mínimo para emprender una actividad. Por ejemplo, una empresa puede tener la necesidad de comprar una cantidad mínima de 50 unidades de cierto producto. Sea X el número de unidades que se compran; entonces, $X = 0$ o $X \geq 50$.

Esta situación se puede formular como una variable binaria Y y las siguientes restricciones:

$$X \leq MY \quad (M \text{ es un número muy grande})$$
$$X \geq 50Y$$

Observe que si $Y = 0$, por la primera restricción, X debe ser 0. Si $Y = 1$, por la segunda restricción, X debe ser por lo menos 50.

Restricciones mutuamente excluyentes

Algunas veces, en una situación de decisión, hay que mantener una restricción u otra, pero no ambas. Por ejemplo:

$$\text{Sea:} \quad 5X_1 + 2X_2 \leq 10$$
$$\text{O:} \quad 3X_1 - 4X_2 \leq 24$$
$$\text{Pero no ambas}$$

En la programación entera se puede manejar esta situación con una variable binaria Y si se usan las siguientes restricciones modificadas:

$$5X_1 + 2X_2 \leq 10 + MY$$
$$3X_1 - 4X_2 \leq 24 + M(1 - Y)$$

Observe que si $Y = 0$, la primera restricción es efectiva, pero el término independiente de la segunda se hace muy grande y por lo tanto no es efectiva. Por

el contrario, si $Y = 1$, la segunda restricción limita pero no la primera, ya que MY es muy grande.

Ejemplos de formulaciones enteras

Problema de presupuesto de capital

Suponga que una empresa tiene N proyectos $(i = 1, 2 \ldots N)$ en los cuales debe invertir capital. Para cada proyecto i, sea:

P_i = Valor neto actual (rendimiento del proyecto i por encima del costo, expresado en dólares de valor actual)[3]
C_i = Inversión de capital en el instante cero para el proyecto i
R_{1i} = Flujo de efectivo en el año 1 para el proyecto i
R_{2i} = Flujo de efectivo en el año 2 para el proyecto i
.
.
.
R_{ti} = Flujo de efectivo en el año t para el proyecto i

donde cada uno de los valores P, C y R es una constante conocida.

La empresa desea seleccionar un *conjunto* de proyectos para maximizar el valor neto actual. Un proyecto se lleva a cabo en su totalidad o se rechaza; es decir, la empresa no puede seleccionar una fracción del proyecto. Las restricciones pueden ser de diversos tipos, por ejemplo:

1. Cantidad limitada de fondos disponible para inversión en el instante cero; llámese cantidad K.
2. Flujos positivos de efectivo mínimos requeridos en los años futuros $1, 2, \ldots$; sean estos requerimientos F_t.

Para cada proyecto se define una variable binaria Y_i, donde $Y_i = 1$ si se lleva a cabo el $i$ésimo proyecto y $Y_i = 0$ si no se efectúa. Ahora se puede formular este ejemplo de presupuesto de capital como un problema de programación entera, de la siguiente manera:

Maximizar el valor actual neto total que se obtenga:

$$P_1Y_1 + P_2Y_2 + P_3Y_3 + \ldots + P_NY_N$$

Sujeto a:

Capital disponible para inversión:

$$C_1Y_1 + C_2Y_2 + \ldots + C_NY_N \leq K$$

[3] Para calcular el valor neto actual, los fondos que se reciben en el futuro se descuentan con una tasa de interés apropiada. La determinación de esta tasa no es un problema trivial. Véase el apéndice del capítulo 2.

Flujo de efectivo requerido en el primer periodo:

$$R_{11}Y_1 + R_{12}Y_2 + \ldots + R_{1N}Y_N \geq F_1$$

Flujo de efectivo requerido en el segundo periodo:

$$R_{21}Y_1 + R_{22}Y_2 + \ldots + R_{2N}Y_N \geq F_2$$

Flujo de efectivo requerido en el *i*ésimo periodo:

$$R_{i1}Y_1 + R_{i2}Y_2 + \ldots + R_{iN}Y_N \geq F_i$$

Además de estas restricciones, pueden existir otras sobre combinaciones específicas de proyectos. Por ejemplo, los proyectos 3 y 4 pueden ser opciones mutuamente excluyentes, de manera que la empresa quisiera incluir en el conjunto el proyecto 3 o el 4 (o quizás ninguno), pero *no ambos*. Se puede agregar la siguiente restricción para lograrlo:

$$Y_3 + Y_4 \leq 1$$

Observe que esta restricción permitiría la realización del proyecto 3 ($Y_3 = 1$) o la del proyecto 4 ($Y_4 = 1$), pero no ambos.[4] Si se requiriera exactamente uno de los proyectos, lo anterior sería una igualdad:

$$Y_3 + Y_4 = 1$$

Pero si tuviera que incluir por lo menos uno de los proyectos (posiblemente los dos), la restricción sería entonces:

$$Y_3 + Y_4 \geq 1$$

Otro ejemplo. Suponga que debe incluirse el proyecto 5 si se incluye el proyecto 6, pero no a la inversa. Por ejemplo el proyecto 5 podría ser la construcción de una fábrica en Nueva Inglaterra y el proyecto 6 podría ser la adición de una segunda línea de producción a la fábrica. Es obvio que la segunda línea no puede añadirse si no hay fábrica, pero la fábrica se puede construir sin agregar la segunda línea. La siguiente restricción satisface estas condiciones:

$$Y_6 \leq Y_5$$

Observe que Y_i puede asumir valores de 0 y 1; sin embargo, Y_6 sólo puede ser 1 si Y_5 también es 1. Entonces, se cumplen las condiciones requeridas.

La resolución de este problema de programación entera daría como resultado un subconjunto de variables Y iguales a 1. Los proyectos asociados con estas

[4] Es necesario hacer una advertencia. Con frecuencia es fácil formular este tipo de restricciones con expresiones como $Y_3 \cdot Y_4 - 0$, lo que requeriría que $Y_3 = 0$ o $Y_4 = 0$ o ambos. Sin embargo, esta restricción no es lineal porque comprende el producto de dos variables. La programación lineal entera requiere restricciones lineales y una función objetivo lineal.

variables Y se seleccionarían para el presupuesto de capital, ya que satisfacen todas las restricciones y maximizan la función objetivo (mayor valor actual total). Las otras variables Y tendrían valor de cero; éstos son los proyectos rechazados. Lo anterior es otro ejemplo en el cual todas las variables son binarias (0 o 1).

El máximo valor actual neto del problema se debe comparar con la solución que se obtendría al relajar una o más de las restricciones, de manera que pueda estimarse el costo de las restricciones. Si así se desea, puede modificarse el modelo para incluir inversiones en años futuros y sus flujos de efectivo. Recuerde que al ampliar el alcance del modelo también se amplía la cantidad de entradas que se requieren y es probable que la confiabilidad de estas entradas no sea muy buena.

Problema de expansión de capacidad

Muchas empresas con productos de demanda creciente se enfrentan a la decisión de en qué momento añadir capacidad de producción y cuánto agregar. Considere, como ejemplo, una empresa de suministro de energía eléctrica que ha estimado la demanda de energía en su región en los próximos nueve años. Sea D_1 la demanda proyectada para el $t$ésimo año ($t = 1, 2, \ldots, 9$) por encima de la demanda actual. Supongamos que se pueden construir tres plantas generadoras de distinto tamaño, designadas con i ($i = 1, 2, 3$). Sea K_i la capacidad y C_i el costo de construcción de la instalación del $i$ésimo tamaño.

La empresa quiere minimizar el costo descontado de las nuevas instalaciones, sujeto a la disponibilidad de capacidad suficiente para satisfacer la demanda. Sea a, el factor de valor actual neto para el año t (α_1 es un número, menor que 1, de una tabla de valor actual). Sea Y_{it} una variable binaria que toma el valor 1 si se construye una instalación de tamaño i en el año t. Así, $Y_{25} = 1$ indica que se construirá una instalación de tamaño 2 en el año 5. La función objetivo es entonces:

Minimizar:

$$\alpha_1[C_1Y_{11} + C_2Y_{21} + C_3Y_{31}] + \alpha_2[C_1Y_{12} + C_2Y_{22} + C_3Y_{32}] + \alpha_3[C_1Y_{13} + C_2Y_{23} + C_3Y_{33}] + \ldots + \alpha_9[C_1Y_{19} + C_2Y_{29} + C_3Y_{39}]$$

El primer término entre corchetes representa el costo de cualquier instalación que se agregue en el primer año; el segundo término representa lo mismo para el segundo año, etc. Las restricciones requieren que se agregue capacidad suficiente para cumplir con la demanda adicional esperada. Para el primer año:

$$K_1Y_{11} + K_2Y_{21} + K_3Y_{31} \geq D_1$$

Para satisfacer la demanda D_2 correspondiente al segundo año, se dispone de la capacidad agregada el primer año (ecuación anterior) más la que se agregue en el segundo año:

$$[K_1Y_{11} + K_2Y_{21} + K_3Y_{31}] + [K_1Y_{12} + K_2Y_{22} + K_3Y_{32}] \geq D_2$$

Así mismo, para el tercer año:

$$[K_1Y_{11} + K_2Y_{21} + K_3Y_{31}] + [K_1Y_{12} + K_2Y_{22} + K_3Y_{32}] + [K_1Y_{13} + K_2Y_{23} + K_3Y_{33}] \geq D_3$$

y así para cada año.

Observe que las restricciones anteriores requieren que la capacidad *acumulada* sea igual o mayor que la demanda del año.

Pueden existir otras restricciones relativas al número de instalaciones de distintos tamaños, con base en aspectos técnicos o de otro tipo. Por ejemplo, si no se pueden construir más de cuatro instalaciones del primer tamaño, se agregaría una restricción como la que sigue:

$$Y_{11} + Y_{12} + Y_{13} + \ldots + Y_{19} \leq 4$$

Tamaño y ubicación de fábricas

Suponga que una empresa introduce un producto nuevo y debe decidir cuál será la ubicación y el tamaño de las fábricas que elaborarán el producto. La empresa quiere minimizar los costos de manufactura y distribución así como los costos de construcción y operación de las instalaciones.

Hay tres lugares disponibles, en los cuales puede construirse una fábrica pequeña o una grande. En uno de los lugares es posible construir una fábrica enorme. La tabla 14-1 muestra los costos y capacidades de estas alternativas. El costo anual de la tabla 14-1 incluye los costos adicionales de la instalación así como el costo anualizado de la construcción.

La empresa debe distribuir su producto en cuatro regiones. El costo de distribución desde cada lugar de las fábricas a cada región y los requerimientos de las regiones se muestran en la tabla 14-2.

El problema de la empresa es decidir cuáles lugares usar, cuál debe ser el tamaño de la fábrica que construya en los lugares elegidos y cuánto debe enviar cada fábrica a cada región.

Las variables se pueden definir como:

A1 = Envíos (en miles de unidades) del lugar A a la región 1
A2 = Envíos (en miles de unidades) del lugar A a la región 2
.
.
.
C4 = Envíos (en miles de unidades) del lugar C a la región 4.
PAS = Producción (en miles de unidades) de una planta pequeña (S) en el lugar A
PAL = Producción (en miles de unidades) de una planta grande (L) en el lugar A
.
.
.

Tabla 14-1 Costos y capacidades

Ubicación	*Tamaño*	*Costo anual (miles de dólares)*	*Capacidad (miles de unidades)*	*Costo de manufactura (dólares por unidad)*
A	Pequeño	1 000	600	5.00
	Grande	1 500	1 200	4.00
B	Pequeño	1 200	600	5.00
	Grande	1 600	1 200	4.00
	Enorme	2 000	2000	3.50
C	Pequeño	900	600	6.00
	Grande	1 400	1 200	5.00

PCL = Producción (en miles de unidades) de una planta grande (L) en el lugar C
YAS = Variable binaria que es igual a 1 si se construye una planta pequeña (S) en el lugar A y 0 en caso contrario.
YAL = Variable binaria que es igual a 1 si se construye una planta grande (L) en el lugar A y 0 en caso contrario.

.
.
.

YCL = Variable binaria que es igual a 1 si se construye una planta grande (L) en el lugar C y 0 en caso contrario.

La formulación de este modelo se presenta en la figura 14-2 con el paquete LINDO que se describió en el capítulo 10.[5] LINDO es un producto de *software* disponible para microcomputadores y computadores de gran tamaño para resolver problemas de programación lineal y entera binaria. La resolución de este problema se ilustrará en una sección posterior del capítulo.

La función objetivo que se pretende minimizar contiene el costo anual multiplicado por las variables binarias (por ejemplo, 1000 YAS), los costos de distribución multiplicados por el número de unidades enviadas por la ruta dada (por ejemplo, 2 A2) y el costo de manufactura multiplicado por las unidades fabricadas (por ejemplo, 5 PAS). El primer conjunto de restricciones (números 2 a 5 en la figura 14-2) garantiza que se cumplan las demandas regionales. Por ejemplo:

$$A1 + B1 + C1 = 500$$

requiere que los envíos a la región 1 desde los lugares A, B y C cumplan con la demanda de 500 unidades de dicha región.

El segundo conjunto de restricciones (6 a 12) limita la ca ^acidad de producción. Por ejemplo la restricción 6 se obtiene de:

[5] Véase Linus Sclirage, *Linear, Integer, and Quadratic Programming with LINDO,* cuarta edición, South San Francisco, Calif., Scientific Press, 1989.

Tabla 14-2 Costos de distribución (dólares/unidad) y requerimientos

De la fábrica en el lugar \ *A*	*Región 1*	*Región 2*	*Región 3*	*Región 4*
A	1	2	3	4
B	2	3	2	3
C	4	3	2	1
Requerimientos de la región (miles de unidades)	500	200	700	800

$$PAS \leq 600\ YAS \text{ o}$$

sea

$$-600\ YAS + PAS \leq 0$$

Esto garantiza que la producción en el lugar A con una fábrica pequeña no excederá 600 unidades si YAS = 1 (es decir, si se construye una fábrica pequeña en el lugar A) y que sea 0 si YAS = 0.

El siguiente conjunto de restricciones (13 a 15) comprende restricciones de equilibrio. Por ejemplo:

$$Al + A2 + A3 + A4 \leq PAS + PAL \text{ o}$$

sea

$$Al + A2 + A3 + A4 - PAS - PAL \leq 0$$

requiere que los envíos totales del lugar A (es decir, Al + A2 + A3 + A4) sean menores o iguales que la producción de una instalación ya sea pequeña o grande (PAS + PAL).

El último conjunto de restricciones (16 a 18) limita cada lugar a una sola instalación. Por ejemplo:

$$YBS + YBL + YBH \leq 1$$

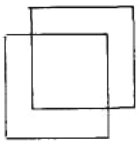
requiere que a lo sumo una de las tres variables sea 1. En otras palabras, en el lugar B se puede construir una planta pequeña, una grande o una enorme, o ninguna.

LINDO reorganiza la función objetivo y las restricciones para que las variables binarias (cero/uno) sean las primeras (es decir, las de la izquierda). El último enunciado de la figura 14-2, el cual indica que hay siete variables enteras, implica que las primeras siete variables (las variables *Y)* son las enteras.

Figura 14-2 Modelo de ubicación y tamaño de fábricas: Formulación LINDO

```
MIN          1000 YAS + 1500 YAL + 1200 YBS + 1600 YBL + 2000 YBH
             + 900 YCS + 1400 YCL + A1 + 2 A2 + 3 A3 + 4 A4
             + 2 B1 + 3 B2 + 2 B3 + 3 B4 + 4 C1 + 3 C2 + 2 C3
             + C4 + 5 PAS + 4 PAL + 5 PBS + 4 PBL + 3.5 PBH
             + 6 PCS + 5 PCL
SUJETO A
              2)   A1 + B1 + C1 = 500
              3)   A2 + B2 + C2 = 200
              4)   A3 + B3 + C3 = 700
              5)   A4 + B4 + C4 = 800
              6) - 600 YAS + PAS <= 0
              7) - 1200 YAL + PAL <= 0
              8) - 600 YBS + PBS <= 0
              9) - 1200 YBL + PBL <= 0
             10) - 2000 YBH + PBH <= 0
             11) - 600 YCS + PCS <= 0
             12) - 1200 YCL + PCL <= 0
             13)   A1 + A2 + A3 + A4 - PAS - PAL        <= 0
             14)   B1 + B2 + B3 + B4 - PBS - PBL - PBH <= 0
             15)   C1 + C2 + C3 + C4 - PCS - PCL        <= 0
             16)   YAS + YAL          <= 1
             17)   YBS + YBL + YBH <= 1
             18)   YCS + YCL          <= 1
END
VARIABLES - ENTERAS     = 7
```

RESUMEN



Un modelo de programación lineal entera requiere que algunas o todas las variables sean enteras. La formulación de un modelo de programación lineal entera es similar a la de los modelos normales de programación lineal, pero la restricción de enteros permite incluir cargos fijos, restricciones mutuamente excluyentes y conceptos relacionados.

Solución de problemas de programación entera

El procedimiento símplex del capítulo 12 que se usó para resolver problemas de programación *lineal* no siempre produce soluciones *enteras*. Por lo tanto no sirve como herramienta directa para resolver problemas de programación lineal. No obstante, hay ocasiones en las cuales se puede redondear una solución no entera de programación lineal para dar una solución entera. Si la solución redondeada es factible y tiene beneficios similares a los que se obtuvieron para el problema no entero, es probable que sea adecuado el procedimiento de redondeo. Sin embargo, en muchos problemas importantes no servirá este procedimiento. Específicamente, si el problema contiene variables binarias como las que se presentaron en las formulaciones anteriores de este capítulo, el redondeo

generalmente producirá soluciones no factibles o soluciones que no se aproximen al óptimo, como se mostró en la figura 14-1. En consecuencia, se requiere un procedimiento de solución diseñado en forma específica para problemas enteros. Se han desarrollado varios de estos procedimientos.

Una de las técnicas se denomina método del **plano cortante.** Es una variante del método símplex y de hecho comienza con la solución símplex del problema de programación lineal, sin tomar en cuenta las restricciones de enteros. Después se añaden al problema las nuevas restricciones *(planos cortantes* o, simplemente, *cortes)* que (1) hacen que no sea factible la solución óptima no entera anterior, pero (2) no excluyen las soluciones enteras factibles. Se obtiene una nueva solución de programación lineal y se repite el proceso (es decir, se agregan nuevos cortes) hasta encontrar una solución entera. Este procedimiento tiene ciertas características teóricas (por ejemplo, se puede demostrar que se obtendrá finalmente una solución entera). En ocasiones existen problemas de cálculo, aunque las investigaciones más recientes con procedimientos complejos de plano cortante han mostrado resultados prometedores.[6] No obstante, presentaremos otro método de solución llamado *ramificación y acotamiento,* que sirve para problemas de programación entera y para otros tipos de problemas combinatorios. Se ha demostrado que el procedimiento de ramificación y acotamiento se puede realizar en computadora para una amplia gama de problemas.

Algoritmo de ramificación y acotamiento

Cuando se requiere que un problema tenga una solución entera, ello significa que hay un número finito de puntos de solución posibles. En teoría es posible usar la *enumeración completa y* evaluar todas las soluciones posibles para encontrar la óptima. Si sólo hay unas cuantas variables enteras, la enumeración es factible y puede ser el procedimiento de solución más eficiente. Sin embargo, los cálculos serían muy complicados para enumerar todas las soluciones de la mayoría de los problemas reales, pero la enumeración completa podría no ser necesaria si hubiera una manera de eliminar grupos completos de soluciones. La técnica de ramificación y acotamiento es un método de llevar a cabo dicho proceso.

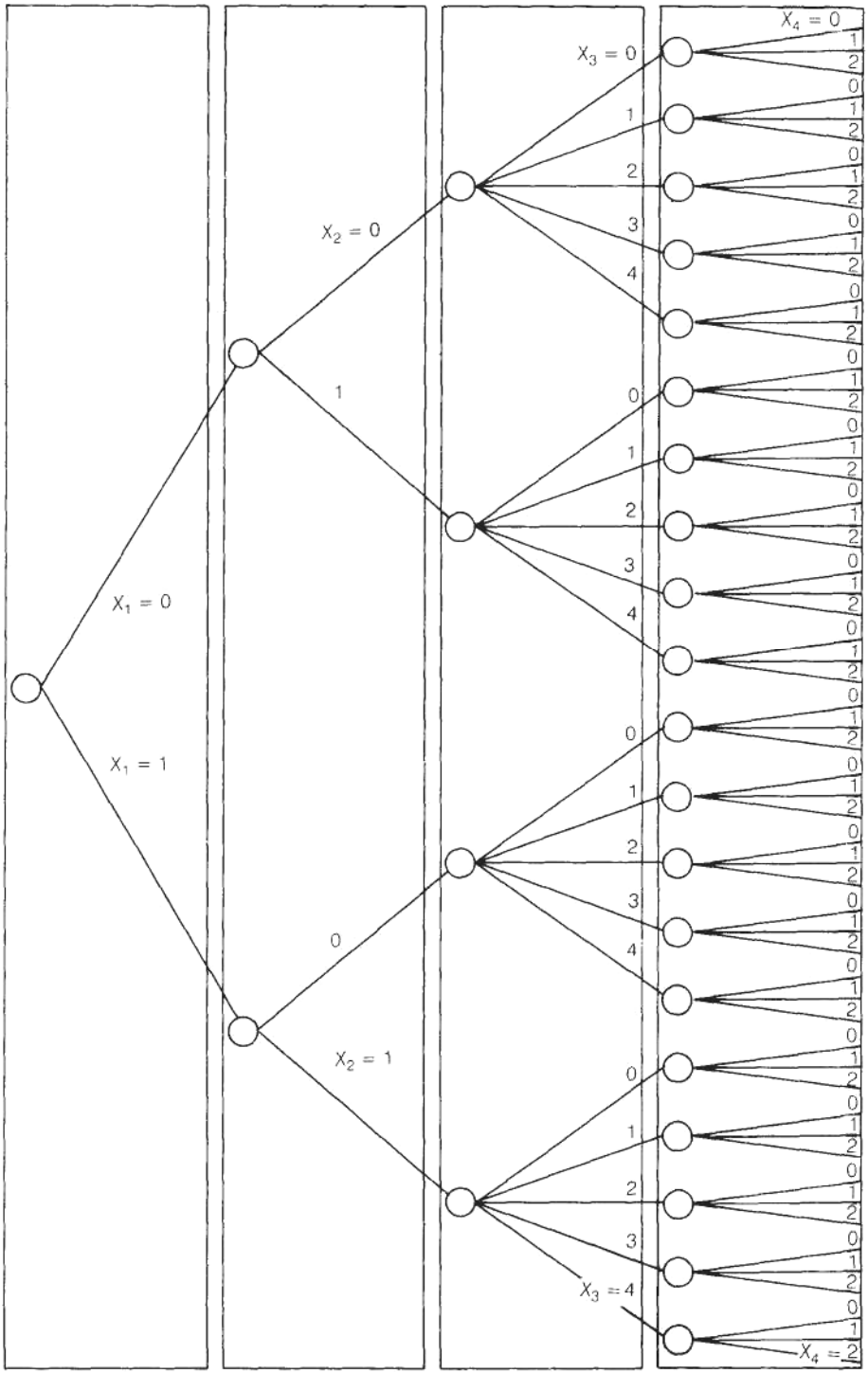
Árbol de posibilidades de solución

En los problemas enteros hay un número finito de soluciones posibles que se pueden representar con un **diagrama de árbol.** La mejor forma de mostrarlo es un ejemplo. Considere el siguiente problema de programación entera:

---

[6] Véase H. Crowder, E. L. Johnson y M. Padberg, "Solving Large-Scale Zero-One Linear Programming *Problems" Operations Research,* septiembre-octubre de 1983.

Figura 14-3 Árbol que muestra todas las soluciones enteras posibles para $X_1 \le 1, X_2 \le 1, X_3 \le 4, X_4 \le 2$



$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{Maximizar:} & P = & 6X_1 & + & 3X_2 & + & X_3 & + & 2X_4 & \\
\text{Sujeto a:} & X_1 & + & X_2 & + & X_3 & + & X_4 & \leq & 8 \\
& 2X_1 & + & X_2 & + & 3X_3 & & & \leq & 12 \\
& & & 5X_2 & + & X_3 & + & 3X_4 & \leq & 6 \\
& X_1 & & & & & & & \leq & 1 \\
& & & X_2 & & & & & \leq & 1 \\
& & & & & X_3 & & & \leq & 4 \\
& & & & & & & X_4 & \leq & 2 \\
\multicolumn{10}{l}{X_1, X_2, X_3, X_4 \text{ todos enteros}}
\end{array}
$$

Observe que las restricciones $X_1 \leq 1$ y $X_2 \leq 1$ de hecho significan que X_1 y X_2 son variables binarias. La variable X_3 puede tomar cinco valores (0, 1, 2, 3, 4) y la variable X_4 puede tener tres valores. Por lo tanto si sólo se consideran las últimas cuatro restricciones, hay $2 \cdot 2 \cdot 5 \cdot 3 = 60$ soluciones posibles. La enumeración de estas 60 soluciones se presenta gráficamente en la figura 14-3. El orden de las variables en el árbol es arbitrario, pero el final del árbol debe tener 60 ramas, una para cada solución. Observe que muchas de estas soluciones no son factibles; es decir, no satisfacen las tres primeras restricciones.

Si se tratara de un problema pequeño, como éste, un computador podría evaluar muy rápidamente las 60 posibilidades. Pero si el problema crece ya no es práctica una evaluación completa.[7]

El método de **ramificación y acotamiento** está diseñado para reducir la búsqueda cortando ramas enteras del árbol de posibilidades, con lo cual se limita el número de posibilidades a investigar. La idea principal de la eliminación de las ramas es:

> *Se puede eliminar una rama si se puede demostrar que no contiene una solución factible mejor que otra ya obtenida.*

Para usar de manera efectiva el procedimiento de ramificación y acotamiento se requiere un proceso para *acotar* o encontrar un *límite superior* para todas las soluciones posibles que pertenezcan a una rama (se necesita un *límite inferior* en el caso de minimización). La solución del problema ordinario equivalente de programación lineal proporciona un límite adecuado.

Considere el problema anterior y resuélvalo como un problema de programación lineal con el método símplex (es decir, omita el requisito de que sean enteros). La solución es:

$$X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 3.33, X_4 = 0.89$$

[7] Para verlo, considere un problema con 10 variables enteras, cada una de las cuales puede tener cinco valores enteros (0, 1, 2, 3 o 4). El número de soluciones posibles es 5^{10} - 9 765 625. La enumeración y evaluación de todas estas posibilidades sería un camino largo y tedioso. Por lo tanto, se requiere una forma de limitar la búsqueda a un conjunto más pequeño de soluciones posibles.

lo cual no es una solución entera.[8] El beneficio es $P = 11.11$. Esta cifra representa el beneficio máximo que puede obtenerse, dadas las tres primeras restricciones. Sabemos que no puede existir ninguna solución, por lo tanto tampoco una solución entera, con beneficio mayor que 11.11. Entonces, el valor 11.11 es una *cota* de todas las soluciones del problema. Se puede encontrar de la misma manera una cota (límite superior) para cada una de las ramas.

En la figura 14-4 se ilustran los pasos del procedimiento de ramificación y acotamiento para el problema del ejemplo. Los números de los círculos indican la secuencia de las rondas para el desarrollo del árbol y para el procedimiento de ramificación y acotamiento.

Solución del ejemplo por ramificación y acotamiento

Ronda 1 El primer paso es resolver el caso como un problema ordinario de programación lineal. Si tenemos suerte, la solución puede ser entera, pero incluso cuando no lo sea, la solución inicial de programación lineal es un buen punto de partida. La solución de programación lineal para el ejemplo es $X_1 = 1$, $X_2 = 0$, $X_3 = 3.33$, $X_4 = 0.89$ y el beneficio es $P = 11.11$. No es una solución entera, por lo que hay que continuar.

Antes de proseguir, observe que hay una solución entera obvia, $X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0$, con beneficio $P = 0$. Es poco probable que sea la solución óptima, pero es una solución inicial, "la mejor solución de apoyo".

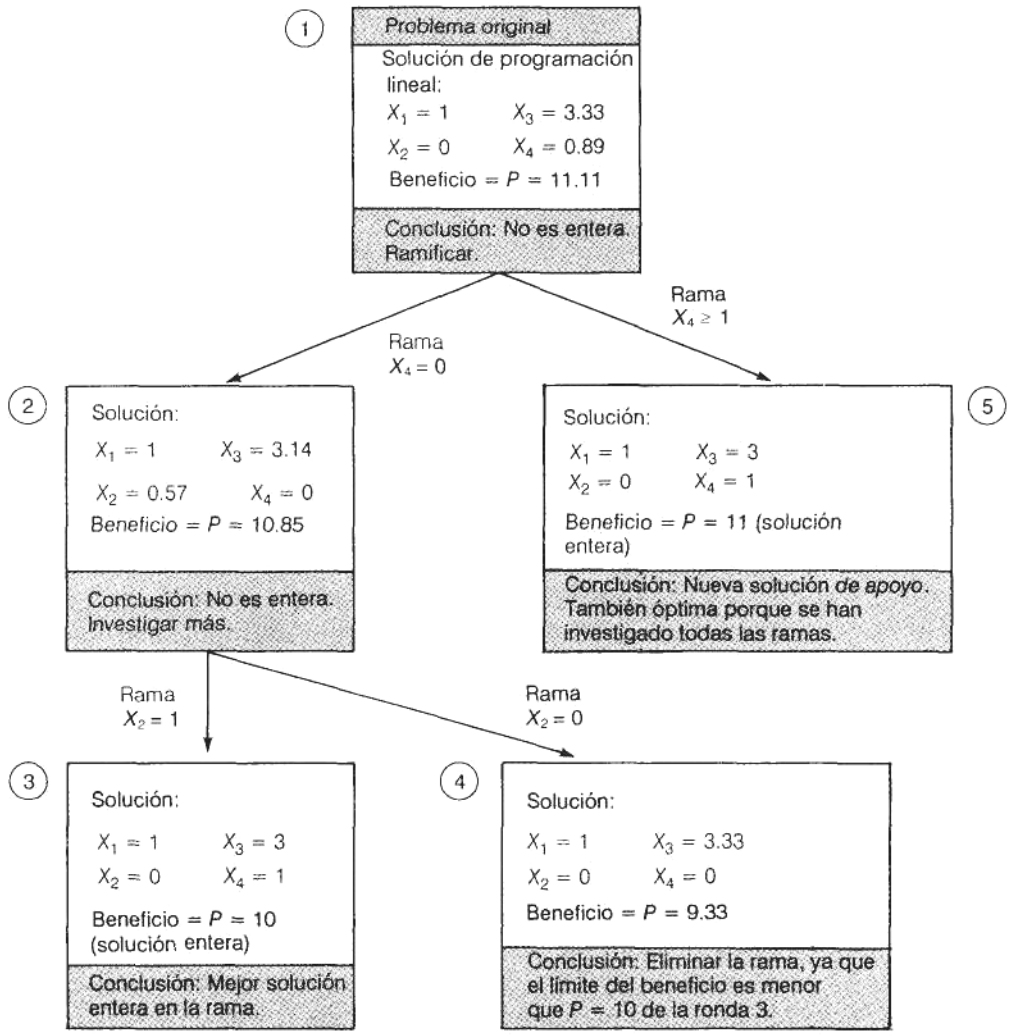
Ronda 2

Paso 1. Empezar La solución entera factible inicial es $X_1 = X_2 = X_3 = X_4 = 0$, con beneficio $P = 0$.

Paso 2. Ramificar Ahora hay que seleccionar una variable y construir *ramas.* La variable a seleccionar es arbitraria. Un procedimiento que parece útil consiste en ramificar a partir de variables que no son enteras en la etapa actual. En la ronda 1, las variables X_3 y X_4 no son enteras y se escoge arbitrariamente X_4 para la ramificación. En la solución anterior $X_4 = 0.89$. Por lo tanto, un par de ramas razonables serían $X_4 = 0$ o $X_4 \geq 1$. Observe que esta ramificación divide todas las soluciones posibles en *dos grupos:* aquellas donde $X_4 = 0$ y aquellas para las cuales $X_4 \geq 1$; corno X_4 tiene que ser un entero, no es posible que esté entre 0 y 1. El procedimiento define el primer par de ramas que se muestran en la figura 14-4. Seleccionamos en forma arbitraria la rama $X_4 = 0$ para la investigación inicial. Para representar esta rama, reemplazamos la última restricción $(X_4 \leq 4)$ en el problema del ejemplo por la restricción $X_4 = 0$. El problema se convierte ahora en:

[8] El problema ordinario de programación lineal ha "relajado" u omitido las restricciones relativas a los valores enteros de las variables; a esto se le conoce en ocasiones como *relajamiento* del problema de programación entera.

Figura 14-4 Resumen de los pasos de la solución del primer problema ejemplo



Maximizar: $P = 6X_1 + 3X_2 + X_3 + 2X_4$

Sujeto a:

$$\begin{aligned} X_1 + X_2 + X_3 + X_4 &\leq 8 \\ 2X_1 + X_2 + 3X_3 &\leq 12 \\ 5X_2 + X_3 + 3X_4 &\leq 6 \\ X_1 &\leq 1 \\ X_2 &= 1 \\ X_3 &\leq 4 \\ X_4 &= 0 \end{aligned}$$

Paso 3. Acotar La solución de programación lineal para este problema es $X_1 = 1$, X_2 0.57, $X_3 = 3.14$, $X_4 = 0$. El beneficio es $P = 10.85$ y este valor es una *cota* para todas las soluciones de la rama $X_4 = 0$ (es decir, para todas aquellas soluciones donde $X_4 = 0$).
Paso 4. Comparar Compare la mejor solución de apoyo con la cota que acaba de generar. La mejor solución de apoyo entera tiene beneficio $P = 0$, mientras que la cota es $P = 10.85$; por lo tanto, aún no se puede eliminar esta rama y continúa la investigación de la rama.

Ronda 3
Paso 2. Ramificar Seleccione una nueva variable para la ramificación; digamos, X_2 (véase Fig. 14-4). Observe que X_2 no es entera en la solución lineal anterior. La variable X_2 sólo puede asumir dos valores, 0 o 1, por lo que únicamente hay dos ramas posibles: $X_2 = 0$ o $X_2 = 1$. Esto significa que se dividen las soluciones posibles en dos grupos: aquellas que tienen $X_2 = 0$ y las que tienen $X_2 = 1$. (Recuerde que aún nos encontramos en la rama $X_4 = 0$ y que por lo tanto sólo se tratan las soluciones posibles donde $X_4 = 0$.)

Se selecciona arbitrariamente la rama $X_2 = 1$ y se sustituye esta restricción en el problema anterior, en lugar de $X_2 \leq 1$. El nuevo problema es:

$$
\begin{array}{lrcrcrcrcl}
\text{Maximizar:} & P = & 6X_1 & + & 3X_2 & + & X_3 & + & 2X_4 & \\
\text{Sujeto a:} & & X_1 & + & X_2 & + & X_3 & + & X_4 & \leq 8 \\
 & & 2X_1 & + & X_2 & + & 3X_3 & & & \leq 12 \\
 & & & & 5X_2 & + & X_3 & + & 3X_4 & \leq 6 \\
 & & X_1 & & & & & & & \leq 1 \\
 & & & & \mathbf{X_2} & & & & & \mathbf{=\ 1} \\
 & & & & & & X_3 & & & \leq 4 \\
 & & & & & & & & \mathbf{X_4} & \mathbf{=\ 0}
\end{array}
$$

Paso 3. Acotar La solución de programación lineal para este problema es: $X_1 = 1, X_2 = 1, X_3 = 1, X_4 = 0$, con beneficio $P = 10$. Observe que la solución resultó ser entera.
Paso 4. Comparar Esta solución entera es mejor que la *mejor solución de apoyo (*$P = 0$) y se convierte en la nueva "mejor solución de apoyo". Además, no hay que investigar más esta rama porque ya se tiene lo óptimo para la rama. Entonces, para el conjunto de soluciones posibles donde $X_4 = 0$ y $X_2 = 1$, no hay ninguna mejor que la que se acaba de obtener. Sin embargo, hay otras ramas que deben revisarse.

Ronda 4
Paso 2. Ramificar Regrese a la rama $X_2 = 0$ (véase Fig. 14-4) y selecciónela para investigación. Se considera ahora el conjunto de las soluciones posibles para las cuales $X_2 = 0$ (todavía dentro del conjunto donde $X_4 = 0$). El problema que debe resolverse es el mismo que el anterior (ronda 3, paso 2) con la restricción $X_2 = 0$ que reemplaza a $X_2 = 1$.
Paso 3. Acotar La solución de programación lineal para este problema es: $X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 3.33, X_4 = 0$, con beneficio $P = 9.33$.

Paso 4. Comparar Este límite es *menor que* el mejor que se tiene hasta ahora (P 10, de la ronda 3, paso 3). Por lo tanto, se puede eliminar toda la rama de las investigaciones posteriores. No puede contener una solución entera con beneficio mayor que 10, pues la mejor solución sin restricciones sólo tiene beneficio de 9.33.

Ronda 5
Paso 2. Ramificar Regrese por el árbol hasta la rama $X_4 \geq 1$ que se creó en la ronda 2, paso 3 (véase Fig. 14-4).
Paso 3. Acotar Se resuelve el mismo problema de programación lineal que en el paso 2 de la ronda 2, sustituyendo la restricción $X_4 = 0$ con $X_4 \geq 1$. La solución es $X_1 = 1, X_2 = 0, X_3 = 3, X_4 = 1$ y el beneficio es $P = 11$. Una vez más se trata de una solución entera.
Paso 4. Comparar La solución anterior es entera y es mejor que la mejor solución previa. Por lo tanto se convierte en la nueva *mejor solución de apoyo.* Es una cota para todas las soluciones situadas debajo de la rama ($X_4 > 1$) y ya no hay que investigar más esta rama.
Paso 5. Conclusión Se han investigado todas las ramas y, en consecuencia, la mejor solución de apoyo, la cual se obtuvo en el paso 3 de la ronda 5, es la solución entera óptima, con beneficio $P = 11$.

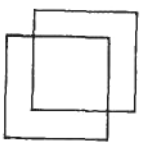
Ha concluido el problema ejemplo. Como se han investigado todas las ramas, la solución óptima es la *mejor solución de apoyo:*

$$X_1 = 1$$
$$X_2 = 0$$
$$X_3 = 3$$
$$X_4 = 1$$
$$P = 11$$

En la figura 14-4 se presenta el resumen de los procedimientos. Observe que no fue necesario investigar muchas ramas (de hecho, sólo fueron cinco) para obtener la mejor solución de las 60 posibilidades que se mostraron en la figura 14-3.

La serie general de pasos para el procedimiento de solución por ramificación y acotamiento se proporciona en el siguiente resumen.

RESUMEN



1. *Inicio.* Encuentre una solución *entera factible inicial* (si es difícil encontrar una solución inicial se puede omitir este paso).
2. *Ramificación.* Seleccione una variable y divida las soluciones posibles en dos grupos. Seleccione una rama, es decir, uno de los grupos, para investigación.
3. *Acotamiento.* Encuentre una *cota o límite* para el problema que define la rama que seleccionó. En nuestro caso se usó como cota la solución de programación lineal del problema entero. Observe que la cota representa el límite superior para todas las soluciones posibles de una rama.
4. *Comparación.* Compare la cota que obtuvo para la rama que investiga con la *mejor solución de apoyo* de las ramas que haya examinado anteriormente. Si

la cota es menor que la mejor detectada hasta el momento, elimine toda la rama nueva y prosiga con ramas que aún no haya evaluado.[9]

Si la cota de la nueva rama es mayor que la mejor solución de apoyo y además la solución es *entera,* se convierte en la nueva *mejor solución de apoyo;* luego continúe con la revisión de otras ramas que no haya considerado.

Si la cota de la nueva rama es mayor que la mejor solución de apoyo, pero la solución *no es entera,* es posible que existan mejores soluciones más abajo, en el árbol. Por lo tanto, avance un nivel en el árbol y la rama (es decir, continúe en el paso 2).

5. *Conclusión.* Cuando haya terminado de revisar todas las ramas, la *mejor solución de apoyo* es la solución óptima.

Discusión

Para la resolución de problemas con el procedimiento de ramificación y acotamiento es conveniente dibujar un árbol como el de la figura 14-4, para llevar el control de las ramas que se han investigado y de las que faltan. El orden de selección de las ramas para el análisis es arbitrario; por ejemplo, pudimos haber comenzado por la ramificación de X_3 en lugar de X_4. Como se mencionó antes, un procedimiento que al parecer funciona de manera eficiente es seleccionar ramas que redondeen una solución no entera. Por ejemplo, si la solución dada es $X = 2.23$ para una variable, con frecuencia es una buena opción investigar las ramas $X \leq 2$ y $X \geq 3$ [10]

Solución por computador

Como ejemplo de la solución por computador de un problema entero mixto de programación lineal, considere el ejemplo de tamaño y ubicación de fábricas que se discutió antes (véase Fig. 14-2 para la formulación). El problema se resuelve con el paquete de *software* LINDO, el cual tiene la capacidad para resolver problemas de programación lineal y entera con variables enteras binarias.

Recuerde que en este ejemplo hay siete variables binarias que se relacionan con la ubicación de una fábrica de tamaño determinado en un lugar específico. Por ejemplo, YBH se refiere a si se construye o no una fábrica enorme (H) en el lugar B. Hay $2^7 = 128$ combinaciones enteras posibles, cada una de las cuales comprende la resolución de un problema de programación lineal.

La solución se muestra en la figura 14-5 y ha sido condensada para eliminar los resultados de menor importancia. La figura 14-6 presenta el procedimiento de

[9] Es posible que el problema de programación lineal que forma una rama no tenga solución factible. En este caso se puede eliminar la rama, ya que es obvio que no contiene soluciones, ni enteras ni fraccionarias.

[10] Los programas de computación que se usan para problemas reales cuentan con *heurística* (reglas empíricas) compleja acerca de cómo desarrollar el árbol y cuáles ramas deben investigarse en primer lugar.

solución en forma de árbol. Los números encerrados en círculos junto a los resultados de la figura 14-5 corresponden a los pasos de la solución de la figura 14-6 (nota: la figura 14-6 contiene información adicional acerca de los pasos, la cual no se incluye en las salidas del computador).

La solución inicial, que se indica con ⓪ en las figuras 14-5 y 14-6, proporciona la solución de programación lineal sin considerar el carácter entero de las variables de tamaño y ubicación. Observe, por ejemplo, que YAL tiene un valor de 0.583. Esta solución tiene costo C = $14 858 y establece una cota inferior para lo que es posible.

Los números ① a ④ de las figuras 14-5 y 14-6 muestran las repeticiones de ramificación del programa, primero asignando 1 a YBH, luego 0 a YCL, después 0 a YAL y a continuación 0 a YCS. En ninguna de estas etapas se detectó una solución entera. Finalmente, el programa asigna 1 a YAS y se encuentra la primera solución entera, señalada con ⑤. Esta solución tiene costo C = $16 200 y YBH = YAH = 1. En otras palabras, se construirá una fábrica enorme en el lugar B y una pequeña en el lugar A.

El programa comienza ahora a retroceder por el árbol y en ⑦ se detecta una nueva solución entera. Esta solución requiere una fábrica enorme en B y una pequeña en C (YBH y YCS = 1). La fábrica enorme produce 2000 unidades (PBH = 2000) y la pequeña sólo genera 200 (PCS = 200). Ésta es la nueva *mejor solución de apoyo,* con costo *C* = $16 100.

Los pasos ⑧ y ⑨ retroceden por el árbol, y eliminan ramas (hay una solución óptima alternativa en ⑨, aunque no se indica en los resultado de LINDO). Los pasos ⑩ a ⑱ exploran otras ramas, todas con costo mayor que la mejor solución hasta el momento, de 16 100 dólares, hasta que el programa anuncia "ENUMERACIÓN COMPLETA" y que la última solución (la que se muestra en ⑦) es la "MEJOR ENCONTRADA". Observe que las ramas se eliminan si el costo excede el mejor costo (hasta ahora de 16 100 dólares) o cuando la rama no tiene solución factible.

Discusión

La formulación de problemas de programación entera es una extensión de las ideas de la programación lineal. De hecho, muchos problemas importantes de la vida real son del tipo entero mixto, con algunas variables restringidas a valores enteros (muchas veces cero/uno) y otras variables ordinarias que pueden asumir cualquier valor no negativo. Sin embargo, como se ha visto, los procedimientos de solución de los problemas enteros son bastante distintos de los correspondientes a los problemas ordinarios de programación lineal. Los cálculos de los problemas enteros son mucho más extensos, ya que requieren la resolución de muchos problemas de programación lineal como parte del proceso.

El campo de la programación entera es un buen ejemplo de los logros en el desarrollo de nuevas técnicas cuantitativas para la resolución de problemas empresariales. Hace poco, aunque se podían formular problemas enteros, sólo era posible resolver los problemas pequeños con la ayuda de mucho tiempo de

Figura 14-5 Solución LINDO para el ejemplo de tamaño y ubicación de fábricas

```
: GO
SOLUCIÓN ÓPTIMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL DETECTADA EN EL PASO 17
      VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO
1)          14858.3300
⓪
VARIABLE        VALOR      COSTO REDUCIDO
   YAS          .000000     650.000000
   YAL          .583333        .000000
   YBS          .000000    1200.000000
   YBL          .000000    1000.000000
   YBH          .350000        .000000
   YCS          .000000     800.000100
   YCL          .666667        .000000
    A1       500.000000        .000000
    A2       200.000000        .000001
    A3          .000000       1.750000
    A4          .000000       2.083333
    B1          .000000        .250000
    B2          .000000        .250000
    B3       700.000000        .000000
    B4          .000000        .333333
    C1          .000000       3.916667
    C2          .000000       1.916667
    C3          .000000       1.666667
    C4       800.000000        .000000
   PAS          .000000        .000000
   PAL       700.000000        .000000
   PBS          .000000        .500000
   PBL          .000000        .000000
   PBH       700.000000        .000000
   PCS          .000000        .000000
   PCL       800.000000        .000000

             . . .

   NÚMERO DE ITERACIONES = 17
   RAMIFICACIONES = 0
①    ASIGNAR 1 A YBH EN 1 COTA  =  -15233.330

②    ASIGNAR 0 A YCL EN 2 COTA  =  -15250.000

③    ASIGNAR 0 A YAL EN 3 COTA  =  -15500.000

④    ASIGNAR 0 A YCS EN 4 COTA  =  -15533.330

⑤    ASIGNAR 1 A YAS EN 5 COTA  =  -16200.000
```

(continúa)

Figura 14-5 *(continuación)*

```
NUEVA SOLUCIÓN ENTERA DE 16200.0 EN LA RAMA 5 PIVOTE 45

          VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO
⑤    1)              16200.0000
     VARIABLE            VALOR
        YAS           1.000000
        YAL            .000000
        YBS            .000000
        YBL            .000000
        YBH           1.000000
        YCS            .000000
        YCL            .000000
         A1         200.000000
         A2             .000000
         A3             .000000
         A4             .000000
         B1         300.000000
         B2         200.000000
         B3         700.000000
         B4         800.000000

                        . . .

      NÚMERO DE ITERACIONES = 45
      RAMIFICACIONES = 5
      COTA DEL ÓPTIMO:       15250.00
⑥     ELIMINAR YAS EN NIVEL    5
⑦     CAMBIAR YCS A 1 CON COTA       -15500.00

 NUEVA SOLUCIÓN ENTERA DE     16100.0  EN LA RAMA  5 PIVOTE  47

          VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO
  1)              16100.0000
 VARIABLE          VALOR
    YAS            .000000
    YAL            .000000
    YBS            .000000
    YBL            .000000
    YBH           1.000000
    YCS           1.000000
    YCL            .000000
     A1            .000000
     A2            .000000
     A3            .000000
     A4            .000000
     B1        500.000000
```

(continúa)

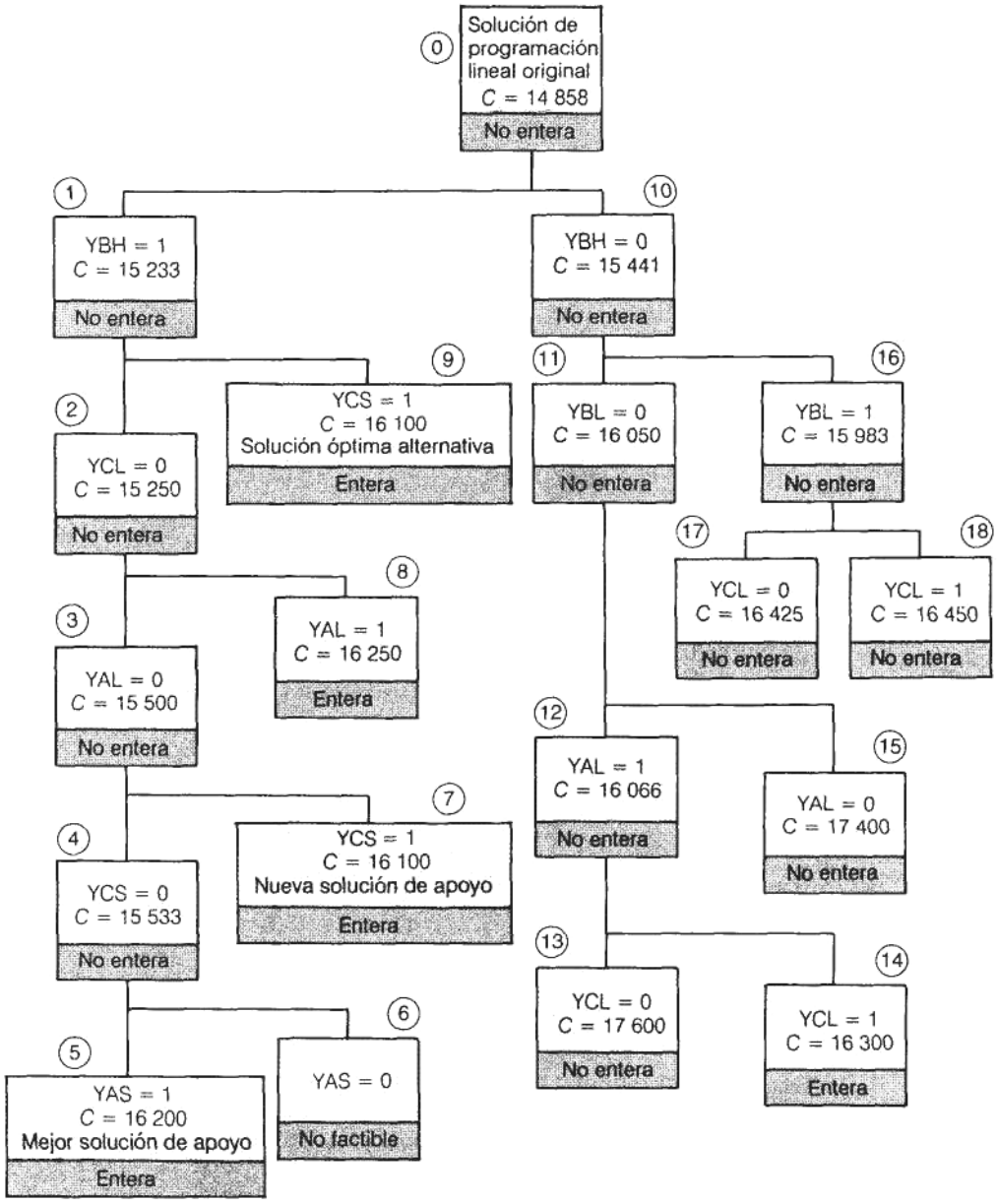
Figura 14-5 *(conclusión)*

```
     B2      200.000000
     B3      700.000000
     B4      600.000000
     C1          .000000
     C2          .000000
     C3          .000000
     C4      200.000000
    PAS          .000000
    PAL          .000000
    PBS          .000000
    PBL          .000000
    PBH     2000.000000
    PCS      200.000000
    PCL          .000000

                 . . .

     NÚMERO DE ITERACIONES = 47
     RAMIFICACIONES = 5
     COTA DEL ÓPTIMO:      15250.00
     ELIMINAR YCS EN NIVEL    4
         CAMBIAR YAL A 1 CON COTA       -15250.00
(8)      ELIMINAR YAL EN NIVEL    3
(9)      ELIMINAR YCL EN NIVEL    2
(10)     CAMBIAR YBH A 0 CON COTA       -15441.67
(11)     ASIGNAR 0 A YBL EN 2 COTA  =  -16050.000
(12)     ASIGNAR 0 A YBL EN 2 COTA  =  -16066.670
(13)     ASIGNAR 0 A YBL EN 2 COTA  =  -17600.000
(14)     ELIMINAR YCL EN NIVEL    4
(15)     CAMBIAR YAL A 0 CON COTA       -16050.00
         ELIMINAR YAL EN NIVEL    3
(16)     CAMBIAR YBL A 1 CON COTA       -15441.67
(17)     ASIGNAR 0 A YCL EN 3 COTA  =  -16425.000
(18)     ELIMINAR YCL EN NIVEL    3
         ELIMINAR YBL EN NIVEL    2
         ELIMINAR YBH EN NIVEL    1
         ENUMERACIÓN COMPLETA. RAMIFICACIONES  =  9  PIVOTES  =  102
 LA ÚLTIMA SOLUCIÓN ENTERA ES LA MEJOR QUE SE HA DETECTADO
```

Figura 14-6 Pasos de la solución del ejemplo de tamaño y ubicación de fábricas



computador. En la actualidad es posible resolver de manera eficiente problemas reales de tamaño medio e incluso algunos problemas especializados de gran tamaño. Este hecho se debe en parte al aumento del tamaño y de la velocidad de los computadores, pero también al desarrollo de buenos programas de computación que generalmente usan variantes de la técnica de ramificación y acotamiento que se describió en este capítulo. En los próximos años veremos cómo retroceden los límites que aún existen en el área de la computación y la programación entera se convertirá en una técnica más popular. Ya se vislumbra lo que puede suceder. Un ejemplo es el problema de las líneas aéreas para programar sus tripulaciones de vuelo (pilotos, copilotos, sobrecargos, etcétera). Este caso se puede formular como un problema de programación entera y, aunque es de gran magnitud, las líneas aéreas lo resuelven y lo utilizan regularmente.

APÉNDICE Procedimientos de ramificación y acotamiento para problemas combinatorios



Un **problema combinatorio** es aquel en el que hay gran número de soluciones factibles, cada una de las cuales representa una variante o combinación de elementos diferentes. Los problemas combinatorios muchas veces se pueden formular con variables binarias y, por lo tanto, se pueden resolver con las técnicas generales de programación entera que se analizaron en este capítulo. En algunos de los casos, la estructura especial del problema permite la construcción de procedimientos de acotamiento especiales que hacen aun más efectiva la técnica de ramificación y acotamiento. Este apéndice presenta un ejemplo de este procedimiento.

Ejemplo: Problema de asignación[11]

Una empresa tiene cuatro plantas y cuatro almacenes. A cada planta se le debe asignar un solo almacén y viceversa. La relación directa (o asignación) de las plantas a los almacenes afectará los costos totales de envío y la meta es obtener la asignación con menor costo total. La tabla 14-3 contiene los costos anuales de envío para cada combinación posible de una planta y un almacén.

Este problema es combinatorio porque hay varias soluciones posibles y cada una implica una respuesta afirmativa o negativa a la pregunta "¿Se asigna la planta *i* al almacén _*j*?" Hay cuatro maneras de asignar la planta *A;* si ya hay una asignación para *A,* hay tres posibilidades de asignación para la planta *B;* luego dos para C, y *D* se asigna al almacén sobrante. De esta manera, el número de asignaciones posibles es $N! = (4)(3)(2)(1) = 4! = 24$. Aunque 24 no es un número muy grande, el mismo problema con 12 plantas y 12 almacenes tendría 12! = 479 001 600 soluciones posibles. Lo anterior es una característica fundamental de los problemas combinatorios: incluso un problema relativamente pequeño (12 plantas y 12 almacenes) tiene gran número de soluciones posibles.

---

[11] Se usará como ejemplo un problema de asignación, aunque existen procedimientos más especializados y eficientes para tratar este problema combinatorio en particular. Véase F. Hillier y G. J. Lieberman, *Introduction to Operations Research,* quinta edición, Nueva York, McGraw-Hill, 1990.

Tabla 14-3 Costos anuales de envío (miles de dólares)

Planta \ Almacén	1	2	3	4
A	10	33	41	30
B	24	17	50	60
C	39	32	62	39
D	22	27	39	37

Procedimiento de acotamiento

Ahora se necesita una manera de determinar un límite inferior del costo (es decir, una cota) para todas las soluciones. Una manera sencilla de hacerlo es asignar a cada almacén la planta con *menor* costo de envío para dicho almacén. Así, para el primer almacén de la tabla 14-3, el envío cuesta menos desde la planta *A;* para el segundo, el envío más barato se hace de la planta *B;* para el tercer almacén la planta menos costosa es la *D;* y para el cuarto almacén es *A*. Observe que no es una asignación factible, ya que se asigna la planta *A* a los almacenes 1 y 4 y se requiere una asignación única de planta a almacenes. No obstante, el procedimiento sirve para obtener un límite inferior, ya que el costo de cualquier asignación factible no puede ser menor que el costo que se obtuvo con este procedimiento. Además, si la asignación que se obtiene con este procedimiento es factible (es decir, si se logra una asignación única de plantas a almacenes), entonces es la óptima.

Desde el punto de vista mecánico, el procedimiento consiste en encontrar el mínimo de cada columna. Los números de cada columna se presentan en un círculo en la tabla 14-4.

El total de los mínimos de las columnas es 96 dólares, lo cual representa la cota inferior del costo.[12] No existe una asignación factible que cueste menos de 96 dólares.

Primera ramificación

Considere el ejemplo con los datos de costo de la tabla 14-3. Hay 24 soluciones posibles. Suponga que en forma arbitraria se decide usar como punto de partida

[12]Un procedimiento de acotamiento mejor sería calcular los mínimos de las filas además de los mínimos de las columnas y después establecer la cota inferior como el máximo de la suma de los mínimos de las columnas y la suma de los mínimos de las filas. No se usó este procedimiento para que el ejemplo fuera lo más claro posible.

Tabla 14-4 Obtención de los mínimos de las columnas para el ejemplo

Planta \ Almacén	1	2	3	4
A	(10)	33	41	(30)
B	24	(17)	50	60
C	39	32	62	39
D	22	27	(39)	37
Mínimos de las columnas	10	17	39	30

la asignación de la planta *A* al almacén 1 (o *no* usar esta asignación). Entonces, el conjunto total de 24 soluciones se divide en dos categorías: las soluciones con el par *(A,*1*) y* las soluciones que no asignan la planta *A* al almacén 1, lo cual se representa con *(A,* 1). Así se obtiene la primera "rama"; el proceso se ilustra en la figura 14-7.

Cotas inferiores

Ahora hay que acotar cada categoría; es decir, se debe calcular un límite inferior para los costos de las soluciones de las categorías. Considere la categoría asociada a la asignación *(A,*1*)*. El costo de esta asignación es de 10 dólares más el costo de las restantes asignaciones planta-almacén. Para encontrar una cota, suponga que se eliminan la primera fila de la tabla 14-3 (pues ya se asignó la planta *A) y* la primera columna (ya se asignó el almacén 1). La nueva tabla de costos se reproduce en la tabla 14-5.

Lo que se busca ahora es calcular una cota inferior para la asignación de las demás plantas, *B, C y D,* a los otros almacenes, 2, 3 y 4. Para ello se calculan los mínimos de las columnas de la misma manera que antes (los mínimos se presentan en un círculo en la Tabla 14-5). El total de estos mínimos es 93 dólares, que sumados al costo de 10 dólares de la asignación 04,1) dan un costo total de 103 dólares. Esta es la cota inferior del costo de esta rama. Observe que la solución que indican los mínimos de las columnas de la tabla 14-5 no es factible, porque la planta *D* se asigna a los almacenes 3 y 4.

Segunda ramificación

Como aún no se detecta una asignación factible, se investiga el árbol a mayor profundidad. Considere la rama asociada con la asignación de la planta *B* al

Figura 14-7 Primera ramificación del problema ejemplo

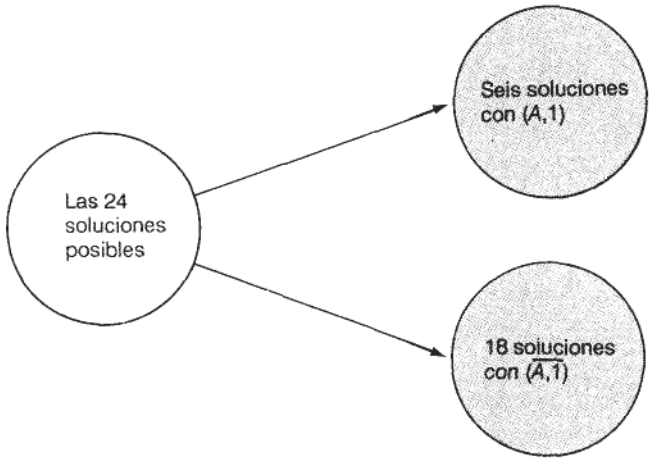


Tabla 14-5 Costos de envío restantes, dada la asignación *(A,*1*)*

Planta \ Almacén	2	3	4
B	(17)	50	60
C	32	62	39
D	27	(39)	(37)
Mínimos de las columnas	17	39	37

almacén 2, representada por (*B*,2). De los seis casos con *(A,*1*),* dos se relacionan con la asignación de (5,2) y los otros cuatro con el caso donde no se asigna *B* al almacén 2; es decir (*B*,2). Esta ramificación se muestra en la figura 14-8.

Ahora se calcula la cota inferior de la rama (*B*,2). Como antes, se eliminan las columnas y las filas de las plantas y de los almacenes que ya se asignaron. Por lo tanto, las filas *A y B y* las columnas 1 y 2 desaparecen de la tabla 14-3, para producir la tabla 14-6.

La cota inferior de esta rama es la suma del costo de 10 dólares de la asignación 04,1), el costo de 17 dólares de la asignación *(B,2) y* el total de los mínimos de las columnas de la tabla 14-6, siendo un total de 103 dólares. Observe que tampoco es una solución factible, ya que la planta *D* se asigna a los almacenes 3 y 4.

Figura 14-8 Segunda ramificación del problema ejemplo

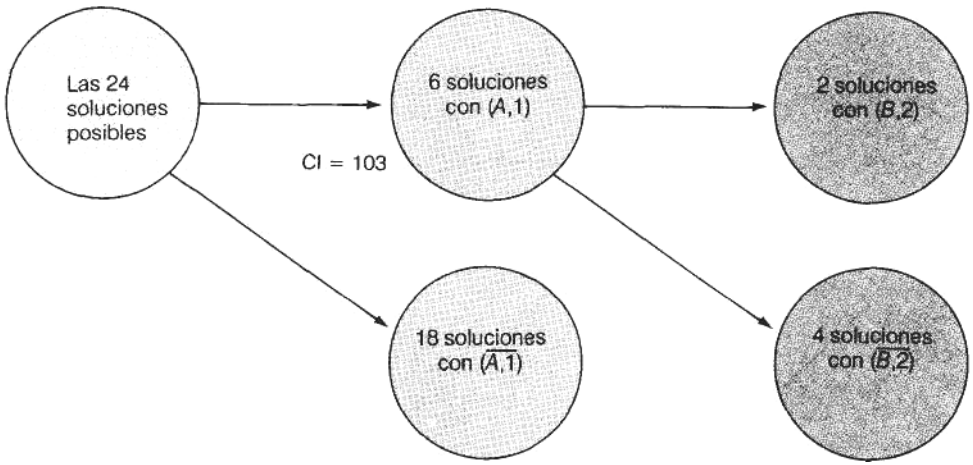


Tabla 14-6 Costos de envío restantes, dadas las asignaciones (*A*,1) y (*B*,2)

Planta \ *Almacén*	*3*	*4*
C	62	39
D	(39)	(37)
Mínimos de las columnas	39	37

Tercera ramificación

Ya se determinaron las dos soluciones de la rama (5,2) y se dibujan en la figura 14-9 para formar un tercer conjunto de ramas. Cada una de estas ramas representa una solución factible, con costos de 126 y 105 dólares, respectivamente. La asignación *(A,1), (B,2),* (C,4), *(D,3),* con costo de 105 dólares, es la mejor y se convierte en la primera *mejor solución de apoyo.*

Rama $\overline{(B,2)}$

Regresamos por el árbol hasta la rama $\overline{(B,2)}$, el conjunto de soluciones donde no se asigna *B* al almacén 2 [todo ello dentro del conjunto (*A*,l)]. Los costos de este caso se presentan en la tabla 14-7. Observe que hay un asterisco en la fila *B,* columna 2, para indicar que no debe considerarse esta posibilidad. La cota inferior

Figura 14-9 Tercera ramificación del problema ejemplo

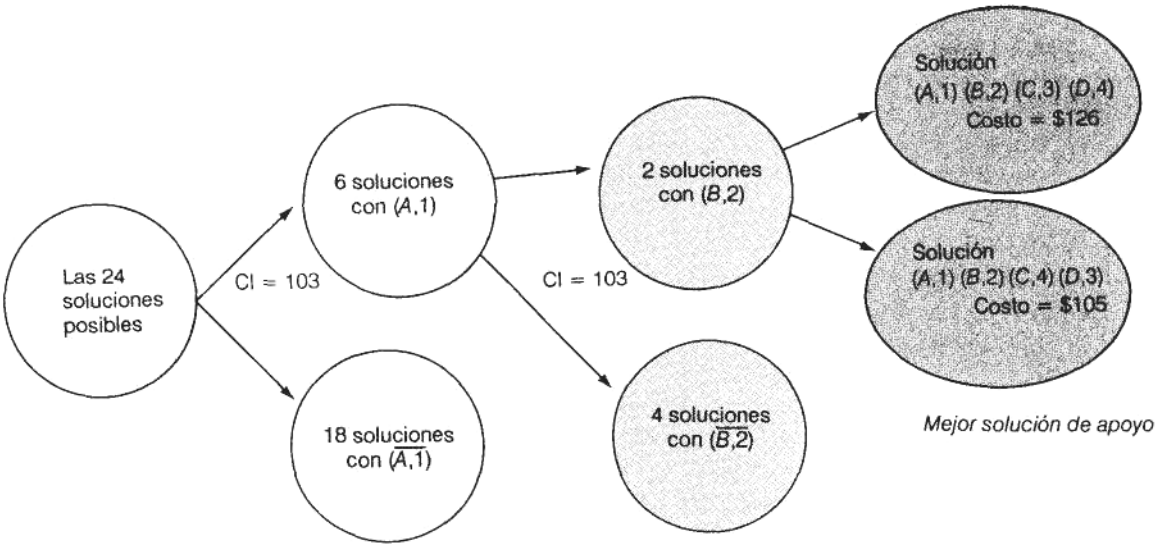


Tabla 14-7 Costos de envío restantes, dadas las asignaciones *(A,*1*)* y *(B,2)*

Planta \ Almacén	2	3	4
B	*	50	60
C	32	62	39
D	(27)	(39)	(37)
Mínimos de las columnas	27	39	37

se calcula como antes, sumando el costo (10 dólares) de la asignación *(A,*1*)* a la suma de los mínimos de las columnas de la tabla 14-7, con lo que se obtiene un total de 113 dólares.

Esta cota inferior de 113 dólares implica que no existe una solución factible en esta rama que tenga costo menor de 113 dólares. Como ya tenemos una solución con costo menor (la mejor solución de apoyo, con costo de 105 dólares), se puede eliminar toda la rama sin tener que investigar más.

Rama $(\overline{A,1})$

Regresamos por el árbol hasta la única rama que falta investigar, la que tiene 18 soluciones que excluyen la asignación de *A* al almacén 1. Se elabora nuevamente

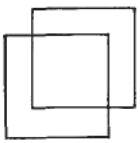
Tabla 14-8 Costos de envío, dada la asignación $(\overline{A,1})$

Planta \ Almacén	1	2	3	4
A	*	33	41	(30)
B	24	(17)	50	60
C	39	32	62	39
D	(22)	27	(39)	37
Mínimos de las columnas	22	17	39	30

una tabla de costos para este caso (Tabla 14-8) con un asterisco en la fila *A,* columna 1. La cota inferior se obtiene con la suma de los mínimos de las columnas siendo un total de 108 dólares. Por lo tanto, ninguna de las 18 soluciones de la rama tiene costo inferior a 108 dólares. Como la solución de apoyo actual tiene costo de 105 dólares, se puede eliminar toda la rama y sus 18 soluciones.

Como no hay más ramas por investigar, la solución óptima es la mejor solución de apoyo: *A-1, B-2,* C-4, *D-3,* con costo de 105 dólares.

RESUMEN



La aplicación del procedimiento de ramificación y acotamiento a un problema combinatorio general es similar su utilización en problemas de programación lineal entera. Sin embargo, hay que determinar la manera de calcular las cotas para cada aplicación específica y el proceso de ramificación se puede definir en forma distinta.

Bibliografía

Bradley, S. R, A. C. Hax y T. L. Magnanti, *Applied Mathematical Programming,* Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing, 1977.

Crowder, H., E. L. Johnson y M. Padberg, "Solving Large-Scale Zero-One Linear-Programming Problems", *Operations Research,* septiembre-octubre de 1983.

Garfinkel, R. S. y G. L. Nemhauser, *Integer Programming,* Nueva York, John Wiley & Sons, 1972.

Geoffrion, A. M. y R. E. Marsten, "Integer Programming Algorithms: A Framework and State-of-the-Art Survey", *Management Science,* marzo de 1972.

Hillier, F. y G. J. Lieberman, *Introduction to Operations* Research, quinta edición, Nueva York, McGraw-Hill, 1990.

Nemhauser, G. L. y L. A. Wolsey, *Integer and Combinatorial* Optimization, Nueva York, John Wiley & Sons, 1988.

Plane, D. R. y C. McMillan, Jr., *Discrete Optimization,* Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1971.

Shapiro, R. D., *Optimization Models for Planning and Allocation:* Text and Cases in Mathematical Programming, Nueva York, John Wiley & Sons, 1984.

Wagner, H. M, *Principies ofOperations Research,* segunda edición, Englewood Cliffs, N. J., PrenticeHall, 1975.

Zionts, S., *Linear and Integer Programming,* Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1974.

Problemas con respuestas

14-1. Un estudio de cine quiere producir cinco películas en los próximos tres años. Defina una variable Y_{it}, en la cual el subíndice i se refiera a la película (i = 1, 2, 3, 4, 5) y el subíndice t se refiera al año (f = 1,2, 3,). Y_{it} es una variable binaria que tiene valor 1 si se produce la película i en el año t y valor 0 en caso contrario. Considere en forma independiente cada una de las siguientes situaciones y formule una o más restricciones enteras que satisfagan la condición que se establece.

a. No se puede producir más de una película en el primer año.

b. La película 2 no puede producirse antes que la película 3, pero sí pueden producirse la dos en el mismo año.

c. Hay que producir por lo menos una película cada año.

d. La película 4 no puede producirse después del año 2.

e. Las películas 1 y 5 no se pueden producir en el mismo año.

14-2. Utilice el procedimiento de ramificación y acotamiento para resolver el siguiente problema:

Maximizar:

$$2X_1 + X_2 + 4X_3 + 3X_4$$

Sujeto a:

$$3X_1 + 2X_2 + 5X_3 + 4X_4 \leq 10$$
$$-X_2 + X_3 \leq 0$$

Todas las variables X_1, X_2, X_3, X_4 son binarias.

La solución del problema de programación lineal correspondiente es:

$$X_1 = 0; X_2 = 0.86; X_3 = 0.86; X_4 = 1$$

con valor Z = 7.3 para la función objetivo. Al resolver el problema, haga lo siguiente:

a. Defina las ramas posibles y luego compare su respuesta con la que se presenta al final del libro. Si hay varias ramas posibles (como sucede con frecuencia) use la rama que se indica en las respuestas.

b. Defina el problema de programación lineal que tiene que resolverse a continuación y verifique las respuestas de la solución del problema de programación lineal.

c. Determine si ha llegado a un óptimo. De no ser así, regrese a *(a)* y defina la siguiente rama, y así sucesivamente.

14-3. El gerente de investigaciones de la Fundación Científica Federal quiere decidir qué proyectos recibirán financiación el año entrante. Ha recibido ocho propuestas que se mencionan en seguida. Después de un cuidadoso estudio, efectúa una estimación subjetiva del valor de cada proyecto, con una escala de 0 a 100. El gerente de investigaciones quiere encontrar la combinación de proyectos que tenga el mayor valor total, pero hay varias limitaciones. Primero, el presupuesto es de 320 000 dólares. Segundo, tiene que aceptar o rechazar un proyecto (es decir, no hay financiación parcial). Tercero, algunos proyectos están relacionados: no quiere financiar los proyectos G y H al mismo tiempo y el proyecto D no debe financiarse si el proyecto A no recibe fondos (pero el proyecto A puede financiarse sin hacer lo mismo con D).

Formule este caso como un problema de programación lineal entera.

Propuesta	*Costo (miles de dólares)*	*Valor*
A	$ 80	40
B	15	10
C	120	80
D	65	50
E	20	20
F	10	5
G	60	80
H	100	100

14-4. La compañía Bendigo fabrica tres productos: ANZA, BOZO y KARMA. Ha formulado parcialmente su problema de combinación de productos como un problema de programación lineal, de la siguiente manera:

Maximizar: $100A + 120B$
Sujeto a:
$3A + 7B + 2K \leq 1000$
(tiempo de máquina disponible)
$A + 1.55 + 2\# < 300$
(horas de trabajo disponibles)
$23A + 185 + 25K = \text{MPUSADA}$
(materia prima usada)

donde *A,* 5 y *K* se refieren a las unidades de ANZA, BOZO y KARMA que se producen cada semana. Al llegar a este punto, Bendigo tuvo problemas y le pidió a usted que le ayudara a completar la formulación.

Para cada uno de los siguientes puntos, amplíe o modifique la formulación para incorporar la situación que se describe. Formule el problema como un caso de programación entera utilizando variables enteras (incluso binarias) según se requiera. En cada uno de los casos, defina las variables nuevas, las restricciones nuevas o modificadas y las adiciones o modificaciones a la función objetivo. Trate cada punto en forma independiente.

a. Los KARMA se estampan en una máquina especial que se alquila del fabricante. Se pueden estampar hasta 200 KARMA en una semana. El alquiler comprende una tarifa fija de 800 dólares semanales si se producen unidades de KARMA; no hay cargo si la máquina no se usa en la semana.

b. El costo de la materia prima es de 25 centavos por unidad si se compran menos de 1000 unidades, y de 20 centavos por unidad si las compras superan las 1000 unidades. Hay una cantidad ilimitada de materia prima disponible para cualquier semana, pero no puede almacenarse de una semana a la siguiente.

c. El ingreso por ventas de KARMA de pende de la cantidad que se compre. Bendigo recibe 100 dólares por las primeras 20 unidades que produce, 150 dólares por las siguientes 50 unidades y 120 dólares por cada unidad adicional que produzca, hasta un máximo de 200 unidades.

d. El departamento de ventas estima que las ventas máximas son de 100 unidades de ANZA y de 120 unidades de BOZO. Sin embargo, para cada producto se puede iniciar una campaña de ventas con costo de 5000 dólares. La campaña de ventas aumentaría en 50 unidades la demanda del producto seleccionado, pero debido a las limitaciones de la fuerza de trabajo de ventas, sólo se puede aplicar la campaña a los ANZA o a los BOZO, pero no a los dos productos.

14-5. (Nota: Este problema requiere la técnica de solución que se analizó en el apéndice del capítulo). Una empresa tiene cuatro plantas que deben asignarse en forma única a un almacén (y viceversa). La asignación de plantas a almacenes afectará los costos totales de envío y la meta es obtener la asignación con menor costo de envío. La tabla siguiente contiene los costos anuales de envío para cada combinación posible de planta y almacén.

Costos anuales de envío (miles de dólares)

Planta \ Almacén	*1*	*2*	*3*	*4*
A	10	33	41	20
B	24	17	50	60
C	39	32	62	29
D	22	27	39	37

Utilice el método de ramificación y acotamiento para encontrar la mejor asignación de plantas a almacenes, que minimice el costo total de los envíos. *(Recomendación:* Después de establecer una rama, un límite del costo de envío de las instalaciones no asignadas es el costo de la planta con menor costo a cada almacén no asignado. Otra cota es el costo del almacén de menor costo a cada planta **no** asignada.)

Problemas

14-6. Considere el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Minimizar:} \quad & Z = 8X_1 - 2X_2 \\ \text{Sujeto a:} \quad & -X_1 + X_2 \leq 1.9 \\ & X_1 \leq 2 \\ & X_2 \leq 2 \end{aligned}$$

donde X_1 y X_2 son enteros.

a. En una hoja de papel para gráficos, re presente las restricciones y observe los puntos enteros. Represente también la función objetivo para un valor de Z y observe su pendiente.

b. Use el procedimiento de ramificación y acotamiento para resolver el problema. Defina las cotas y resuelva cada problema de programación lineal inspeccionando el gráfico. Ramifique primero a partir de X_2.

14-7. Utilice el procedimiento de ramificación y acotamiento para resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned} \text{Maximizar:} \quad & 3X_1 + 6X_2 + X_3 \\ \text{Sujeto a:} \quad & X_1 + X_2 + X_3 \leq 7 \\ & 5X_1 + X_2 + X_3 \leq 15 \\ & X_1 + 4X_2 \leq 9 \\ & X_1 \leq 3;\ X_2 \leq 3;\ X_3 \leq 3 \end{aligned}$$

Todas las variables son enteras. Use el

14-8. procedimiento de ramificación y acotamiento para resolver el siguiente problema:

$$\begin{aligned} &\text{Maximizar:} \\ &15X_1 + 3X_2 + 8X_3 - 10Y_1 - 10Y_2 - 2Y_3 \\ &\text{Sujeto a:} \\ &3X_1 + 2X_2 + X_3 - 10Y_1 \leq 5 \\ &4X_1 - X_2 + 5X_3 - 12Y_2 \leq 6 \\ &X_1 + X_2 + X_3 - 4Y_3 \leq 0 \end{aligned}$$

donde las variables X_1, X_2 y X_3 no tienen que ser enteros, pero Y_1 y Y_2 son variables binarias y $Y_3 \leq 3$ también es entera.

14-9. El jefe del departamento de policía de Punxsutawney intentaba elaborar su presupuesto para el año siguiente. Un elemento clave era el número de personal de policía que necesitaría para las patrullas. El jefe acababa de recibir un estudio (véase Tabla adjunta) donde se estim.-ba cuántas patrullas se necesitarían en las calles de Punxsutawney en cada periodo de cuatro horas.

Estas estimaciones se basaban en la experiencia con las solicitudes de investigación de crímenes y en las necesidades para un nuevo programa de prevención de crímenes. El nuevo programa hacía hincapié en la visibilidad de las patrullas en las calles durante las horas de mayor posibilidad de crímenes.

El problema del jefe surgió porque tenía que programar su personal en turnos de ocho horas, no en segmentos de cuatro horas como se muestra en la tabla. El departamento operaba con los seis turnos escalonados de ocho horas que se indican en la tabla siguiente y el jefe quería seguir esta política.

Necesidades estimadas de patrullas policíacas en los días entre semana, por hora del día

Periodo	*Patrullas requeridas*
10 P.M. **a** 2 A.M.	13
2 A.M. **a** 6 A.M.	1
6 A.M. **a** 10 A.M.	7
10 A.M. **a** 2 P.M.	6
2 P.M. **a** 6 P.M.	6
6 P.M. **a** 10 P.M.	17
Total	50

Policía de Punxsutawney: Turnos escalonados

Turno	*Hora de inicio*	*Hora de terminación*
1	10P.M.	**6 A.M.**
2	**2 A.M.**	**10 A.M.**
3	**6 A.M.**	**2 P.M.**
4	**10 A.M.**	**6 P.M.**
5	**2 P.M.**	IOP.M.
6	**6 P.M.**	**2 A.M.**

El problema del jefe era decidir cuál sería el mínimo de personas necesarias para cumplir con los requerimientos. Suponga que cada patrulla está formada sólo por un patrullero. También considere el problema sólo para los días entre semana. Formule un problema de programación lineal entera para resolver el problema del jefe.

14-10. Remítase al ejemplo del problema de tamaño y ubicación de fábricas de este capítulo. La formulación que se presenta permite que dos o más lugares cubran parcialmente las necesidades de cada región. Suponga que se desea que una región sea abastecida por una sola fábrica. ¿Cómo formularía este problema?

14-11. La compañía Snohomish planifica su programa de producción para el siguiente trimestre. Snohomish fabrica tres productos: alfas, betas y gamas. Los factores principales que se emplean en la manufactura de estos productos son horas de trabajo, materia prima y energía eléctrica; a continuación se presentan los requerimientos de cada uno:

	Alfas	*Betas*	*Gamas*
Horas de trabajo	5	2	1
Materia prima (kilogramos)	10	13	8
Energía (kwh)	300	180	120
Contribución por unidad (dólares), excluyendo el costo de la fuerza de trabajo, la materia prima y la energía	170	240	120

Snohomish tiene hasta 400 horas de trabajo disponibles en sus operaciones del primer turno (en el trimestre) y el contrato de trabajo permite esta cantidad de horas a 10 dólares la hora. La materia prima (resina regular) cuesta dos dólares por kilogramo y se pueden comprar hasta 20 toneladas. La energía cuesta tres centavos por kwh y se puede obtener cualquier cantidad.

Snohomish ha formulado el problema de programación lineal de la siguiente manera:

Maximizar:

$$170A + 240B + 120C - 10FSH - 2RMR - 0.03\,PA$$

Sujeto a:

$$5A + 2B + 1C = FSH$$

$$FSH \leq 4\,000 \text{ (limitación laboral)}$$

$$10A + 13B + 8C = RMR$$

$$RMR \leq 20\,000 \text{ (limitación de materias primas)}$$

$$300A + 180B + 120C = PA \text{ (utilización de energía)}$$

donde:

A = Número de alfas producidos
B = Número de betas producidos
C = Número de gamas producidos
FSH = Número de horas de trabajo usadas en las operaciones del primer turno
RMR = Kilogramos de materia prima (resina regular)
PA = kwh de energía utilizada, a 0.03 dólares

Los incisos (a), *(b)* y (c) que se presentan a continuación proponen modificaciones al programa lineal anterior. Usted debe definir cuáles son las variables nuevas que se necesitan, incluyendo variables enteras o binarias. Además, debe indicar cómo modificaría las restricciones y la función objetivo. Trate cada punto en forma independiente de los demás.

a. Es posible implantar un segundo turno de operaciones. Este turno permitiría disponer de 2000 horas de trabajo adicionales a un costo de 12 dólares por hora. Así mismo, si opera el segundo turno, incurriría en gastos de 900 dólares (supervisión, gastos administrativos, etcétera).

Aviones disponibles para nuevas rutas (para el problema 14-12)

Tipo de avión	*Cantidad disponible*	*Capacidad de pasajeros*	*Costos operativos (miles de dólares) De Chicago a Seattle y regreso*	*De Chicago a Denver y regreso*
A	1	320	108	101
B	2	250	90	88
C	3	130	66	62

b. El precio de la energía para Snohomish depende de la cantidad que se use. El costo de 0.03 dólares por kwh es para los primeros 30 000 kwh. El costo de la energía adicional es de 0.02 dólares por kwh.

c. Se acaba de anunciar una nueva materia prima, una resina especial. Este nuevo material cuesta 4 dólares por kilogramo pero se requeriría mucho menos por unidad (sólo dos kilogramos por unidad de cada uno de los tres productos). Para usar este nuevo material sería necesario alquilar equipo de propósito especial con costo de 8000 dólares. Además, el pedido mínimo es de 2000 kilogramos y el máximo es de 10 000 kilogramos de esta materia prima especial. Snohomish debe decidir cuál de las dos materias primas usará. Es decir, la compañía puede usar la resina regular o la especial, pero no ambas.

14-12. Amazing Airlines (AA) añadirá dos nuevas ciudades a su itinerario de vuelos. Específicamente, se inaugura el servicio diario de Chicago a Seattle, ida y vuelta, y de Chicago a Denver, ida y vuelta. El problema de decisión de AA implica la asignación de aviones a las dos rutas. AA tiene seis aviones disponibles, con las características que se muestran en la tabla de arriba. Un avión volará de Chicago a su destino y de regreso diariamente. Se puede asignar cualquier combinación de tipos de avión a las rutas.

El departamento de investigación de mercado de Amazing Airlines ha realizado un estudio cuidadoso de la demanda en cada una de las rutas, cuyos resultados se muestran en la tabla siguiente. Estas estimaciones de la demanda son el máximo que llevaría AA, suponiendo que se asignara capacidad de pasajeros adecuada a cada ruta.

Demanda estimada para las nuevas rutas

Etapa de la ruta	*Demanda diaria estimada*	*Tarifa para un solo sentido*
Chicago a Seattle	310	$410
Seattle a Chicago	240	410
Chicago a Denver	290	350
Denver a Chicago	265	350

Formule este caso como un problema de programación lineal entera.

14-13. La compañía de arena y grava Rowbottom tiene que entregar las siguientes cantidades de material a seis clientes:

Camión	*Capacidad (toneladas)*
1	1
2	2
3	1
4	2
5	1½

Hay cinco camiones que pueden efectuar las entregas. Si se emplean divisiones, un camión puede entregar una mezcla de cargas, sin rebasar su capacidad. Pero el pedi-

do de un cliente no se puede asignar a dos camiones. Los camiones disponibles y sus capacidades son:

Cliente	*Cantidad (toneladas)*
A	¼
B	½
C	1 ½
D	½
E	¾
F	1

Los costos relacionados con la entrega de cada camión a un cliente se indican en la tabla siguiente:

Costo (en dólares) de entrega de pedidos a los clientes

Camión \ *Cliente*	*A*	*B*	*C*	*D*	*E*	*F*
1	17	19	21	20	20	21
2	15	18	20	18	19	23
3	18	19	22	22	21	22
4	15	16	19	18	18	20
5	16	15	20	22	19	20

Además de estos costos, hay un costo fijo de 10 dólares para los camiones 1, 3 y 5 y de 15 dólares para los camiones 2 y 4.

Por último, existe la restricción de que el mismo camión no puede efectuar las entregas a los clientes A y B.

Formule lo anterior como un problema de programación entera.

14-14. Una compañía de neumáticos tiene cuatro plantas en distintos lugares del país. Hace poco, la compañía decidió fabricar neumáticos radiales. El equipo de producción necesario para los nuevos neumáticos tiene un costo de alquiler anual de 200 000 dólares para cada lugar donde la compañía desee producir neumáticos radiales. La compañía envía sus neumáticos a 15 almacenes de todo el país y debe decidir la cantidad y la ubicación de las plantas (una o más) donde producirá los neumáticos radiales. Suponga que conoce los siguientes datos:

P_i = Costo unitario de producción en la planta i (sin incluir el costo del alquiler)
C_{ij} = Costo unitario de envío de la planta i al almacén j.
D_j = Demanda anual (en unidades) en el almacén j
K = Capacidad anual (en unidades) para cada alquiler de equipo de producción *(Nota: K es mayor que* ¼ de la suma de la demanda de todo el país).

a. Formule un modelo de programación entera para este problema utilizando variables binarias y ordinarias (no enteras).
b. Describa textualmente la forma en que podría usar el concepto de ramificación y acotamiento junto con el concepto de programación lineal para obtener una solución de este modelo.

14-15. Durante la minimización de un problema de costo que se resuelve por ramificación y acotamiento, la mejor "solución de apoyo" cuesta 65 dólares. Se acaba de evaluar un subconjunto de soluciones utilizando dos procedimientos distintos para obtener las cotas inferiores: las cotas que se obtuvieron son 50 dólares (esta solución no es factible) y 70 dólares (esta solución es factible).

a. ¿Es posible eliminar el subconjunto de soluciones de la evaluación adicional (es decir, cortarla)? Explique su respuesta.
b. ¿Cambiaría su respuesta en *(a)* si la solución de 70 dólares no fuera factible? Explique su respuesta.

14-16. El problema del vendedor viajero requiere una ruta específica con la cual sólo visite una vez cada una de las n ciudades y se minimice la distancia total del recorrido. Este problema se puede considerar como un problema de asignación en el cual no se puede asignar un elemento a sí mismo y no se permiten visitas adicionales. Suponga, por ejemplo, que la distancia entre ciudades es la siguiente:

Kilómetros entre ciudades

De \ A	A	B	C	D
A	0	13	41	20
B	24	0	50	60
C	39	32	0	29
D	22	27	39	0

Utilice el método de ramificación y acotamiento del apéndice de este capítulo para obtener la solución óptima para este problema del vendedor viajero.

14-17. Elabore una lista con cuatro problemas de negocios que puedan caracterizarse (a primera vista) como problemas de asignación.

14-18. Mencione un problema empresarial que pueda caracterizarse (como primera aproximación) como un problema de vendedor viajero (véase Problema 14-16).

14-19. Se emplea una sola máquina para mezclar y empaquetar cuatro sabores de helado (pero no al mismo tiempo). El tiempo productivo de la máquina se pierde durante la limpieza para prepararla para la producción del siguiente sabor. La tabla adjunta muestra el tiempo necesario para cambiar de un sabor a otro.

Suponga que la demanda es la misma para todos los sabores y que éstos sólo se producen una vez (y sólo una vez) en un "ciclo". Encuentre la *secuencia* óptima de producción de sabores que minimice el tiempo de inactividad de la producción debido a los cambios.

Utilice la técnica de ramificación y acotamiento para resolver el problema. Asegúrese de *ilustrar* su procedimiento de ramificación y de *explicar* su procedimiento de acotamiento (véase el apéndice del capítulo).

Minutos necesarios para el cambio

De \ A	Vainilla	Chocolate	Fresa	Frambuesa
Vanilla	0	1	9	4
Chocolate	20	0	14	15
Fresa	7	6	0	5
Frambuesa	12	9	14	0

Problemas más difíciles

14-20. La oficina de San Francisco del Grupo de Consultoría MBA quiere programar sus consultores para las próximas cuatro semanas. MBA ha aceptado cuatro trabajos de consultoría que deben terminarse en dicho lapso. En la página siguiente se indican los trabajos, el número de consultores requerido y los requisitos de tiempo. MBA tiene la política de que una vez que se ha asignado un consultor a un trabajo, debe permanecer en él hasta su conclusión. Así mismo, si ya comenzó un trabajo, debe continuar hasta su conclusión, sin interrupciones.

La oficina de San Francisco tiene cuatro consultores de planta. La gerencia de la sucursal vio de inmediato que con este personal no podría cubrir los requerimientos. Es posible obtener consultores adicionales de la oficina nacional, ubicada en Nueva York, pero esta oficina sólo asigna consultores por periodos de un mes (o sea, cuatro semanas). Por lo tanto, todo consultor que se agregue permanecerá las cuatro semanas. Como a la sucursal se le cobra por estos consultores de la oficina nacional, el gerente quiere minimizar el número nece-

sario y cumplir con los requerimientos de trabajo.

Formule este caso como un problema lineal entero. *(Recomendación:* Sea Y_i, una variable binaria igual a 1 si el trabajo *i* inicia en el periodo f y a 0 en caso contrario.)

Trabajos de consultoría (para el problema 14-20)

Trabajo	*Semanas requeridas para el trabajo*	*Consultores requeridos cada semana*
1	3	2
2	2	3
3	1	5
4	1	4

14-21. La compañía Franchise Food Products opera dos cadenas de tiendas de comida preparada: Piazo Pizza y Fisher Fish and Chips. La empresa ampliará sus operaciones al condado de Santa Clara y busca lugares para abrir tiendas nuevas. Se han identificado diez lugares posibles y se han estimado los ingresos netos (en términos de valor actual) correspondientes al establecimiento de Piazo Pizza o de Fisher Fish and Chips. Sea P_j (j = 1,2,.. ., 10) los ingresos netos de un local de Piazo Pizza y F_j (j = 1, 2, . . ., 10) los ingresos del mismo lugar como sede de Fisher Fish.

La compañía opera las dos cadenas de restaurantes vendiendo las franquicias para una región. De acuerdo con los términos del acuerdo de franquicia de Piazo Pizza, la franquicia tiene derechos exclusivos en un radio de dos kilómetros del restaurante. Esto quiere decir que los lugares que se elijan para las pizzerías deben estar por lo menos a cuatro kilómetros de distancia. En los contratos de las franquicias de Fisher Fish hay un acuerdo similar, pero ahora se garantizan los derechos exclusivos en un radio de 2.5 kilómetros; es decir, los restaurantes deben estar separados por lo menos cinco kilómetros. No hay restricciones en cuanto a la ubicación de dos locales de las dos cadenas (por ejemplo, una pizzería podría estar al lado de un restaurante Fisher Fish). Más adelante se presenta una tabla de las distancias entre los lugares.

Cada uno de los diez lugares posibles puede desarrollarse como parte de la cadena Piazo Pizza o Fisher Fish, pero no como parte de ambas. Por supuesto, existe la posibilidad de que no se desarrolle nada.

Formule lo anterior como un problema de programación entera para maximizar los ingresos netos de la compañía Franchise Food Products.

14-22. La compañía de manufactura Ininob fabrica tres productos: artilugios, yamis y zots. La compañía quiere determinar su programa de

Distancia (kilómetros) entre los lugares posibles para restaurantes (para el problema 14-21)

De \ *A*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*
1	3.7	2.2	3.2	6.4	7.3	8.6	8.8	13.0	10.2
2		2.6	5.7	3.3	6.6	9.6	10.3	13.1	7.5
3			3.2	4.5	5.3	7.4	7.7	11.4	8.2
4				7.5	5.7	5.6	5.7	10.4	10.3
5					5.2	9.4	10.1	11.5	4.4
6						4.8	5.6	6.6	5.5
7							1.2	5.2	10.2
8								5.9	11.4
9									10.2

producción de los tres productos para los próximos tres meses. Los artilugios se venden a 50 dólares cada uno y los zots a 40 dólares. A estos precios se pueden vender hasta 200 artilugios y 30 zots. Aún no se ha determinado el precio de los yamis. Se consideran dos precios: 50 y 60 dólares. Se pueden vender hasta 100 unidades a 50 dólares; si el precio es de 60 dólares, el máximo es 60 unidades.

Ininob compra a una sola empresa la materia prima que usa para fabricar los tres productos. Los artilugios requieren 0.1 toneladas de materia prima por unidad; los yamis necesitan 0.2 toneladas por unidad y los zots requieren 0.3 toneladas. Debido a una escasez, sólo hay 50 toneladas disponibles para los tres productos. El costo de la materia prima es de 20 dólares por tonelada.

El primer paso en el proceso de producción de los tres productos es una operación de moldeado y calentamiento, para lo cual se requiere una máquina especial con un máximo de 400 horas disponibles. No es posible obtener horas adicionales, ya que la máquina está en funcionamiento los tres turnos. El costo variable de operación de la máquina es de ocho dólares por hora. Un artilugio requiere una hora en la máquina; cada yami necesita dos horas; y un zot requiere media hora.

Después de la operación de moldeado y calentamiento, se realiza el acabado del producto. El acabado de los zots se efectúa en una máquina zoteadora. Cuesta 500 dólares preparar la máquina y 10 dólares el proceso de acabado de un zot. Por supuesto, si no se producen zots no hay costo de preparación de la máquina.

El acabado de los artilugios y los yamis se lleva a cabo en una máquina artilúgica, con costo de preparación de mil dólares. Sin embargo, una vez configurada, la máquina puede efectuar el acabado de artilugios, yamis o ambos. No se incurre en este costo si no se producen artilugios ni yamis. El costo variable de la operación de la máquina es 10 dólares por yami o artilugio.

Ininob ha decidido programar su producción de los tres productos y establecer el precio de los yamis al iniciar el próximo mes.

Formule el problema como uno de programación lineal entera.

14-23. Una empresa tiene tres fábricas que abastecen a cinco regiones de ventas. En la tabla 14-9 se presentan los costos de transporte y los requisitos de ventas.

Cada fábrica puede operar en uno o dos turnos; los costos y las capacidades correspondiente se indican en la tabla 14-10.

Observe que los costos fijos del primer turno son mayores porque se incluyen los gastos adicionales generales de la fábrica, a la vez que los costos fijos del segundo turno sólo incluyen los costos relacionados con la operación de dicho turno.

Tabla 14-9 Costos de envío de las fábricas a las regiones de ventas (para el problema 14-23)

Regiones de ventas / *Fábricas*	*1*	*2*	*3*	*4*	5	*Requisito total de ventas*
1	$1	$1	$6	$3	$5	
2	2	1	4	1	6	
3	4	3	1	3	4	
Requisitos de ventas (unidades)	100	200	200	400	100	1000

Tabla 14-10 Costos operativos y capacidades de las fábricas (para el problema 14-23)

	Primer turno			*Segundo turno*		
	Costo variable (por unidad)	*Costos fijos*	*Capacidad (unidades)*	*Costo variable (por unidad)*	*Costos fijos*	*Capacidad (unidades)*
Fábrica 1	$3.00	$200	100	$4.50	$50	100
Fábrica 2	1.50	500	300	2.00	70	300
Fábrica 3	1.00	400	200	1.50	70	200

La gerencia pretende añadir 400 unidades de capacidad adicional a la fábrica 3 (200 unidades a cada turno). El costo variable sería de un dólar por unidad en el primer turno y de 1.50 dólares en el segundo. Los cargos fijos adicionales serían de 300 dólares en el primer turno y de 50 dólares en el segundo (estas cantidades incluirían el rendimiento esperado de la inversión).

Una política de la compañía es que el segundo turno no opere por debajo del 40% de su capacidad ni el primer turno debajo del 60% (es decir, un turno no opera o lo hace por encima de estos límites).

La compañía quiere determinar el programa óptimo de envíos (fábricas a almacenes). Además, quiere averiguar si debe añadirse la capacidad adicional a la fábrica 3 y qué turnos hay que cerrar en las fábricas, de ser necesario. Observe que el cierre de los dos turnos equivale a cerrar la fábrica.

Formule el problema con la técnica de programación lineal entera mixta. Advertencia: tenga cuidado de que su formulación garantice que el segundo turno no opere sin el primero. Para que la formulación sea más fácil de escribir, puede usar símbolos en lugar de los números que se indican en las tablas 14-9 y 14-10.

14-24. La ciudad de Shamut ha solicitado ofertas (cotizaciones) para la construcción de la nueva sede municipal. La solicitud de ofertas incluye cinco partes del trabajo total:

F - Cimientos
S - Estructura
P - Plomería (fontanería) y calefacción
E - Instalación eléctrica
I - Interiores

El procedimiento de oferta especifica que se pueden presentar cotizaciones para distintas partes o para combinaciones de partes y también se permitieron cotizaciones múltiples.

Cinco contratistas del área, todos considerados de confianza por la ciudad de Sha- mut, han enviado sus cotizaciones. Más adelante se presentan las cotizaciones de los cinco contratistas: Able, Baker, Charley, Dog y Easy.

Además, Easy especificó en su cotización que otorgaría un descuento del 10% sobre las cantidades ofrecidas para las partes si se le concedía el contrato para realizar cuatro partes o más.

Su tarea como gobernador de la ciudad es otorgar los contratos de manera que se minimice el costo total del trabajo.

Un factor que complica las cosas es que los contratistas Able y Baker están en pugna y ambos han especificado en sus cotizaciones que no aceptarán el contrato de ninguna parte si el otro efectúa algún trabajo.

Formule un modelo de programación lineal que ayude al gobernador de la ciudad a decidir qué ofertas aceptar. No utilice más de 25 variables de decisión. Haga su formulación lo más general posible; es decir, no elimine cotizaciones arbitrariamente aunque le parezca que no serán aceptadas. Su formulación deberá ser suficientemente general para que pueda usarse con distintas cotizaciones (con la modificación de las cantidades, por supuesto).

(para el problema 14-24)

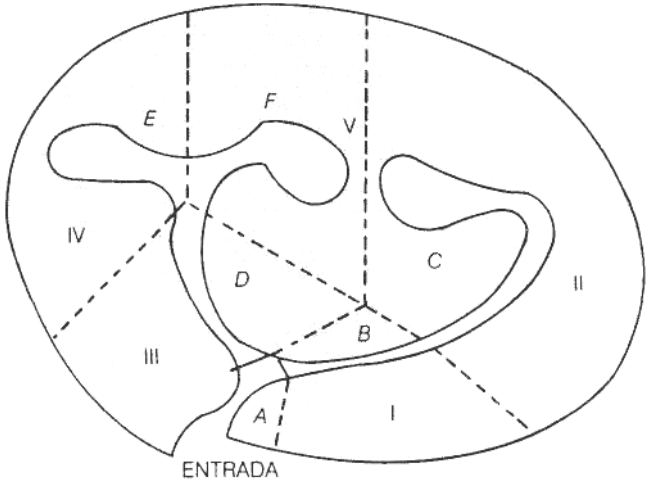
Contratista	*Número de cotización*	*Partes del trabajo incluidas en la cotización*	*Cantidad de la cotización (miles de dólares)*
Able	1	Sólo *F*	$ 700
	2	*F* + *S*	3 800
	3	*F* + *S* + *P*	4 500
Baker	1	*P* + *E*	1 100
	2	*P* + *E* + *I*	1 900
	3	Todo el trabajo	5 800
Charley	1	Sólo *P*	700
	2	Sólo *E*	600
	3	Sólo *I*	1 000
	4	*P* + *E*	1 200
Dog	1	*S* + *P*	3 600
	2	*S* + *P* + *E*	4 100
	3	*F* + *S* + *P* + *E*	4 600
Easy	1	Sólo *F*	900
	2	Sólo *S*	3 200
	3	Sólo *P*	800
	4	Sólo *E*	500
	5	Sólo *I*	1 200

Caso 14-25



Alien Company participa en el desarrollo de una propiedad residencial. La figura muestra un mapa del proyecto de vivienda en las etapas de planificación.

Mapa del proyecto de vivienda Cumbres Borrascosas



Los caminos de acceso se muestran en el mapa y están divididos en segmentos rotulados con las letras *A* a *F.* Además, el área se divide en cinco subsecciones (*I* a K en el mapa). Alien quiere desarrollar toda una subdivisión en un periodo de 18 meses.

El problema de planificación implica determinar el orden de construcción de los caminos y de las subsecciones. Para fines de planificación, el tiempo se divide en tres periodos de medio año. En cualquier periodo (medio año) se puede construir cualquier número de segmentos de camino (con las restricciones financieras que se describen más adelante). La única restricción es que no se puede construir un segmento antes que los caminos que conducen a él (por ejemplo, no se podría construir el segmento C antes que el *B;* pero sí se pueden construir al mismo tiempo).

Las casas se pueden edificar en cualquier subsección por lo menos *un periodo después* de terminar los caminos de acceso a la sección. La tabla siguiente indica cuáles son los caminos de acceso que deben estar terminados por lo menos un periodo antes de que puedan desarrollarse las subsecciones:

Subsección	*Caminos requeridos*
I	A, B
II	A, B, C
III	A, D
IV	A, D, E
V	A, D, F

En un periodo se puede desarrollar cualquier número de subsecciones y pueden concluirse en un periodo. Las únicas restricciones con respecto al desarrollo de las subsecciones son la construcción de caminos (previamente descrita) y las cuestiones financieras (descritas a continuación).

Suponga que los costos de construcción de los segmentos de camino son K_A, K_B, . . ., K_F y que los de construcción de las subsecciones de vivienda son C_I, C_{II}, . . ., C_V. Estos costos representan la cantidad neta de financiación de Alien Company por encima de las hipotecas de construcción que se obtienen del banco, y se incurre en ellos en el periodo de desarrollo de la subsección.

Designe el beneficio de la venta de una subsección con P_I, P_{II} . . ., P_V. Una vez más, estas cantidades representan el monto neto después del reembolso de las hipotecas de construcción. Los beneficios se reciben *un periodo después* del desarrollo (es decir, con retraso de un periodo).

Para la financiación del proyecto, Alien Company tiene su propio capital de 500 000 dólares, así como la opción de un préstamo del banco (además del dinero de las hipotecas). Sin embargo, el banco insiste en prestar la cantidad total de dinero durante todo el periodo del proyecto. Es decir, si presta la cantidad *L,* ésta se obtiene al iniciar el proyecto y se paga por completo (con intereses) al término de dos años. El periodo de dos años es necesario para que puedan emplearse los beneficios de las ventas de la propiedad en el tercer periodo (las cuales se reciben

en el cuarto medio año) para el préstamo. El préstamo mínimo es de un millón de dólares (es decir, no piden prestado nada o piden por lo menos un millón de dólares). La tasa de interés es del 10% anual.

Formule este caso como un problema de programación lineal entera mixta. Suponga que si desarrolla una subsección en un periodo, ésta quedará completamente terminada (es decir, no puede quedar a medias). El objetivo es minimizar la cantidad de los intereses por el préstamo bancario.

Caso 14-26 Jane Rodney, presidente de Rodney Development Company, trataba de decidir qué tipo de tiendas incluir en su nuevo centro comercial Puyallup. Ya había contratado un supermercado, una farmacia y otras tiendas que consideraba básicas. Pero aún quedaban 1600 metros cuadrados de espacio por asignar. Elaboró una lista de 15 tipos de tiendas para su consideración (Tabla 14-11), incluyendo el espacio que requería cada tipo. Rodney no pensó que tuviera problemas para encontrar ocupantes de alguno de los tipos de tiendas.

Los contratos de alquiler que Rodney usaba en sus proyectos incluían dos tipos de pago. La tienda tenía que pagar un alquiler anual, dependiendo del tamaño y del tipo de tienda. Además, Rodney recibía un pequeño porcentaje de las ventas de la tienda si éstas excedían una cantidad mínima específica. La cantidad del alquiler anual de cada tienda se muestra en la segunda columna de la tabla 14-11. Para poder estimar la rentabilidad de cada tipo de tienda, Rodney

Tabla 14-11 Características de los posibles arrendatarios, centro comercial Puyallup

Tipo de tienda	*Tamaño de la tienda (cientos de metros cuadrados)*	*Alquiler anual (miles de dólares)*	*Valor actual (miles de dolare:;', *	*Costo de construcción (miles de dólares)*
Ropa				
1 · Para hombre	1.0	$4.4	$ 28.1	$ 24.6
2. Para mujer	1.6	6.1	34.6	32.0
3. Mixta	2.0	8.3	50.0	41.4
Restaurantes				
4. De lujo	3.2	24.0	160.0	124.4
5. Económico	1.8	19.2	77.8	64.8
6. Bar	2.1	20.7	100.4	79.8
7. Cafetería	1.2	7.7	45.2	38.6
Bienes				
8. Ferretería	2.4	19.4	80.2	66.8
9. Cuchillería y varios	1.6	11.7	51.4	45.1
10. Equipaje y piel	2.0	15.2	62.5	54.3
Varios				
11. Agencia de viajes	0.6	3.9	18.0	15.0
12. Tabaquería	0.5	3.2	11.6	13.4
13. Tienda fotográfica	1.4	11.3	50.4	42.0
14. Juguetería	2.0	16.0	73.6	63.7
15. Salón de belleza	1.0	9.6	51.2	40.0

calculó el valor actual del los alquileres futuros y los pagos por porcentaje de ventas; estas cifras se incluyen en la tercera columna. Rodney quiere obtener el mayor *valor actual* total del conjunto de tiendas que elija. Pero no podía simplemente seleccionar las tiendas con mayor valor actual, pues existían varias restricciones, la primera de las cuales era, por supuesto, que sólo disponía de 1600 metros cuadrados.

Además, una condición del la financiación del proyecto requería que el alquiler anual fuera por lo menos igual al costo fijo anual (impuestos, tarifas administrativas, servicio de la deuda, etcétera). Los costos anuales para esta parte del proyecto eran de 150 000 dólares. Por último, los fondos totales disponibles para la construcción de esta parte del proyecto eran 700 000 dólares y cada tipo de tienda requería distintos costos de construcción, dependiendo del tamaño y del tipo de la tienda (cuarta columna de la tabla).

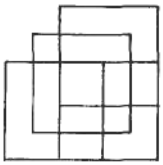
Además, Rodney tenía sus propias exigencias en cuanto a la mejor combinación de tiendas. Quería por lo menos una tienda de cada categoría (Ropa, Bienes y Varios) y por lo menos dos Restaurantes. No quería más de dos tiendas de Ropa. Además, el número de tiendas del grupo Varios no debería exceder el total de tiendas de los grupos de Ropa y Bienes, combinados.

Formule el caso de Rodney como un problema de programación lineal entera.

PARTE IV

Modelos deterministas y probabilísticos

CAPÍTULO 15



Control de inventarios con demanda constante

El control de inventarios representa una función importante de la gerencia que los métodos cuantitativos analizan muy bien. Los conceptos de los capítulos 15, 16 y 17 se han aplicado en muchas compañías, grandes y pequeñas, con resultados favorables. No obstante, hay otras situaciones empresariales (incluso en las compañías bien administradas) donde el conocimiento adicional que se obtiene de los modelos de inventarios puede ser muy útil para mejorar las decisiones operativas.

En este capítulo se supondrá que se conoce la demanda futura de un artículo y que es constante; en los capítulos siguientes se considerará que la demanda es incierta.

En un sistema de inventario hay que tomar dos decisiones operativas:

1. Cuándo efectuar un pedido. Hay que encontrar el *punto de pedido* óptimo, para que se efectúe un pedido de reabastecimiento en cuanto el nivel del inventario llegue al punto de pedido.[1] Se supondrá que el punto de pedido se determina con las unidades disponibles y no en función del tiempo (por ejemplo, hacer un pedido cada mes).

2. *El tamaño del pedido.* El objetivo es maximizar la diferencia entre los ingresos y el costo asociado al mantenimiento de un inventario.

Cuando la demanda es conocida y constante, hay dos tipos generales de costos que deben considerarse: (1) el costo de colocación de pedido y (2) el costo de almacenamiento de existencias en inventario. El tamaño óptimo del pedido y el punto de pedido óptimo generalmente serán función de estos dos costos más la intensidad o tasa de uso (la cantidad usada en una unidad de tiempo).

[1] Si hay inventario en pedido, entonces se compara la suma del inventario disponible y el inventario en pedido con el punto de pedido.

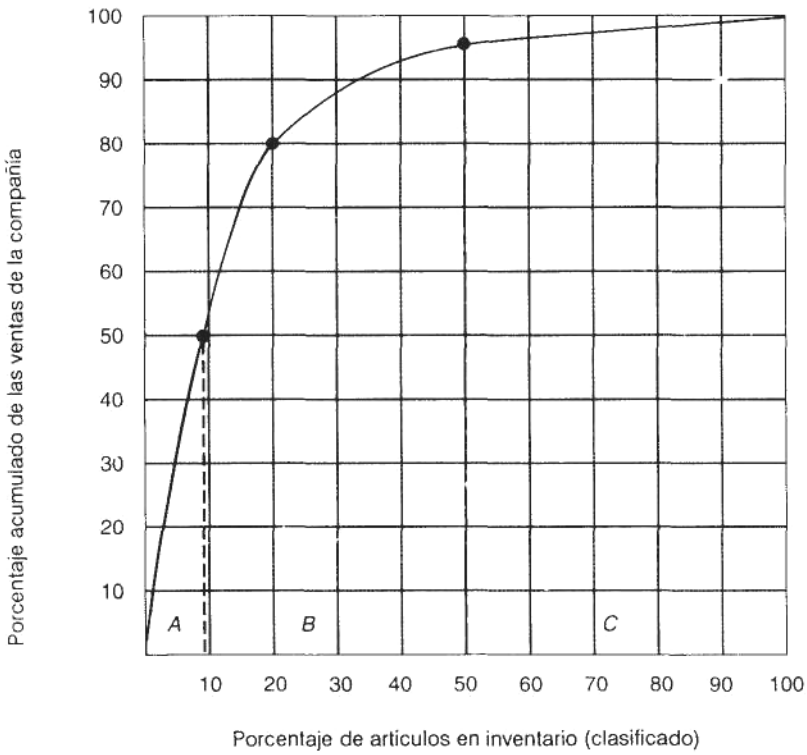
Antes de presentar los modelos específicos para resolver el tamaño de pedido y el punto de pedido óptimos, se mostrará una técnica de clasificación de inventarios con varios artículos, denominada *análisis ABC,* útil para centrar la atención de la gerencia en los artículos más importantes de un sistema de inventario con varios artículos.

Análisis ABC

Todo inventario de importancia se compone de más de un tipo de artículos. Cada artículo requiere un análisis para calcular su tamaño de pedido y el punto de pedido, pero es conveniente reconocer desde el principio que no todos los artículos tienen la misma importancia para la organización. El **análisis ABC** es una forma de clasificar los artículos con base en una medida de su importancia, la cual, con frecuencia, es el importe monetario de las ventas anuales del artículo.

La figura 15-1 ilustra una curva ABC típica que se obtiene clasificando cada grupo de artículos de acuerdo con sus ventas en dólares (en orden descendente)

Figura 15-1 Ejemplo de análisis ABC



y luego representando gráficamente las cantidades monetarias acumuladas contra el número de artículos en el inventario. La conocida "regla 20-80" se demuestra en la figura: el 20% de los artículos corresponde al 80% de las ventas totales de la compañía en dólares.

La forma de cualquier curva ABC será similar a la que se muestra en la figura 15-1; esto se debe a que los artículos se *clasifican* de acuerdo con la medida de importancia (ventas anuales en dólares) antes de acumularlos. Es imposible evitar este tipo de curva a menos que cada artículo del sistema de inventario tenga exactamente la misma tasa de ventas en dólares, algo muy poco probable.

Los gerentes emplean la curva ABC para determinar en qué puntos es rentable el análisis detallado y, a la inversa, cuándo no vale la pena mejorar la precisión a un costo alto. El procedimiento más común consiste en dividir la curva en tres regiones o grupos, como sigue:

- Artículos A: el 50% superior de las ventas monetarias.
- Artículos C: el 50% inferior de los artículos.
- Artículos B: los artículos situados entre los dos grupos anteriores.

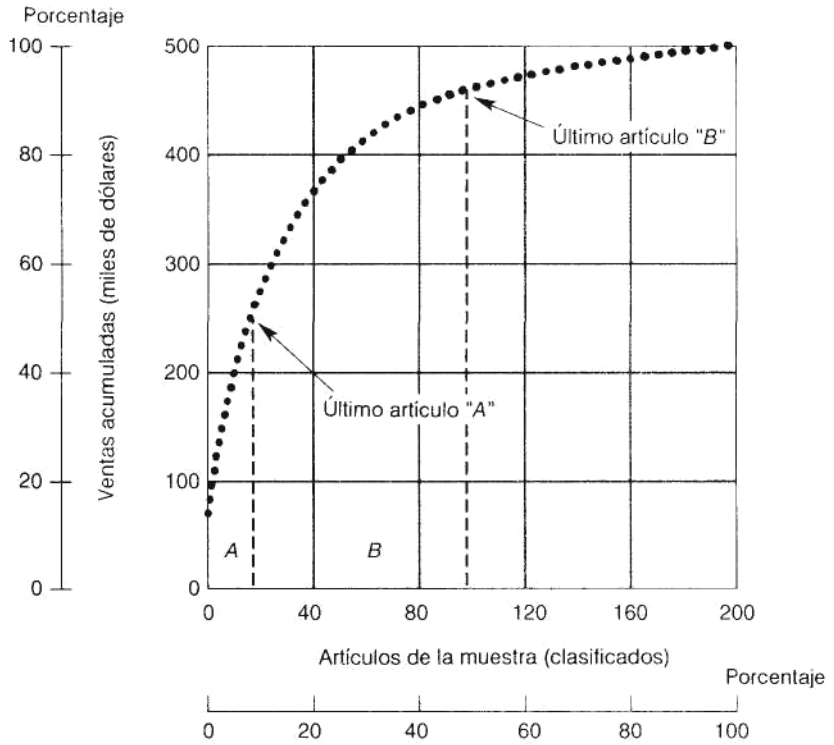
La figura 15-1 muestra estas tres regiones para el ejemplo. Hay que subrayar que estas divisiones no son rígidas; algunas compañías dividen su inventario en cuatro grupos (ABCD) y otras emplean límites distintos para las regiones. El punto clave es que, sin importar cuáles sean las definiciones, el artículo A típico generalmente es mucho más importante que el B, el cual es, a su vez, mucho más importante que el artículo C típico.

De acuerdo con los objetivos de la gerencia, los artículos A deben recibir más análisis, supervisión y revisión, ya que tienen la clasificación más alta según la medida de la importancia. Los artículos B deben recibir algo de atención, pero menos que los artículos A. Los artículos C representan muchos artículos diferentes, pero las ventas de cada artículo C son tan bajas que se pueden manejar de manera menos rigurosa, con una tendencia a niveles de inventario "altos", ya que no implican demasiado dinero. Si una compañía implanta una mejoría del control de inventarios, su punto focal inicial deben ser los artículos A, ya que es allí donde pueden obtener mayor efecto.

Realización de un análisis ABC

La manera precisa de efectuar un análisis ABC consisten en seleccionar una medida de la importancia y luego clasificar todos los artículos del inventario de acuerdo con dicha medida, para así producir una curva similar a la que se presentó en la figura 15-1. Por otra parte, se puede realizar un análisis ABC sobre una *muestra* de los artículos. Aunque la curva de la muestra no será 100% precisa, es probable que tenga la precisión suficiente para la decisión. Por ejemplo, se podría seleccionar una muestra aleatoria de 200 artículos de un inventario con 20 000 artículos y representarla gráficamente en forma acumulada, como se muestra en la figura 15-2. Observe que en la escala vertical de la figura 15-2 se encuentran

Figura 15-2 Análisis ABC de una muestra aleatoria de 200 artículos



las ventas acumuladas en dólares; después de representar todos los puntos, se puede añadir otra escala (en la parte izquierda) para indicar los porcentajes. En la figura 15-2, las ventas totales de los 200 artículos son de 500 000 dólares; esta cantidad representa el 100% de las ventas de la muestra, a partir de lo cual se determinan los demás porcentajes (véase la escala añadida en la figura 15-2).

Es indispensable que la muestra utilizada para el análisis sea *aleatoria,* para que los resultados sean representativos. Una forma de hacerlo sería tomar cada centesimo artículo, por ejemplo, de un inventario de 20 000 artículos clasificados por número de producto. Con esto se obtendría una muestra representativa si no hubiera nada raro acerca del artículo 100, del 200, etc, de la lista numérica.

Después de representar la muestra, como se hizo en la figura 15-2, es posible efectuar las clasificaciones ABC y determinar los puntos de corte, como se indica. Si se emplean las clasificaciones ABC que se mencionaron antes, entonces el último artículo A es aquel cuyas ventas acumuladas en dólares lleguen a la marca del 50% .Suponga que las ventas reales del artículo son de 8561 dólares; entonces, se podría clasificar como artículo A a cualquiera cuyas ventas superen los 8500 dólares. En forma parecida, el último artículo B es el que corresponde a la marca del 50% de la escala horizontal. Suponga que sus ventas fueran de 983 dólares;

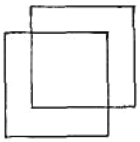
entonces, se clasificaría como artículo B cualquiera con ventas menores que 8500 dólares pero superiores a 1000 dólares. Los artículos C serían los que tuvieran ventas inferiores a mil dólares. De esta manera se puede aplicar la información que se obtuvo de la muestra de 200 artículos a los 20 000 artículos del inventario y es probable que el "error" de la muestra imperfecta sea pequeño.

Advertencias con respecto al análisis ABC

Hay dos aspectos que pueden presentar problemas en el análisis ABC. El primero tiene que ver con la medida del rendimiento. Aunque es común usar los ingresos por ventas como medida del rendimiento, esto se debe muchas veces a que estos datos están disponibles en el computador. No se debe seleccionar cualquier medida de rendimiento simplemente porque esté disponible; es preciso que represente, según la decisión que se tomará, la escala que sea la mejor medida de importancia disponible para la decisión. Por ejemplo, si nos preocupan las decisiones acerca de la inversión en inventario, es probable que la medida de ventas en dólares sea la adecuada; pero si la decisión afectara la capacidad de la compañía para satisfacer sin demoras los pedidos del cliente, entonces será más deseable una medida de la rentabilidad (mejor que de las ventas).

El segundo problema es que con frecuencia las compañías tienen artículos que se clasificarían como artículos C en una escala de medida de ventas de dólares, pero que son muy importantes para los clientes de la compañía. Un ejemplo serían las piezas de repuesto para maquinaria compleja. El valor monetario de las ventas de estas piezas puede ser bajo si se compara con las ventas de la maquinaria nueva, pero las piezas de repuesto son un factor crítico para el funcionamiento de la maquinaria que ya se vendió, y los resultados deficientes en la satisfacción de los pedidos de piezas de repuesto pueden tener consecuencias muy desagradables sobre las ventas futuras de la maquinaria. Por lo tanto, hay que considerar con cuidado los demás atributos de los artículos C que puedan requerir una administración más cuidadosa, como la que se lleva a cabo con los artículos B y A.

RESUMEN

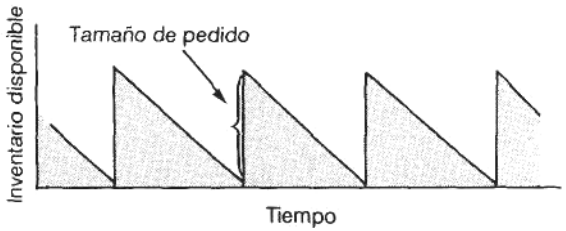


El análisis ABC clasifica los artículos con base en una medida de importancia. La gerencia puede centrar la mayor parte de su atención en los artículos A e invertir menos esfuerzo en los artículos B y C. Muchas veces, la forma más sencilla de efectuar un análisis ABC es la utilización de una muestra aleatoria de 100 o 200 artículos.

Cantidad económica de pedido con demanda conocida

En el resto del capítulo veremos el control de inventario cuando se conoce la demanda. Supondremos que el tiempo de entrega del pedido y la tasa de demanda son conocidos y constantes. A partir de esta suposición, no es difícil el cálculo del punto de pedido. Si la tasa de uso es de tres unidades diarias y el tiempo de entrega del pedido es de 40 días, se establece un punto de pedido de 40 x 3 = 120 unidades.

Figura 15-3 Pedidos y demanda conocida



Esta cifra no da margen para errores, pero es consistente con las suposiciones de demanda y tiempo de entrega conocidos. La figura 15-3 ilustra el comportamiento del inventario del sistema con base en la suposición de tasa de demanda y tiempo de entrega conocidos y constantes.

El tamaño óptimo de pedido se determina con el análisis de los costos totales. El costo total *(TC)* para un periodo será igual a la suma de los costos de pedido (o costos de preparación) más los costos de mantenimiento de inventario durante el periodo.[2] Suponga que todas las unidades se recibirán al mismo tiempo.

Sea:

K =Costo de formulación de un pedido (o de establecimiento de la producción)
k_c =Costo anual de mantenimiento de una unidad de inventario.
D =Uso total anual (demanda), en unidades

Q =Tamaño óptimo de pedido, en unidades (el factor desconocido)

Observe que el número anual de pedidos depende de *D y Q:*

$\frac{D}{Q}$ = Número anual de pedidos

También:

$\frac{Q}{2}$ = Inventario promedio (suponiendo utilización lineal)

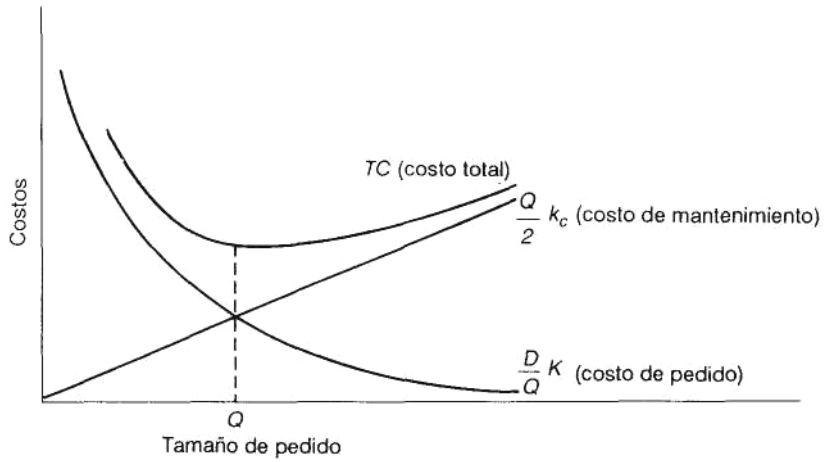
Entonces:

$\frac{Q}{2}k_c$ = Costo anual de mantenimiento de inventario (inventario promedio multiplicado por k_c, el costo de almacenamiento anual por unidad)

$\frac{D}{Q}K$ = Costo anual de formulación de pedidos (número anual de pedidos, D/Q, multiplicado por el costo de formulación de pedidos, K)

[2] No es necesario considerar los costos de escasez, ya que las suposiciones de demanda conocida y tiempo de entrega conocido implican que no se producirán escaseces. En el siguiente capítulo se abandonará la suposición de demanda conocida.

Figura 15-4



El costo total anual es:

$$TC = \frac{Q}{2}k_c + \frac{D}{Q}K \qquad \textbf{(15–1)}$$

Estos costos se representan gráficamente en la figura 15-4 como función del tamaño de pedido. El costo total mínimo de la figura 15-4 se produce cuando las pendientes de los dos componentes de costo (el de formulación de pedido y el de mantenimiento) son iguales y de signo opuesto. Este caso particular ocurre cuando los dos componentes de costo son iguales (donde se cruzan las curvas). Es posible aprovechar este hecho para obtener una fórmula[3] para la cantidad óptima de pedido Q igualando los dos costos y resolviendo para Q. En el óptimo:

$$\frac{Q}{2}k_c = \frac{D}{Q}K$$

[3] Esta fórmula también se puede obtener usando cálculo diferencial para minimizar el costo total con respecto a Q. Obtenga la primera derivada de la ecuación 15-1 con respecto a Q, iguálela a cero y resuelva para Q.

$$TC = \frac{Q}{2}k_c + \frac{DK}{Q}$$

$$\frac{dTC}{dQ} = \frac{1}{2}k_c - \frac{DK}{Q^2} = 0$$

Resolviendo:

$$Q = \sqrt{\frac{2KD}{k_c}}$$

Como $\frac{d^2TC}{dQ^2} = \frac{2DK}{Q^3} > 0$, esta solución sí produce un TC mínimo.

o sea: $$Q^2 = \frac{2KD}{k_c}$$

de forma que: $$\mathbf{Q = \sqrt{\frac{2KD}{k_c}}} \qquad \textbf{(15–2)}$$

A la ecuación 15-2 se le conoce como **cantidad económica de pedido** o **fórmula CEP** (del inglés *EOQ, Economic Order Quantity).*

Ejemplo 1 A continuación se presenta un ejemplo:

D = 3000 unidades (demanda anual esperada)
k_c = Tres dólares por unidad por año
K = Cinco dólares por pedido

$$Q = \sqrt{\frac{2KD}{k_c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 3\,000}{3}} = \sqrt{10\,000} = 100 \text{ unidades}$$

El tamaño óptimo de pedido es 100 unidades. El costo total de usar el tamaño óptimo de pedido se puede calcular si se sustituye Q = 100 en la ecuación 15-1:

$$TC(Q = 100) = \frac{100}{2}(3) + \frac{3\,000}{100}(5) = 150 + 150 = \$300$$

Si D se mide en dólares en lugar de unidades y si k_c se mide por dólar en lugar de hacerlo por unidad, la Q también estará en dólares. Para ilustrar esta situación con el ejemplo anterior, sea el precio 15 dólares por unidad. La demanda anual en dólares es \$15 · (3000) = \$45 000. Al medir k_c en dólares por dólar en lugar de dólares por unidad, k_c es ahora \$3/\$15 = \$0.20 por dólar cada año. La fórmula es:

$$Q \text{ (en dólares)} = \sqrt{\frac{2 \cdot \$5 \cdot \$45\,000}{\$0.20/\$}} = \$\sqrt{2\,250\,000} = \$1\,500$$

La cantidad óptima de pedido en dólares es 1500 dólares, que corresponden a la cantidad óptima de pedido que se calculó antes como 100 unidades (cada unidad vale 15 dólares).

Incluso cuando no se conoce con certeza la demanda, el modelo anterior es muy útil para aproximar una solución al problema del tamaño óptimo de pedido.

Sensibilidad de los costos ante errores en *Q*

Es posible usar el modelo de costo de la ecuación 15-1 para demostrar que los costos totales de este modelo no son muy sensibles a los errores en la determinación de Q. Por ejemplo, suponga que en el ejemplo anterior se estableció de manera incorrecta la demanda en 4500 unidades en lugar de 3000 (un excedente del 50%). Entonces al usar la fórmula de Q óptima se obtendría la siguiente cantidad de pedido (incorrecta):

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot 5 \cdot 4\,500}{3}} = \sqrt{15\,000} = 123 \text{ unidades}$$

Observe que, por la raíz cuadrada de la fórmula, un error del 50% en la estimación de la demanda sólo produce un error del 23% en el tamaño de pedido, comparado con la cantidad óptima $Q = 100$. Pero, la prueba real del error es cuánto cuesta. Si sustituye $Q = 123$ en la ecuación 15-1 de costo total, se obtiene:

$$TC(Q = 123) = \frac{123}{2}(3) + \frac{3\,000}{123}(5)$$
$$= 184.5 + 122 = 306.5$$

Al comparar este costo total con el costo total de la cantidad óptima de pedido que se obtuvo antes *(TC* = 300), se observa que el aumento porcentual en costo, el precio que hay que pagar por el error, es sólo 6.5/300 = 2.2%. Este mismo razonamiento se aplica a un error del 50% en el costo de procesamiento del pedido o en el costo de mantenimiento de inventario. Por lo tanto, probablemente no sea mucha la ganancia debida a la determinación de estimaciones más precisas si se estimaron razonablemente los costos y la tasa de demanda.

Descuentos por volumen

El análisis anterior no tomó en cuenta la posibilidad de conseguir descuentos por volumen (menor precio por unidad si se compra una cantidad mayor al mismo tiempo). Hay tres elementos básicos que deben considerarse al evaluar si se debe buscar un descuento por volumen.

1. El beneficio del descuento en cuanto a la reducción en costos de compra.
2. El costo del descuento como un aumento en los costos de mantenimiento.
3. El beneficio del menor número de pedidos por año.

Siempre es posible evaluar los descuentos por volumen si se consideran todas las opciones posibles, utilizando en conjunto la fórmula de cantidad de pedido con raíz cuadrada (15-2) y la ecuación de costo total (15-1) con el descuento indicado. También se puede emplear el análisis incremental para decidir si se aprovecha el descuento. Considere el primer ejemplo de este capítulo y suponga que se nos informa que el proveedor descontará un dólar por unidad si se compran mil unidades o más en un pedido. Entonces, se evaluarían los resultados *increméntales* de los tres elementos, como sigue:

1. Beneficio incremental por descuento:

(1 por unidad) · (demanda anual de 3000 unidades) = $3000 por año

2. Costo incremental del inventario más grande (suponiendo $Q = 1000$ unidades); sea:

k_c' = costo de mantenimiento en almacén de los artículos comprados con descuento

Entonces, como el precio original era de 15 dólares y el descuento es de un dólar, si el costo de mantenimiento sólo es función del precio, $k_c' = (14/15)k_c = (14/15)\$3 = \$2.80$. El costo incremental de mantenimiento del inventario es:

$$k_c'(\text{nuevo inventario promedio}) - k_c(\text{viejo inventario promedio})$$
$$= \$2.80\left(\frac{1\,000}{2}\right) - \$3\left(\frac{100}{2}\right) = \$1\,400 - \$150 = \$1.250$$

3. Beneficio incremental de la reducción en costos de formulación de pedidos:

$$K \cdot (\textit{reducción en pedidos anuales}) = K\left(\frac{3\,000}{100} - \frac{3\,000}{1\,000}\right)$$
$$= \$5(30 - 3) = \$5(27) = \$135$$

Ejemplo 2

El beneficio neto incremental es \$3000 - \$1250 + \$135 = \$1885. Como este valor es positivo, hay que aprovechar el descuento.

La demanda anual de un artículo es de mil unidades. El artículo cuesta 10 dólares por unidad y el cargo anual de almacenamiento en inventario es el 25% del costo del artículo. El costo de procesamiento de un pedido es de 50 dólares. Si se piden al mismo tiempo 500 unidades o más se aplicará un descuento de 40 centavos por unidad. ¿Cuál debe ser la cantidad óptima de pedido?

Primero se calcula la cantidad económica de pedido con la ecuación 15-2, señalando que el costo de almacenamiento $k_c = 0.25(\$10) = \$2.50$:

$$Q = \sqrt{\frac{2KD}{k_c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 50 \cdot 1\,000}{2.50}} = \sqrt{40\,000} = 200 \text{ unidades}$$

Luego se evalúa el descuento con base en los tres elementos descritos:

1. Beneficio incremental en precio: Se supone que el descuento, de aceptarse, siempre se aprovechará. Por lo tanto, el beneficio anual del descuento es:

(\$0.40 por unidad)(1000 unidades por año) = \$400

2. Costo incremental de almacenamiento: $k_c' = (\$9.60/\$10)£_c = \$2.40$, por lo que el costo incremental de almacenamiento de un pedido de 500 unidades en comparación con un pedido de 200 unidades es:

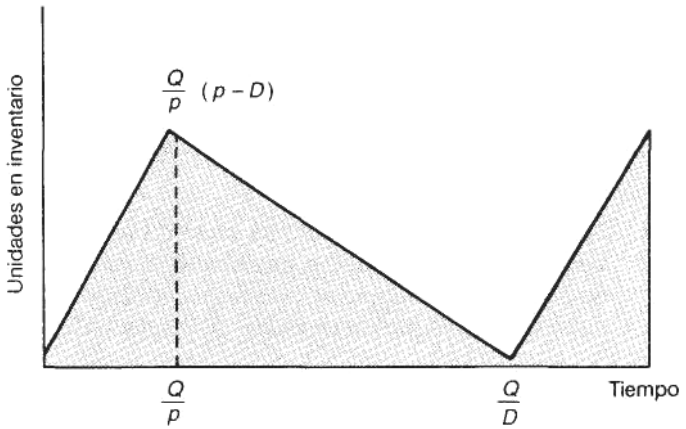
$$\$2.40\left(\frac{500}{2}\right) - \$2.50\left(\frac{200}{2}\right) = \$600 - \$250 = \$350$$

3. Beneficio incremental de la reducción en pedidos:

$$\$50\left(\frac{1\,000}{200} - \frac{1\,000}{500}\right) = \$50(5 - 2) = \$150$$

El beneficio incrementa] neto es \$400 - \$350 + \$150 = \$200 y debe aprovecharse el descuento. Observe que cuando se descubrió que el beneficio de cambio en precio compensaba ampliamente el aumento en los costos de almacenamiento, se

Figura 15-5



pudo haber optado por el descuento, sin tener que calcular el beneficio de la reducción de pedidos.

Pedidos permanentes

En ocasiones se puede obtener un descuento en el precio si se establece un acuerdo para comprar un volumen anual específico al proveedor, a la vez que se mantiene la flexibilidad de la entrega frecuente de cantidades pequeñas. A este procedimiento se le denomina *pedido permanente.* En este capítulo se supuso que la demanda era conocida y constante; por lo tanto, siempre serían favorables los pedidos permanentes y la cantidad de entrega del pedido se calcularía de acuerdo con los cálculos CEP (véase también la sección de inventarios justo a tiempo que se presenta más adelante). En la práctica, cuando la demanda no es conocida ni constante, existe un riesgo al aceptar un compromiso anual que tendrá que compararse con el descuento en el precio que se puede obtener.

Hipótesis de flujo continuo de un producto

En lugar de recibir al mismo tiempo todas las unidades del pedido, la compañía puede recibir el producto continuamente durante un periodo. Por ejemplo, las unidades que se producen se pueden enviar una por una al inventario, en lugar de hacerlo en un lote de tamaño Q. Suponga que las unidades se usan con una tasa D, se producen con una tasa ρ y hay que producir Q unidades en cada sesión de producción. La figura 15-5 muestra esta situación.

Para la producción de Q se requiere el tiempo Q/p. En este periodo se han utilizado $(Q/p)D$. Por lo tanto, la cantidad disponible en el punto más alto de la figura 15-5 es:

$$Q - \frac{Q}{p} D = \frac{Q}{p} (p - D)$$

en el instante Q/p.

La producción óptima de una sesión es:[4]

$$Q = \sqrt{\frac{2KD}{k_c} \cdot \frac{p}{p - D}} \qquad \textbf{(15–3)}$$

Ejemplo 3 Cuesta 50 dólares preparar la línea de producción para un producto del cual se venden 100 000 unidades anuales. El costo de almacenamiento por unidad es de cinco dólares por año y la tasa de producción es de 200 000 unidades al año. ¿Cuál debe ser el tamaño de la sesión de producción? A partir de la ecuación 15-3:

$$\begin{aligned} Q &= \sqrt{\frac{2KD}{k_c} \cdot \frac{p}{p - D}} \\ &= \sqrt{\frac{2 \cdot 50 \cdot 100\,000}{5} \cdot \frac{200\,000}{100\,000}} \\ &= \sqrt{4\,000\,000} = 2\,000 \text{ unidades} \end{aligned}$$

Al efectuar este tipo de cálculos hay que verificar que las unidades sean compatibles. Por ejemplo, si se nos dijera que la producción *por día* es de 800 unidades, no se podría hacer p igual a 800 y usar la misma tasa de demanda de 100 000 unidades *por año* y el costo de almacenamiento de cinco dólares *anuales.* En este caso se convertirían las 800 unidades *diarias* en un equivalente anual, multiplicando dicha cantidad por el número de días de trabajo en el año (digamos que hay 250; entonces la tasa anual equivalente sería 200 000 unidades).

Además, este modelo supone que todos los costos de almacenamiento de inventario siguen el patrón de la figura 15-5. No obstante, si el costo de la materia prima fuera una porción considerable del costo total del producto y no pudiera comprarse una unidad de materia prima cada vez, la figura 15-3 representaría mejor la situación y se usaría la ecuación 15-2.

Sistemas de inventario justo a tiempo

Últimamente se ha prestado mucha atención a los sistemas japoneses de inventario "justo a tiempo" o "kanban". El término *kanban* se refiere a una tarjeta que permite a un departamento de la organización producir una cantidad mínima de artículos como respuesta al requerimiento inmediato de otro departamento. La idea es usar cantidades de pedido (o producción) muy pequeñas, con puntos de pedidos

[4] Véase el apéndice de este capítulo para conocer la obtención de esta fórmula.

relativamente bajos, para que el inventario de reabastecimiento llegue "justo a tiempo".

El concepto justo a tiempo busca niveles de inventario muy bajos, con lo cual se reduce el costo de almacenamiento de inventario. Si las cantidades de pedido son menores que la cantidad económica de pedido (véase ecuación 15-2), aumentarán los costos de formulación de pedido y el costo total será mayor que el óptimo (véase Figura 15-4). Por lo tanto, para implantar el concepto "justo a tiempo" es necesario reducir el costo de formulación de pedido (o de preparación) con respecto a su nivel anterior. Una contribución importante de los japoneses fue que se percataron de que se podía cambiar *K,* el "costo de preparación". A continuación se presenta un ejemplo, basado en el ejemplo 1, para ilustrar estos conceptos.

Ejemplo 4 Considere el ejemplo 1, pero suponga que la empresa puede reducir su costo de formulación de pedido de cinco dólares a 1.25 dólares por pedido si se inscribe en un club de compras por grupo. La cuota anual de pertenencia al club es de 50 dólares. ¿Debe unirse la empresa al club y, de ser así, qué cantidades debe pedir? En primer lugar, suponga que la empresa se une al club. Entonces:

D = 3000 unidades
k_c = 3 dólares por unidad por año
K = 1.25 dólares por pedido

De la ecuación 15-2:

$$Q = \sqrt{\frac{2KD}{k_c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1.25 \cdot 3\,000}{3}} = \sqrt{2\,500} = 50 \text{ unidades}$$

El tamaño óptimo de pedido se redujo de 100 unidades (cuando el costo de formulación de pedido era cinco dólares) a 50 unidades. El costo total de usar este tamaño de pedido con el costo más bajo de formulación de pedido se puede calcular sustituyendo Q = 50 en la ecuación de costo total (15-1):

$$TC(Q = 50) = \frac{50}{2}(3) + \frac{3\,000}{50}(1.25) = 75 + 75 = 150$$

En el ejemplo 3 se calculó el costo total anterior (con cinco dólares por pedido) como 300 dólares, por lo que el ahorro total en costo es \$300 - \$150 = \$150. Como este ahorro excede el costo de inscripción de 50 dólares, la empresa debe unirse al club de compras y comprar en cantidades de Q = 50.

Rotación de inventarios

Un concepto relacionado que en ocasiones usa la gerencia para supervisar los niveles de inventario es la *rotación* de inventarios, entendiendo por tal a la razón de la demanda anual dividida entre el inventario promedio. Simbólicamente:

$$\text{Rotación} = \frac{\text{Demanda anual}}{\text{Inventario promedio}} = \frac{D}{Q/2} \qquad (15\text{-}4)$$

En el caso de inventarios que comprenden varios artículos, la rotación se calcula con el costo agregado de los bienes vendidos (CABV) y el valor agregado del inventario, en dólares:

$$\text{Rotación} = \frac{\text{CABV}}{\text{valor del inventario}}$$

En ocasiones se afirma que si la rotación de inventarios de una compañía es más baja que la de sus competidores, su nivel de inventarios es demasiado alto y debe reducirse. El problema con esta medida es que se centra sólo en un tipo de costo, específicamente el costo de almacenamiento de inventario; no toma en cuenta los costos de formulación de pedidos ni los costos de la escasez, así como tampoco los descuentos por volumen. En un ambiente en el cual los descuentos por volumen son importantes, una empresa que aproveche dichos descuentos tendrá mayor inventario promedio y, por lo tanto, menor rotación de inventarios, que una empresa que no toma en cuenta los descuentos. Por otra parte, la primera empresa también tendrá costos *totales* más bajos y, por ende, mayor rentabilidad.

Por lo tanto, la rotación es una medida demasiado estrecha del rendimiento del inventario, ya que omite factores de costo importantes y puede llevar a acciones no rentables.

Ejemplo 5 Considere el ejemplo de descuento por volumen que se basó en el ejemplo 1, con D = 3000 unidades. Calculemos la rotación de inventario antes y después de considerar el descuento por volumen.

Antes del descuento, Q = 100. Con la ecuación 15-4:

$$\text{Rotación} = \frac{3\,000}{100/2} = \frac{3\,000}{50} = 60$$

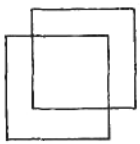
Entonces hay 60 "rotaciones" por año.

Después de analizar el descuento por volumen y determinar que es rentable, la cantidad de pedido cambia a Q = 1000 unidades para obtener el descuento. La rotación es ahora:

$$\text{Rotación} = \frac{3\,000}{1\,000/2} = \frac{3\,000}{500} = 6$$

Por lo tanto, se ha reducido la rotación de 60 a 6 rotaciones por año. Si se emplea la medición de "rotación", este cambio parece ser poco rentable, pero como se mostró antes, el costo total se reduce en 1885 dólares (véase el ejemplo del descuento por volumen) al aceptar el descuento. Por consiguiente, la medida de la rotación es incompleta y engañosa.

RESUMEN



En condiciones de demanda constante, la fórmula de la cantidad económica de pedido (CEP) minimizará los costos de procesamiento de pedidos más los de almacenamiento en inventario. Es posible tener un poco de desviación con respecto a la CEP calculada, ya que los costos totales no son muy sensibles al

valor óptimo preciso. A los descuentos por volumen se les debe aplicar el análisis incremental. Cuando hay un flujo continuo de producto se aplica una fórmula modificada. Los conceptos de inventario justo a tiempo tienen que considerar los costos fundamentales del inventario: formulación de pedidos y almacenamiento. La rotación de inventario puede ser una medida de rendimiento engañosa, ya que sólo trata uno de los costos (el de almacenamiento).

APÉNDICE Tamaño del lote de producción



¿Cuántas unidades hay que producir en una sesión de producción? Este modelo supone que las unidades se producen con una tasa ρ *y se* usan con una tasa D (véase Figura 15-5).

Q = Unidades de producción (la incógnita)
p = Tasa de producción anual
D = Tasa de demanda anual
$p - D$ = Tasa de incremento neto del inventario (producción menos demanda
$\frac{Q}{p}$ = Duración de la sesión de producción
$\frac{Q}{D}$ = Tiempo de ciclo
$\frac{Q}{p}(p - D)$ = Inventario máximo; $\frac{Q}{p}$ es la duración de la sesión de producción y $(p - D)$ es la tasa de aumento de inventario durante la producción
$\frac{Q}{2p}(p - D)$ = Inventario promedio

El costo anual de tener una sesión de producción de Q unidades es:

$$TC = k_c\left[\frac{Q}{2p}(p - D)\right] + K\frac{D}{Q}$$

tomando la derivada del costo total con respecto a Q:

$$\frac{dTC}{dQ} = k_c\left(\frac{p - D}{2p}\right) - \frac{KD}{Q^2}$$

Al hacer la primera derivada igual a cero y resolver para Q:

$$Q^2 = \frac{2KD}{k_c} \cdot \frac{p}{p - D}$$

$$Q = \sqrt{\frac{2KD}{k_c} \cdot \frac{p}{p - D}}$$

Ésta es la ecuación 15-3 de este capítulo.

Bibliografía

Brown, R. G., *Decision Rules for Inventory Management,* Nueva York, Holt, Rinehart & Winston, 1967.
Brown, R. G., *Materials Management Systems,* Nueva York, John Wiley & Sons, 1977.
Buffa, E. S. y J. G. Miller, *Production-Inventory Systems,* Homewood, 111., Richard D. Irwin, 1979.
Hall, R. W., *Zero Inventories,* Homewood, 111., Dow Jones-Irwin, 1983.
Hillier, F. y G. J. Lieberman, *Introduction to Operations Research,* quinta edición, Nueva York, McGraw-Hill, 1990.
McClain, J. O. y L. J. Thomas, *Operations Management: Production of Goods and Services,* segunda edición, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1985.
Nahmias, S., *Production and Operations Analysis,* Homewood, 111., Richard D. Irwin, 1989.
Schonberger, J., *Japanese Manufacturing Techniques,* Nueva York, The Free Press, 1982.
Silver, E. A. y R. Peterson, *Decision Systems for Inventory Management and Production Planning,* segunda edición, Nueva York, John Wiley & Sons, 1985.
Tersine, R. J., *Principles of Inventory and Materials Management,* segunda edición, Nueva York, Elsevier North-Holland, 1982.
Wagner, H. M., *Principles of Operations Research,* segunda edición, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1975.

Problemas con respuestas

15-1. Remítase a la figura 15-1.
- *a.* ¿Cuál es el porcentaje de artículos que representa el 40% de las ventas?
- *b.* ¿Cuál es el porcentaje de artículos que representa el 20% de las ventas?
- *c.* ¿Qué porcentaje de ventas representa el primer 50% de los artículos?
- *d.* ¿Qué porcentaje de ventas representa el primer 10% de los artículos?

15-2. Se ha tomado una muestra aleatoria de 10 artículos de un inventario con 20 000 artículos (una muestra de diez es muy pequeña, pero son más fáciles las operaciones). Las cantidades monetarias de las ventas de los diez artículos son: 170, 320, 49, 94, 530, 125,2,70,225,30.
- *a.* Represente gráficamente los datos clasificados en una curva ABC.
- *b.* Con base en su muestra, ¿cuál es el porcentaje de ventas totales del inventario de 20 000 artículos que representan los primeros 4000 artículos?
- *c.* ¿Qué porcentaje de ventas representa el primer 50% de los artículos?
- *d.* Suponga que la gerencia quiere que los artículos A representen el primer 50% de las ventas, que los artículos C correspondan al último 50% de los artículos y que los artículos B sean todos los demás. ¿Qué cifras monetarias de ventas usaría para separar los intervalos A, B y C?

15-3. El costo de formulación de un pedido es de seis dólares y se estima que se usarán 1000 unidades en los próximos 12 meses. El costo anual de almacenamiento por unidad es de 30 dólares. Calcule el tamaño óptimo de pedido.

15-4. La compañía ABC usa 100 000 unidades de un producto cada año. El costo de almacenamiento por unidad es tres dólares anuales y el costo de efectuar el pedido de un lote es de 60 dólares.
- *a.* ¿Cuál es el tamaño óptimo de pedido?
- *b.* Si los costos de formulación fueran de 60 centavos por pedido, ¿cuántas unida des se deberían pedir cada ocasión?

15-5. Suponga que la situación es la misma que se presenta en *(a)* del problema 15-4, con la información adicional de que se puede reducir el costo de formulación de pedido de 60 a 15 dólares por lote si la compañía se une

a una organización cooperativa de compras con cuota de membrecía anual de 2000 dólares.

a. ¿Cuál sería el tamaño óptimo de pedido si la compañía decidiera unirse a la organización cooperativa de compras?

b. ¿Debe unirse la compañía a la cooperativa?

15-6. La compañía XYZ puede generar 14 000 unidades diarias de un producto. La utilización es de 4000 unidades por día y el costo de preparación para la producción es de 1500 dólares. En un año se emplean 1 440 000 unidades. El costo anual de almacenamiento de una unidad es de 28 dólares. Suponga que el año tiene en 360 días y calcule el tamaño de lote óptimo para una sesión de producción.

15-7. Remítase al problema 15-3. Suponga que el costo anual de almacenamiento de inventario de 30 dólares está compuesto por una tasa del 20% del valor en inventario en el año, multiplicado por un costo variable por unidad de 150 dólares. Suponga ahora que la compañía puede comprar unidades a 148 dólares cada una si piden lotes de 100 unidades. Calcule los costos variables totales en el año que se relacionan con la cantidad de pedido original y la propuesta (asegúrese de incluir el efecto del precio menor). ¿Deben comprar lotes de 20 o de 100 unidades?

Problemas

15-8. Se ha tomado una muestra aleatoria de 10 artículos de un inventario de 40 000 artículos (una muestra de diez es muy pequeña, pero son más fáciles las operaciones). Las cantidades monetarias de las ventas de los diez artículos son: 350, 600, 120, 30, 175, 1100,5,50,200,90.

a. Represente los datos clasificados en una curva ABC.

b. Con base en su muestra, ¿cuál es el por centaje de las ventas totales del inventa rio de 40 000 artículos que representan los primeros 4000 artículos?

c. ¿Qué porcentaje de artículos representaría el primer 25% de las ventas?

d. Suponga que la gerencia quiere que los artículos A representen el primer 50% de las ventas, que los artículos C representen el último 50% de los artículos y que los artículos B sean los demás. ¿Qué tasas de ventas en dólares usará para separar los intervalos A, B y C?

15-9. Seleccione una muestra aleatoria de 10 artículos de su refrigerador y estime sus gastos anuales para cada artículo, para luego representar gráficamente sus datos clasificados en una curva ABC. ¿Tiende a prestar más atención al primer artículo o a los dos primeros que encabezan su clasificación?

15-10. El costo de formulación de un pedido es de 7.50 dólares. Se estima que se usarán 256 unidades en los próximos 12 meses. El costo mensual de almacenamiento de inventario por unidad es de 1.25 dólares. Calcule el tamaño óptimo de pedido.

15-11. Los costos de formulación de un pedido son de 150 dólares y se estima que en los próximos 12 meses se usarán mil unidades. El costo mensual por almacenamiento de una unidad es de 2.50 dólares.

a. Calcule el tamaño óptimo de pedido.

b. Suponga ahora que la compañía puede reducir el costo de formulación de pedido a 50 dólares, pero que para lograrlo tendría que gastar mil dólares. Suponga además que el producto sólo se venderá en los próximos dos años. Calcule la nueva cantidad óptima de pedido si se implanta el nuevo costo de formulación y determine si la compañía debe invertir los mil dólares en el programa de re ducción de costo de formulación de pedido.

15-12. La compañía ABC puede generar 18 000 unidades diarias de un producto. El costo de preparación para la producción es de 2250 dólares. En un año se emplean 2 880 000 unidades y el costo anual de al-

macenamiento por unidad es de 18 centavos. Suponga que el año tiene en 360 días y calcule el tamaño óptimo de lote para la sesión de producción.

15-13. Una compañía utiliza cierto componente en el montaje de equipo electrónico, a una tasa de 8000 por año. Cada componente vale 18 dólares y la compañía estima que el costo anual de almacenamiento en inventario es el 20% del valor del artículo.

La compañía puede producir el componente en una de dos máquinas. La máquina A tiene costo de preparación de 200 dólares y la máquina B tiene costo de preparación de sólo 100 dólares. Sin embargo, cuesta 10 centavos más por unidad producir en la máquina B que en la A.

¿Qué máquina debe usar la compañía? ¿Cuál es el tamaño óptimo de lote?

15-14. A un gerente de inventarios de ingreso reciente se le proporcionó la siguiente información acerca de un artículo:

Uso anual, en dolares = $100 000
Costo de procesamiento de pedidos = $25
Costo anual de almacenamiento por dólar = 0.20

Al pedirle que calculara una cantidad óptima de compras para el artículo, el gerente se quejó diciendo que no le habían informado del valor unitario. ¿Puede usted calcular la cantidad óptima de compra para el artículo con base en los datos que se indican? Si puede, hágalo; de lo contrario, explique por qué.

15-15. Remítase al inciso *(a)* del problema 15-4. Suponga que el proveedor ofrece a la compañía ABC un descuento de 12 centavos por unidad si se le piden lotes de 10 000 unidades. ¿Se debe aceptar el descuento?

15-16. Father's Cookies produce galletas con chispas de chocolate en un horno de gran tamaño que puede contener hasta 2000 kilogramos de galletas al mismo tiempo. La demanda anual es constante: 200 000 kilogramos; el costo variable es de 25 centavos por kilogramo. Cada vez que se hornea un lote, ya sea de 2000 kilogramos o menos, es necesario limpiar el horno; esta limpieza requiere una hora de trabajo de cuatro empleados, cada uno de los cuales recibe siete dólares por hora. El costo de almacenamiento de inventario es del 20% por dólar cada año; las galletas son inservibles si se almacenan más de 12 meses. Hay una subutilización considerable de la capacidad del horno. ¿Qué cantidad de galletas se debe producir? ¿Por qué?

15-17. Un artículo se consume con una tasa de 100 unidades anuales; los costos de formulación son de 20 dólares por pedido y los costos de almacenamiento son del 25% al año. El costo de compra de las unidades es una función de la cantidad que se compre a la vez, como sigue:

Cantidad	*Costo unitario*
1-100	$10.00
101-200	9.75
Más de 200	9.50

¿Qué cantidad de compra se debe usar para el artículo? Remítase al problema 15-7.

15-18.
a. Calcule la rotación de inventario antes de ofrecerse el descuento.
b. Calcule la rotación si se acepta el descuento.
c. A partir de sus respuestas a *(a) y (b),* ¿puede decidir si debe aceptarse el descuento? Explíquelo.

Problemas más difíciles

15-19. Considere la ecuación 15-1, costo total anual, y la ecuación 15-2, fórmula de cantidad económica de pedido. Suponga que un error en la recopilación de datos genera una Q errónea un 20% menor que la Q'' "verdadera" (es decir, $Q_{error} = 0.80\ Q'$). Sustituya

este error en la ecuación 15-1 y encuentre la diferencia porcentual en costo que se debe al error del 20% en *Q. Recomendación*[1]*:* Utilice el hecho de que con la *Q** óptima los dos términos de la ecuación 15-1 son iguales y que cada uno es la mitad del costo total anual óptimo (mínimo).

15-20. Una compañía utiliza 2000 unidades de un producto cada año (uso constante). El producto se compra a un proveedor con costo de cuatro dólares por unidad; sin embargo, la compañía debe pagar el flete desde la planta del proveedor. Cada unidad pesa cinco kilogramos y el costo de envío es de 20 centavos por kilogramo. La compañía estima que el costo de procesamiento de pedidos es de 25 dólares y que los costos de almacenamiento de inventario son el 20% anual por dólar.

a. Encuentre la cantidad óptima de pedido.

b. Suponga que en el caso de envíos de más de 300 kilogramos, pero menores de 10 000 kilogramos, se cobra una tarifa fija de 50 dólares *por envío* (no por kilogramo), mientras que en los envíos de menos de 300 kilogramos se mantiene el costo de 20 centavos por kilogramo. ¿Cuál es ahora la cantidad de pedido que se debe emplear para minimizar la suma de todos los costos varia bles relevantes?

15-21. Bancroft Press publica varios libros. Una de sus publicaciones de ventas constantes es *Cocina imaginativa,* que ahora se encuentra en su cuarta edición. Bancroft espera que la nueva edición del libro venda aproximadamente 12 500 ejemplares anuales en los próximos años.

En los años anteriores, Bancroft ha impreso y encuadernado un suministro de un año para este tipo de libro. Sin embargo, en fechas recientes se han presentado aumentos en los costos de inventario que han obligado a considerar de nuevo esta política. Específicamente, Bancroft quiere encuadernar sólo la mitad del volumen al momento de la impresión y mantener el resto como existencias sin encuadernar. La mitad restante se encuadernaría cuando fuera necesario.

Los costos son los siguientes (se omiten los costos de tipografía, los de distribución y otros que no son afectados por esta decisión):

	Impresión	*E cuader-nación*
Costo de preparación	$5 000	$1000
Costo variable por unidad	4	2

Bancroft considera que el inventario cuesta un 25% anual por dólar.

a. Si se encuaderna todo el lote al momento de la impresión, ¿cuál es la cantidad óptima de pedido? ¿Cuáles son los costos anuales totales?

b. Si sólo se encuaderna la mitad del lote, ¿cuál es la cantidad óptima para la impresión? ¿Cuáles son los costos totales anuales?

15-22. ACME Dairy produce 15 sabores de helado, cada uno de los cuales se empaqueta en unidades de medio litro, un litro y dos litros. El tiempo de cambio de configuración para el *tamaño* del paquete es de dos horas y el costo variable asociado con el cambio es de 80 dólares. La limpieza para cambiar de un *sabor* a otro requiere 30 minutos y su costo variable es de 20 dólares. La cantidad de helado que se produce y empaqueta en una hora de producción es aproximadamente 4000 litros (no importa el sabor o el tamaño del paquete) y el costo variable que se asocia a esta cantidad de producto (materiales más mano de obra directa) es de 500 dólares. El costo de almacenamiento de inventario es el 25% anual por dólar.

a. ¿Qué debe hacer ACMÉ? ¿Producir todos los tamaños de un sabor antes de pasar al siguiente o producir todos los sabores en un tamaño antes de cambiar de tamaño? ¿Por qué?

b. Suponga que la demanda en litros para cada combinación de sabor y tamaño (45 productos) es idéntica: 160 000 litros anuales para cada una. Suponga que la compañía opera 2200 horas anua les. ¿Cuál es el tamaño económico de

lote para la fabricación de todos los productos?

c. El sindicato acaba de negociar un nuevo contrato con ACMÉ, el cual limita las horas de operación a 1940 anuales (no se permite tiempo extra). ¿Cuál será el efecto de esta restricción en su respuesta a (*b*)? ¿Cuál sería el costo de la restricción para ACME?

15-23. Ace Airlines necesita 100 asistentes de vuelo nuevos cada mes para sustituir a aquellos que dejan la compañía. Los nuevos sobrecargos pasan por un curso de capacitación de cuatro semanas. El costo fijo de un curso de capacitación es de 15 000 dólares. En un año se puede efectuar cualquier numero de cursos, pero deben programarse de manera que la línea aérea siempre tenga suficientes sobrecargos. El costo del excedente de sobrecargos no es más que el salario que reciben (1500 dólares por mes). ¿Cuántos cursos de capacitación debe efectuar Ace cada mes y cuántos sobrecargos debe haber en cada curso?

15-24. En una costosa máquina cortadora automática se producen piezas de madera complejas para formar una librería (librero). La preparación de la máquina para producir las piezas cuesta 500 dólares y, una vez preparada, puede producir las piezas para 200 librerías cada día, a un costo de cinco dólares (incluyendo materia prima) por librería. Después de fabricar las piezas hay que montarlas. El supervisor de primera línea cree que hay cierto tiempo de "preparación" relacionado con el montaje, debido al fenómeno de curva de aprendizaje por el cual cada librería se monta en menor tiempo que la anterior. Él estima que este efecto se puede representar con un cargo de 50 dólares de preparación para montaje. Una vez que inicia el proceso de montaje de las librerías, la tasa es de 100 librerías diarias; el costo de la librería terminada es de 15 dólares (lo que incluye los cinco dólares de las piezas cortadas).

La demanda anual de las librerías es constante: 2500 unidades. El costo de almacenamiento es el 20% anual por dólar.

a. Suponga que se separa el departamento de corte del departamento de montaje y que las finanzas de cada uno se controlan por separado. Si usted estableciera el tamaño de sesión de producción para la *cortadora,* sin tomar en cuenta que el producto sólo es intermedio, ¿cómo lo establecería?

b. Si fuera a determinar el tamaño de lote de *montaje* sin considerar el departamento de corte, ¿cómo lo haría?

c. El supervisor ha dicho, "Las piezas sin montar no sirven de nada. Siempre que se opera la máquina cortadora hay que pasar todas las piezas por la etapa de montaje para obtener un in ventario de productos terminados que sí nos sirvan". Con base en esta política, ¿cuál es la *cantidad* económica para la producción de piezas y librerías montadas?

CAPÍTULO 16

Control de inventarios con reorden y demanda incierta

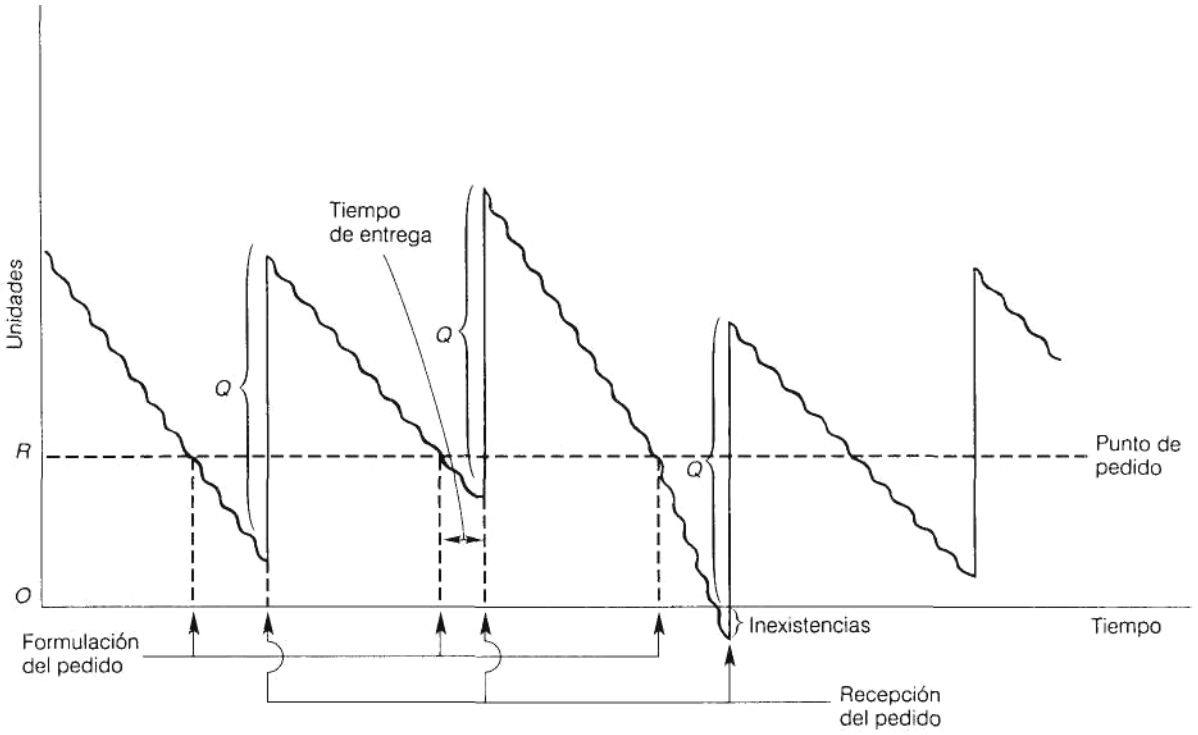
En este capítulo se amplía el tratamiento de las situaciones de control de inventario al considerar que la demanda es incierta.

En lugar de suponer que la tasa de demanda es conocida y constante, supongamos que sólo se conoce la distribución de probabilidad de la demanda durante el tiempo de entrega, pero no la demanda real durante dicho periodo. Al establecer el punto de pedido existe cierta posibilidad de que se agote el inventario e incurramos en un costo de escasez. Podemos suponer que las unidades sobrantes se pueden usar en el siguiente periodo.

La figura 16-1 ilustra el comportamiento del inventario con esta hipótesis. Observe que se formula un pedido de tamaño *Q* cuando el inventario llega al nivel *R.* No obstante, por la incertidumbre de la demanda durante el tiempo de entrega, en ocasiones se producen inexistencias (como en el tercer ciclo de la figura 16-1). El costo anual esperado de la escasez será afectado por la elección de punto de pedido *(R) y* el tamaño *(Q).*

Antes de continuar con el análisis es importante subrayar que los modelos de este capítulo únicamente son apropiados cuando la demanda que se muestra en la figura 16-1 proviene de un número bastante grande de fuentes **independientes.** Por lo general se presenta esta situación con los inventarios de bienes terminados, pero no con las materias primas ni los componentes en una situación de manufactura. Por ejemplo, en este último caso, se pueden comprar varios tamaños de motores eléctricos para el montaje de aparatos de aire acondicionado. Como la "demanda" de los motores depende por completo del programa de montaje de los aparatos, a esta demanda se le llama **dependiente** y no independiente. Para las situaciones de demanda dependiente se ha desarrollado una técnica de programación de actividades llamada **planificación de requisitos de materiales (MRP,**

Figura 16-1 Ejemplo de patrón de inventario



material requirements planning).[1] Los modelos de este capítulo sólo deben utilizarse en situaciones con demanda independiente.

Ahora queremos dividir el inventario en dos tipos: existencias de ciclo y existencias de seguridad. Las **existencias de ciclo** corresponden al inventario que se analizó en el capítulo 15: *Q/2* como promedio. Es el inventario que debe tenerse como función del tamaño de pedido *(Q)*. Las **existencias de seguridad** son la diferencia entre el punto de pedido *(R) y* la demanda promedio durante el tiempo de entrega del reabastecimiento $(\overline{M})$(véase Fig. 16-2). Cuanto mayores son las existencias de seguridad (y el punto de pedido correspondiente), menor es la posibilidad de que se produzcan inexistencias, y viceversa.

Al llegar a este punto es interesante ver la interacción entre los diversos costos y las dos variables (punto de pedido y tamaño de pedido) que se presentan en la tabla 16-1.

[1] Para un análisis detallado del MRP, véase J. A. Orlicky, *Material Reqi/irernents Planning,* Nueva York, McGraw-HM, 1975.

Figura 16-2 Existencias de ciclo y existencias de seguridad con tasa de demanda promedio

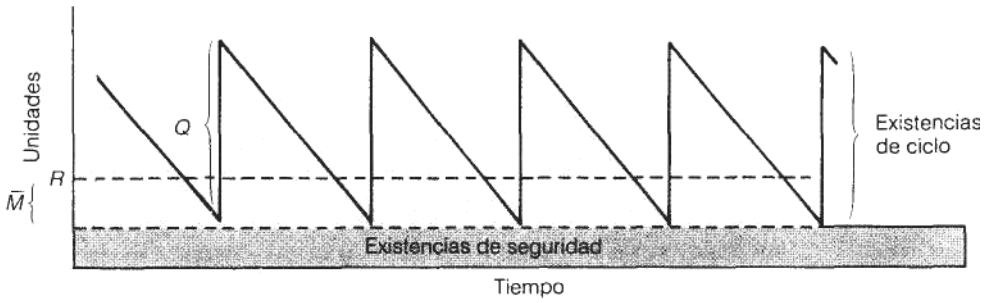


Tabla 16-1 Acciones y resultados

Acción	*Resultado*
Reducir el punto de pedido (es decir, formular el pedido cuando existan menos unidades disponibles)	Reducción en los costos de almacenamiento de las existencias de seguridad y aumento en el costo de escasez.
Reducir el tamaño de pedido.	Reducción en los costos de almacenamiento de las existencias de ciclo *(Q/2) y* aumento en los costos de escasez y de formulación de pedidos.
Aumentar el punto de pedido.	Aumento en los costos de almacenamiento de existencias de seguridad y reducción en el costo de escasez.
Aumentar el tamaño de pedido.	Aumento en los costos de almacenamiento de existencias de ciclo y reducción en los costos de escasez y de formulación de pedidos.

Un cambio en el tamaño de pedido afecta a la frecuencia con la cual se llega al punto de pedido (por lo tanto, la frecuencia de que exista la posibilidad de una escasez). Un cambio en el punto de pedido afecta la probabilidad de escasez y afecta el número óptimo de veces que se alcanzará el punto de pedido. Por lo tanto, el costo total se ve afectado por el punto de pedido y el tamaño del pedido, y el punto de pedido óptimo y el tamaño óptimo de pedido están relacionados.

Para modelizar esta situación de inventario hay que decidir cómo evaluar la escasez. Lo primero será suponer que se puede estimar el costo de la falta de una unidad (el costo de la escasez). Aunque la estimación de este tipo de costo es difícil y requiere una cuidadosa evaluación y buen juicio, muchas veces la gerencia está dispuesta a establecer un intervalo para este costo, como sería "menos de 20 dólares" o "definitivamente más de cinco dólares". Además, una vez que se estima este costo, todos los artículos se tratarán en forma consistente. A sabiendas de las posibles dificultades de este enfoque, más adelante presentaremos un modelo alternativo que permite a la gerencia especificar la fracción de demanda anual que se proveerá con las existencias.

Modelo de costo de escasez

Una vez más, lo que se busca es minimizar el costo total en un periodo determinado. Ahora hay que considerar tres costos:

K = Costo de formulación de un pedido.
k_c = Costo anual de almacenamiento de una unidad en inventario
k_u = Costo de que falte una unidad de existencias (costo de escasez)

El tamaño óptimo de pedido y el punto óptimo de pedido serán, por lo general, una función de estos tres costos más la tasa promedio de demanda durante el tiempo de entrega y la variación de la demanda durante el tiempo de entrega.

Hipótesis

Se supondrá primero que el tiempo de reabastecimiento es conocido y constante. Segundo, se supone que el costo de escasez es un costo unitario, independiente de la duración de la situación de inexistencias.[2] La tercera suposición es que M, la demanda durante el tiempo de entrega, tiene una distribución normal. Esta última es la menos indispensable de las suposiciones y puede cambiarse; se escoge para simplificar los cálculos. A continuación, se supone que el punto óptimo de pedido R es mayor que la demanda promedio durante el tiempo de entrega, M, para que las existencias de seguridad correspondientes $(R - \overline{M})$ sean positivas. Por último se supondrá que, en promedio, el inventario siempre contará con existencias de seguridad. Lo que queremos determinar es cuánto pedir (Q) y cuándo pedirlo (R).

Modelo

Sea:

R = Punto de pedido (el número total de unidades disponibles y en pedido que activa el nuevo pedido)
Q = Cantidad de pedido (número de unidades pedidas al mismo tiempo)
D = Demanda anual promedio
K = Costo de formulación de un pedido
k_c = Costo de almacenamiento de una unidad en inventario durante un año
k_u = Costo adicional por la inexistencia de una unidad (costo de escasez)
M = Número de unidades de demanda durante el tiempo de entrega de reabastecimiento (una variable aleatoria)

[2] Esta medición de la escasez es la más adecuada cuando se pierden ventas si no hay inventario disponible. En este caso, el costo de la escasez representará el costo de oportunidad de la venta perdida más los costos de reacción negativa.

$\overline{M}$ = Número promedio de unidades de demanda durante el tiempo de entrega
σ_M = Desviación estándar de la demanda durante el tiempo de entrega.

Queremos determinar la cantidad óptima de pedido (Q) y el punto óptimo de pedido *(R)*. Supondremos, como aproximación razonable, que la cantidad óptima de pedido para esta situación (demanda aleatoria) es igual a la cantidad económica de pedido (CEP) para el caso de la demanda constante que se vio en el capítulo 15. Es decir, se recomendará usar la misma fórmula CEP que se obtuvo entonces:

$$Q = \sqrt{\frac{2KD}{k_c}} \qquad (16\text{–}1)$$

Hay dos razones por las cuales se hace esta recomendación. Primero, como se mostró en el capítulo 15, la suma de los costos anuales de procesamiento de pedidos más los costos anuales de almacenamiento de inventario no es muy sensible a los errores moderados en Q; mientras la cantidad de pedido esté razonablemente cerca del valor óptimo, no se requiere demasiada precisión. Segundo, varios estudios han indicado que, aunque en teoría Q y R se deben determinar en forma *simultánea,* en la mayoría de las situaciones prácticas no hay consecuencias de costo serias si Q se determina *independientemente* con la fórmula CEP de raíz cuadrada de la ecuación 16-1. Por lo tanto, se utilizará la ecuación 16-1 como la fórmula básica para Q, incluso si la demanda es probabilistica.[3]

Después de escoger Q, es importante tener en cuenta su valor al determinar R, ya que el tamaño de Q influye directamente en el número de veces por año que se estará expuesto a la posibilidad de inexistencias.

Punto óptimo de pedido: Método marginal

Es posible obtener la fórmula para el punto óptimo de pedido si se aplica el análisis marginal de la siguiente manera. Se comienza con un valor cualquiera para el punto de pedido R, por ejemplo, $R = \overline{M}$, la demanda promedio durante el tiempo de entrega. Luego nos preguntamos si vale la pena aumentar R en una unidad. En otras palabras, se compara el costo anual esperado de añadir otra unidad a R frente al costo anual esperado de *no* agregar la unidad.

El costo anual incremental de *añadir* una unidad a R es aproximadamente igual a k_c, ya que la unidad adicional se agregará a las existencias de seguridad $(R - \overline{M})$ y por consiguiente se mantendrá en inventario casi todo el tiempo.[4]

El costo anual incremental esperado de *no añadir* la unidad a R será igual a la probabilidad de que se demande la unidad adicional (o más) durante el tiempo de

[3] R. G. Brown mostró que el único error grave que se comete al usar la fórmula CEP anterior aparece cuando la CEP es menor que la desviación estándar de la demanda durante el tiempo de entrega (σ_M). En esta situación, un método heurístico excelente consiste en hacer que la cantidad de pedido sea igual a σ_M. Para conocer los detalles al respecto, véase R. G. Brown, *Moleríais Management Systems,* Nueva York, John Wiley & Sons, 1977.

[4] Esta aproximación es razonable, ya que la unidad adicional siempre se representará en el inventario excepto durante las inexistencias (lo cual sucede sólo una fracción del tiempo).

entrega, multiplicada por el costo unitario de inexistencias k_u, todo ello multiplicado por el número de ciclos de inventario en el año *(D/Q):*

$$\begin{matrix}\text{Costo incremental}\\ \text{de no agregar la}\\ \text{unidad adicional}\end{matrix} = \text{Prob}\left[\begin{matrix}\text{Demanda de}\\ \text{la siguiente}\\ \text{unidad (o más)}\end{matrix}\right] \cdot k_u \cdot \left[\frac{D}{Q}\right]$$

Suponga que se define *F(R)* como la probabilidad de que la demanda (M) durante el tiempo de entrega sea menor o igual que el valor actual de *R:*

$$F(R) = \text{Prob}(M \leq R)$$

Entonces la probabilidad de que se requiera la siguiente unidad (o más) es 1 - *F(R).* Los costos de añadir y no añadir la unidad adicional se representan en la figura 16-3.

Observe que al aumentar *R* se reduce la probabilidad de que se requiera la unidad adicional (o más) y, como resultado, las dos líneas se cruzan en la figura 16-3. En este punto se deja de añadir unidades a *R,* ya que el costo de agregar una unidad excede el costo de no agregarla. Los costos son iguales en el punto donde se cruzan las dos líneas:

$$k_c = [1 - F(R)] \cdot k_u \cdot \frac{D}{Q}$$

o sea:

$$[1 - F(R)] = \frac{k_c Q}{k_u D}$$

de manera que:

$$F(R) = 1 - \frac{k_c Q}{k_u D} \qquad \textbf{(16–2)}$$

La ecuación 16-2 se puede usar para obtener el valor óptimo de *R:*

1. Calcule *Q* con la fórmula CEP de raíz cuadrada (ecuación 16-1).
2. Calcule el valor de la ecuación 16-2, es decir, la probabilidad *deseada* de que la demanda durante el tiempo de entrega sea menor o igual que *R.*
3. En las tablas normales encuentre el valor de *R* al cual se aplica la probabilidad mencionada.

El término *F(R)* en la ecuación 16-2 quiere decir: "Establezca *R* de manera que haya una probabilidad de

$$1 - \frac{k_c Q}{k_u D}$$

de que *M* sea menor o igual que *R*".[5]

[5] *F(R)* es la cola *izquierda* de una distribución de probabilidad, es decir, la probabilidad de $(M \leq R)$. En la mayoría de las situaciones empresariales el costo de escasez será mucho mayor que el costo de almacenamiento, por lo que la razón generalmente será mayor que 0.50 y las existencias de seguridad $(R - \overline{M})$ serán positivas.

Figura 16-3

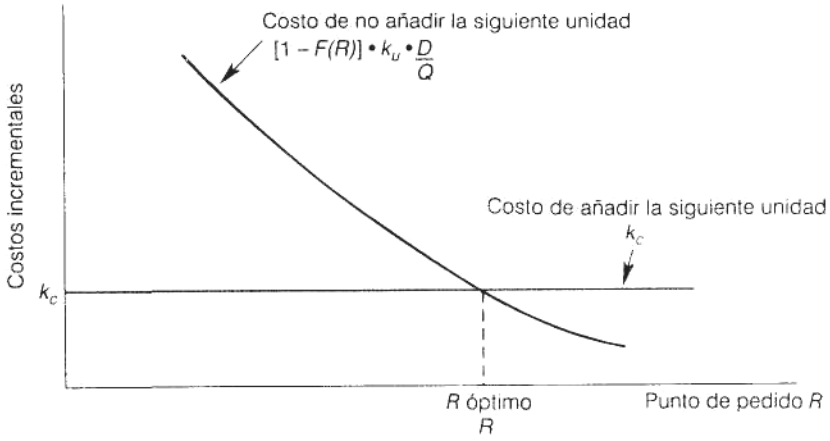
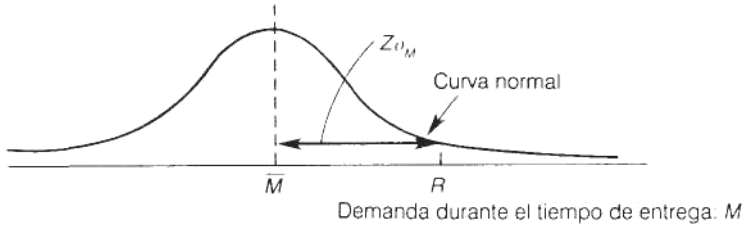


Figura 16-4



Sea Z el número de desviaciones estándar[6] que hay que desplazarse a partir de la media de las ventas, $\overline{M}$,para que la probabilidad de que la demanda, M, sea igual o menor que *R,* o sea *F(R).* Se puede obtener *R,* el punto de pedido óptimo, de la siguiente manera (véase Fig. 16-4):

$$R = \overline{M} + Z\sigma_M \qquad \textbf{(16–3)}$$

Observe que, por definición, el punto de pedido es igual a la demanda promedio durante el tiempo de entrega más las existencias de seguridad. Por ¡o tanto, las existencias de seguridad son $Z\sigma_M$.

Ejemplo 1 Se supone que la cantidad de pedido, *Q,* ya ha sido determinada y que el problema es encontrar el punto óptimo de pedido.

[6] Véase el capítulo 7 para la discusión de este tipo de cálculo.

Sea:

D = 100 unidades por año
Q = 50 unidades
k_c = 40 dólares por unidad al año
k_u = 80 dólares por unidad faltante
$\overline{M}$ = 20
σ_M = 5

Entonces:

Haciendo referencia a la tabla de probabilidades acumuladas para la distribución normal estandarizada (Tabla A del apéndice al final del texto), se obtiene que Z = 0.67.

El punto óptimo de pedido es:

Con un punto de pedido de 23 unidades no se presentará escasez de existencias aproximadamente el 75% del tiempo durante el periodo de pedido (recuerde, la demanda media es 20 unidades). Las existencias de seguridad son tres unidades.

El siguiente ejemplo ilustra el cálculo del tamaño óptimo de pedido y el punto de pedido.

La cantidad que se espera usar *(D)* es 1800 unidades por año.

El costo de efectuar un pedido *(K)* es de 10 dólares.

El costo de almacenamiento de una unidad durante un año es de 60 centavos (esto es k_c).

El tiempo de entrega del reabastecimiento es de 20 días; la demanda media,

Ejemplo 2

- ■
- ■
- ■
- ■

$\overline{M}$, durante el

30 unidades y distribución normal.

- ■ El costo de escasez es de cinco dólares por unidad (esto es k_u).

Se puede determinar Q a partir de la ecuación 16-1:

De la ecuación 16-2 se obtiene:

unidades

$$F(R) = 1 - \frac{k_c\, Q}{K_u\, D} = 1 - \frac{0.6(245)}{5(1\,800)} = 0.98367$$

Haciendo referencia a la tabla de probabilidades acumuladas para la distribución normal (Tabla A del apéndice al final del libro), $F(R) = 0.98367$ equivale a:

$$Z = 2.14 \text{ desviaciones estándar}$$

Por lo tanto:

$$R = 100 + 2.14 \cdot 30 = 164 \text{ unidades.}$$

Las existencias de seguridad del ejemplo 2 son 64 unidades.

Observe la diferencia en los dos ejemplos. En el ejemplo 2, tanto el costo de escasez como la variación de la demanda durante el tiempo de entrega fueron mucho mayores que en el ejemplo 1, lo que dio como resultado existencias de seguridad mucho mayores.

Cálculo de la desviación estándar de la demanda durante el tiempo de entrega (σ_M)

El tiempo de entrega del reabastecimiento generalmente es distinto del periodo de tiempo normal (por ejemplo, semanal o mensual) que se usa para recopilar los datos de la demanda. Lo que se necesita es una forma de calcular σ_M a partir de $\sigma_{,,}$ donde a_{j} se refiere a la desviación estándar de la demanda durante el periodo de tiempo normal (es fácil obtener este valor a partir de los datos de la demanda; véase Cap. 3). Suponga, por ejemplo, que el tiempo de entrega es tres semanas y el periodo normal es una semana. Considere la demanda durante el tiempo de entrega como la suma de tres demandas semanales aleatorias. Entonces, si las demandas semanales son independientes, la varianza de la suma equivale a la suma de las varianzas (véase Cap. 3):

$$\sigma_M^2 = \sigma_1^2 + \sigma_1^2 + \sigma_1^2 = 3\sigma_1^2$$

de manera que:

$$\sigma_M = \sqrt{3}\,\sigma_1$$

Si L es la duración del tiempo de entrega, entonces la fórmula general es:

$$\sigma_M = \sqrt{L}\,\sigma_1 \qquad \textbf{(16–4)}$$

Ejemplo

Suponga que la demanda semanal de un artículo tiene una media de 100 unidades y desviación estándar de 10 unidades ($\sigma_1 = 10$). Si el tiempo de entrega es cuatro semanas, ¿cuál es la media ($\overline{M}$) y la desviación estándar (σ_M) de la demanda durante el tiempo de entrega?

$$\overline{M} = 4(100) = 400$$
$$\sigma_M = \sqrt{4}(10) = 2(10) = 20$$

Costo total esperado

El costo total para una política de inventario de *(Q,R)* es:[7]

$$\text{Costo total } (Q, R) = [K + k_u \sigma_M N(Z)]\frac{D}{Q} + \left[\frac{Q}{2} + (R - \overline{M})\right] k_c \qquad (16\text{-}5)$$

donde *N(Z)* se refiere a la función de pérdida unitaria para la distribución normal estandarizada (tabla B del apéndice al final del libro) *y Z es* igual a *R* convertida en unidades de desviación estándar con respecto a la demanda media durante el tiempo de entrega:

$$Z = \frac{R - \overline{M}}{\sigma_M}$$

Continuando con el ejemplo 2, el costo total de una política de pedir 245 unidades con un punto de pedido de 164 unidades es:

$$TC(Q, R) = [K + k_u \cdot \sigma_M \cdot N(2.14)]\frac{D}{Q} + \left[\frac{Q}{2} + (R - \overline{M})\right] k_c$$

$$TC(Q, R) = [10 + 5 \cdot 30 \cdot 0.0058]\frac{1\,800}{245} + \left[\frac{245}{2} + 164 - 100\right](0.6)$$

$$= (10.87)7.35 + (186.5)0.6$$

$$= 79.89 + 111.90 = 191.79$$

Recuerde que los valores anteriores para *Q y R* se determinaron con la fórmula CEPde raíz cuadrada (Ecuación 16-1) para *Q*. Busquemos ahora el costo total sin esta aproximación. Es posible encontrar por tanteo el par de valores precisos de *Q y R* que minimiza el costo total; estos valores son *Q* = 255 y *R* = 164. El costo total (mínimo) de estos valores óptimos es:

$$TC(Q, R) = [10 + 5 \cdot 30 \cdot 0.0058]\frac{1\,800}{255} + \left[\frac{255}{2} + 164 - 100\right](0.6)$$

$$= (10.87)7.06 + (191.5)0.6 = 76.74 + 114.90 = 191.64$$

Los valores más precisos generan un costo anual esperado que sólo es 15 centavos (o un 0.08%) menos que la regla de decisión en la cual la cantidad de pedido se calcula en forma independiente del punto de pedido.

En el ejemplo anterior, el costo total no es muy sensible a la cantidad de pedido si se pide una cantidad cercana a 250 unidades. Por lo tanto, recomendamos que se use la ecuación 16-1 para obtener una cantidad de pedido *Q* aproximada y luego usar la ecuación 16-2 para obtener el punto de pedido *R* correspondiente. Casi siempre el efecto de esta aproximación sobre el costo total es mínimo, como sucedió en el ejemplo.

[7] Véase el apéndice al final del capitulo para conocer la obtención de la fórmula.

Modelo de nivel de servicio

El modelo anterior es recomendable cuando se puede determinar razonablemente el costo (por unidad) de escasez. Como alternativa, es posible satisfacer una fracción específica de la demanda (por ejemplo, el 95%) a costo mínimo. En este caso, la tarea de estimar un costo de escasez es un problema de determinación del nivel de servicio deseado, donde el nivel de servicio se define como el porcentaje de demanda que se satisface con las existencias (sin pedidos atrasados). La determinación de los niveles de servicio se puede basar en lo que ofrece la competencia (la gerencia puede decidir cumplir o superar los niveles de servicio de la competencia).

Se usarán las mismas hipótesis y la misma notación que antes, incorporando ahora:

P =Nivel de servicio (fracción de demanda que se cubre con las existencias)

Se recomienda usar una vez más la fórmula CEP de raíz cuadrada para determinar la cantidad de pedido, por las mismas razones que se expusieron antes. En lo que se refiere al punto de pedido, primero se escribirá la expresión[8] para el número esperado de pedidos no satisfechos durante el tiempo de entrega como una función de Z, número de desviaciones estándar de protección:

$$\text{Pedidos no satisfechos esperados en el tiempo de entrega} = \sigma_M N(Z) \quad \textbf{(16-6)}$$

donde $N(Z)$ es el valor correspondiente de la tabla de pérdida normal por unidad que se presenta en la tabla B del apéndice al final del libro.

A continuación se observa que la demanda promedio durante un ciclo de reabastecimiento debe ser igual al suministro promedio a largo plazo, y como la cantidad que se provee es Q, la demanda promedio durante el ciclo también es Q. Ahora se puede escribir la fracción esperada de pedidos no satisfechos durante un ciclo:

$$\text{Fracción de pedidos no satisfechos por ciclo} = \frac{\sigma_M N(Z)}{Q} = 1 - P \quad \textbf{(16-7)}$$

Como el nivel de servicio deseado es P, la ecuación 16-7 se puede igualar a $1 - P$, como se muestra. Al reacomodar la ecuación se obtiene:

$$N(Z) = \frac{Q(1 - P)}{\sigma_M} \quad \textbf{(16-8)}$$

La ecuación 16-8 se usa de la siguiente manera para obtener el valor óptimo de R:

1. Calcule Q de la fórmula CEP de raíz cuadrada (Ecuación 16-1).
2. Calcule el lado derecho de la ecuación 16-8.

[8] Véase el apéndice al final del capítulo para la obtención de la fórmula.

3. A partir de la tabla de pérdida unitaria normal *N(Z)* (Tabla B del apéndice final del libro), encuentre el valor de Z que satisface la ecuación 16-8.[9]

4. Entonces $R = \overline{M} + Z\sigma_M$.

Ejemplo 3 Considere el ejemplo 1 anterior, pero en lugar de un costo de escasez de 80 dólares por unidad faltante, suponga que la gerencia desea satisfacer el 97% de la demanda a partir de las existencias *(P* = 0.97). De la ecuación 16-8:

$$\frac{Q(1 - P)}{\sigma_M} = \frac{50 \cdot 0.03}{5} = 0.3$$

De la tabla B, el valor correspondiente de Z es 0.22, por lo que el punto óptimo de pedido es:

$$R = \overline{M} + Z\sigma_M = 20 + (0.22)(5) = 21.10 = 21 \text{ unidades}$$

Con un punto de pedido de 21 unidades se satisfará aproximadamente el 97% de la demanda.

Es importante señalar que el *nivel de servicio* que se usa aquí *no* es lo mismo que la probabilidad de que no haya inexistencias durante el tiempo de entrega. Por desgracia, algunos autores usan el nivel de servicio para referirse a esta probabilidad. Para mostrar la diferencia, considere el ejemplo 3, donde el valor de Z óptimo es 0.22. Si se emplea la tabla A del apéndice al final del libro, este valor de Z producirá una probabilidad de 0.5871 de que no haya inexistencias durante el tiempo de entrega. La razón por la cual el porcentaje de la demanda que se satisface con las existencias disponibles (nuestra definición de nivel de servicio) puede ser un 97%, a la vez que la probabilidad de que no haya inexistencias durante el tiempo de entrega sea sólo el 59%, tiene que ver con el tamaño de la cantidad de pedido Q con respecto al tamaño de la desviación estándar de la demanda durante el tiempo de entrega σ_M (véase Ecuación 16-8). Intuitivamente, si hay inexistencias, el número de demandas que no se cumplen a partir de las existencias es muy pequeño, por lo que, en promedio, el 97% de todas las demandas se cubren con las existencias.

Cuando se escucha la expresión "nivel de servicio" hay que preguntar cómo se define, para evitar confusiones y malos entendidos. La definición que se emplea aquí es más útil para la gerencia.

Otras mediciones de la escasez

Además del costo monetario por unidad carente y el porcentaje establecido para el servicio, se han formulado otras medidas de la aparición de escasez y se han "resuelto" para las fórmulas correspondientes de punto óptimo de pedido. El lector puede consultar la bibliografía final del capítulo para obtener información adicional al respecto.

---

[9] Si el valor de la ecuación 16-8 excede el valor más alto de la tabla (0.3989), se hace Z igual a cero y el nivel de servicio actual excederá el valor especificado. Esta situación se debe a un gran valor de Q con respecto a σ_M.

Sistemas justo a tiempo

Los japoneses han hecho de la planificación de inventarios un arte, y su política de inventarios "justo a tiempo" (JAT) es un concepto alternativo muy interesante y atractivo.

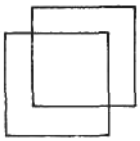
Observe que si el costo de preparación o de formulación de pedido se aproxima a cero, la cantidad de pedido de inventario se hace cada vez más pequeña (véase la fórmula CEP de la Ecuación 16-1). En dicho caso, el promedio de las existencias de ciclo será muy pequeño.

Además, si el tiempo de entrega es cercano a cero (el tiempo de preparación o formulación de pedido es muy breve), el nivel de inventario también puede ser muy pequeño. Si se requiere una unidad, se puede producir o comprar en muy poco tiempo. Además, si las ventas esperadas durante el tiempo de entrega tienen una varianza muy pequeña (casi cero), entonces no hay necesidad de contar con grandes existencias de seguridad.

Por lo tanto, hay situaciones en las cuales la política de inventario justo a tiempo es consistente con los modelos de este capítulo. Específicamente, la política JAT es el caso especial en el cual los costos de preparación son muy pequeños y los tiempos de entrega son muy breves. Sin embargo, si existe mucha incertidumbre acerca del nivel de ventas durante el tiempo de entrega o si el tiempo de reabastecimiento es incierto, y el costo de las inexistencias es muy elevado, entonces hay suficiente justificación para tener existencias de seguridad. Una política justo a tiempo no sería deseable si fuera alta la probabilidad de escasez o si el costo asociado fuera muy grande.

En resumen, los japoneses han hecho un trabajo excelente para obligarnos a considerar los modos de reducir el inventario y los costos de mantenimiento de inventario. En el capítulo 15 se analizó la forma en que el concepto justo a tiempo (JAT) permite encontrar maneras de reducir el costo de pedido. En este capítulo se ve que si es posible reducir el tiempo de entrega del reabastecimiento, se obtendrá una reducción en la desviación estándar de la demanda durante el tiempo de entrega (σ_M) y, por lo tanto, una reducción en el inventario de existencias de seguridad. Una vez más, hay que tener presente los tres tipos de costos en un sistema de inventario: costos de formulación de pedidos, costos de almacenamiento y costos de escasez.

RESUMEN



Incluso si la demanda es incierta, es posible utilizar la fórmula CEP de raíz cuadrada para el tamaño de pedido. Para el punto de pedido se puede evaluar un costo unitario de escasez o especificar un nivel de servicio deseado. Se ha obtenido una fórmula óptima de punto de pedido para ambos casos.

APÉNDICE



Determinación del punto óptimo de pedido y tamaño del pedido

Sea:

Q = Tamaño del pedido
R = Punto de pedido

D = Demanda promedio por año
M = Cantidad de demanda durante el tiempo de entrega ($\overline{M}$ = cantidad promedio); una variable aleatoria
$f(M)$ = Función de densidad de probabilidad para M
$R - \overline{M}$ = Existencias de seguridad
σ_M = Desviación estándar de la demanda durante el tiempo de entrega
$R - M$ = Unidades no vendidas cuando se reciben nuevas unidades (si $M < R$)
$M - R$ = Cantidad por la cual la demanda durante el tiempo de entrega excede el punto de pedido (si $M > R$)
K = Costo de formulación del pedido
k_c = Costo anual de almacenamiento por unidad
k_u = Pérdida por una unidad de inexistencia (costo de escasez)

Costo anual total esperado

El costo total de una política que supone un punto de pedido específico, *R, y* una cantidad de pedido específica, *Q,* es igual a la suma de los costos de formulación de pedido, los costos de inexistencias y los costos de almacenamiento de inventario:

$$\text{Costo total } (Q, R) = K\left(\frac{D}{Q}\right) + \left[k_u \int_R^{\infty} (M - R) f(M) dM\right] \frac{D}{Q} + \left[\frac{Q}{2} + (R - \overline{M})\right] k_c \qquad \textbf{(16–9)}$$

donde $K(D/Q)$ es el costo de formulación de pedidos; K es el costo por pedido; D/Q es el número anual de pedidos:

$$\left[k_u \int_R^{\infty} (M - R) f(M) dM\right] \frac{D}{Q}$$

es el costo de inexistencias; k_u es el costo por unidad; la integral es el número esperado de unidades de inexistencia por ciclo; D/Q es el numero anual de ciclos de reabastecimiento, es decir, el número anual de pedidos; $[(Q/2 + (R - M)]k_c$ es el costo de almacenamiento de inventario; y k_c es el costo de almacenamiento de una unidad durante un año. El resto de la expresión es el inventario promedio; $Q/2$, el inventario de promedio de existencias de ciclo, más las existencias de seguridad promedio $(R - \overline{M})$. El término $(R - \overline{M})$ sólo aproxima el nivel promedio de las existencias de seguridad, pero esta aproximación es válida en la mayoría de los casos prácticos (véase pie de página 4 de este capítulo).

Las ecuaciones para Q *y* $F(R)$ se obtienen de la ecuación 16-9, la ecuación de costo total, tomando las derivadas parciales con respecto a R *y* con respecto a Q e igualando éstas a cero.[10]

[10] El símbolo $\underset{-\infty}{\overset{R}{E}}(M)$ que aparece en las ecuaciones es la expectativa parcial; es igual a $\int_{-\infty}^{R} Mf(M)dM$.

$$\text{Costo total } (Q, R) = K\frac{D}{Q} + \left[\frac{Q}{2} + (R - \overline{M})\right]k_c + \left[k_u\int_R^{\infty}(M - R)\,f(M)dM\right]\frac{D}{Q}$$

$$= K\frac{D}{Q} + k_c\left[\frac{Q}{2} + (R - \overline{M})\right] + \frac{D}{Q}k_u\left[\overline{M} - \underset{-\infty}{\overset{R}{E}}(M) - R[1 - F(R)]\right]$$

Al obtener la derivada con respecto a *R:*

$$\frac{\partial \text{ Costo total}}{\partial R} = k_c - \frac{D}{Q}k_u R\,f(R) + \frac{D}{Q}k_u[F(R) + R\,f(R) - 1]$$

$$= k_c - \frac{D}{Q}k_u + \frac{D}{Q}k_u F(R)$$

Al igualar la derivada a cero y resolver para $F(R)$:[11]

$$F(R) = 1 - \frac{k_c Q}{k_u D} \qquad \textbf{(16–2)}$$

Al derivar el costo total con respecto a *Q:*

$$\frac{\partial \text{ Costo total } Q, R)}{\partial Q} = -\frac{KD}{Q^2} + \frac{k_c}{2} - \frac{D}{Q^2}k_u\int_R^{\infty}(M - R)f(M)dM$$

Al igualar la derivada a cero y resolver para *Q:*

$$Q = \sqrt{\frac{2D\left[K + k_u\int_R^{\infty}(M - R)f(M)dM\right]}{k_c}} \qquad \textbf{(16–10)}$$

La ecuación 16-10 se puede convertir en una forma que sea más susceptible a los cálculos. Se puede aprovechar el hecho de que *M* se distribuye normalmente y *R* es mayor que las ventas esperadas $(\overline{M})$ durante el periodo de reorden, entonces:

$$\int_R^{\infty}(M - R)f(M)dM = \sigma_M N(Z) \qquad \textbf{(16–11)}$$

donde *N(Z)* es la integral de pérdida normal por unidad para Z (*R* se convierte en desviaciones estándar con respecto a la media). σ_M es la desviación estándar de la distribución de la demanda durante el tiempo de entrega. La ecuación 16-11 es el número esperado de pedidos no satisfechos durante el tiempo de entrega.

[11] También hay que revisar las condiciones de segundo grado.

La ecuación 16-10 se convierte entonces en:

$$Q = \sqrt{\frac{2D[K + k_u\sigma_M N(Z)]}{k_c}} \qquad \textbf{(16–12)}$$

Observe que R está en la fórmula anterior (ecuación 16-10) para Q y que Q está en la ecuación 16-12 para R. En teoría, debe ser posible resolver las dos ecuaciones en forma simultánea, lo cual puede lograrse con un procedimiento iterativo que comienza con una estimación de Q, se resuelve para R, luego se resuelve para una nueva Q y se repite el proceso hasta encontrar una Q *y* una R que satisfagan ambas ecuaciones. A efectos prácticos, basta determinar el valor de Q con la fórmula del capítulo anterior, en la cual se suponía demanda cierta:

$$Q = \sqrt{\frac{2KD}{k_c}} \qquad \textbf{(16–1)}$$

La ecuación de costo total se puede simplificar (suponiendo $R > M$) si se utiliza la ecuación 16-11. Al sustituirla en la ecuación 16-9, se obtiene:

$$\text{Total cost } (Q, R) = [K + k_u\sigma_M N(Z)]\frac{D}{Q} + \left[\frac{Q}{2} + (R - \overline{M})\right]k_c \qquad \textbf{(16–13)}$$

Bibliografía

Véase la bibliografía del capítulo 15.

Problemas con respuestas

16-1. La siguiente información se refiere a un artículo en inventario:

k_u = Dos dólares de costo por unidad de ventas perdidas
$\overline{M}$ = 50 ventas promedio durante el tiempo de entrega
σ_M = 10 unidades
D = 1000 unidades por año (demanda estimada)
K = Seis dólares por pedido (costo de formulación de pedido)
k_c = 30 dólares (costo anual de almacenamiento de una unidad en inventario)

Se supone que la distribución de M es normal.

a. Calcule el tamaño óptimo de pedido aproximado.
b. Calcule el punto óptimo de pedido aproximado.

16-2. La demanda media de un artículo del inventario para el próximo año es de 40 000 unidades. El tiempo de entrega es de 36 días y la demanda media durante el tiempo de entrega es de 4000 unidades. Se supone que la demanda durante el tiempo de entrega tiene una distribución normal con $\sigma = 500$. El costo unitario de escasez es de 10 dólares; el costo de formulación de un pedido es de 64 dólares; y el costo de almacenamiento de una unidad en inventario durante un año es de dos dólares.

a. Calcule el tamaño óptimo de pedido aproximado (redondee a la unidad entera más próxima).
b. Calcule el punto óptimo de pedido aproximado.
c. Calcule el costo total del tamaño de pedido y el punto de pedido aproximados.

16-3. Una compañía petrolera perfora en Alaska en busca de petróleo y se preocupa por su inventario de piezas de repuesto. Se requiere un mes para recibir los pedidos. Considere la pieza 8J2N, (se espera que la demanda sea de 100 partes por mes: 1200 por año). La demanda durante el tiempo de entrega (un mes) es aproximadamente normal con desviación estándar de 40. El costo por pedido es de 1000 dólares; el costo de almacenamiento es de 20 dólares por año; y el costo de escasez es de 200 dólares por unidad. Determine el tamaño de pedido Q y el punto de pedido R.

16-4. La demanda promedio de un artículo durante el tiempo de entrega es de 100 unidades, con desviación estándar de 30. La cantidad de pedido es de 200 unidades. La gerencia quiere que se satisfaga el 99% de la demanda a partir de las existencias.
a. ¿Cuál es el punto de pedido óptimo?
b. Suponga que la gerencia desea un nivel de servicio del 98%; ¿cuál sería el punto de pedido óptimo?
c. Suponga que la gerencia quiere un nivel de servicio del 90%. Calcule el punto de pedido óptimo.

Problemas

16-5. Un vendedor al por menor presiente que la demanda media de un artículo de su inventario en el próximo año será de 1800 unidades. El tiempo de entrega de los pedidos es de 20 días y la demanda promedio en dicho periodo es de 100 unidades. Se supone que la demanda durante el tiempo de entrega tiene una distribución normal con $\sigma = 30$ (hay un 50% de posibilidad de que la demanda durante el tiempo de entrega sea menor de 80 unidades o mayor de 120 unidades). El costo por unidad de ventas perdidas es de cinco dólares, el costo de formulación de un pedido es de 10 dólares y el costo de almacenamiento de una unidad en inventario durante un año es de 50 dólares.
a. Calcule el tamaño óptimo de pedido aproximado (redondee a la unidad entera más próxima).
b. Calcule el punto óptimo de pedido aproximado.

16-6. La demanda media en el próximo año para un artículo en inventario es 4000 unidades. El tiempo de entrega de los pedidos es 10 días. La demanda del producto durante el tiempo de entrega tiene una distribución normal con desviación estándar de 30 unidades. El costo por unidad de ventas perdidas es de cinco dólares, el costo de formulación de un pedido es de diez dólares y el costo de almacenamiento de una unidad en inventario durante un año es de 50 centavos.
a. Calcule la estimación de Q por raíz cuadrada.
b. Calcule el punto de pedido.
c. Calcule el tamaño óptimo de pedido después de la iteración (véase el apéndice al final del capítulo).
d. Calcule el costo total del tamaño inicial de pedido y el punto de reorden.
e. Calcule el costo total del tamaño óptimo de pedido y el punto de reorden.

16-7. El costo de procesamiento de pedidos de un artículo es de 50 dólares. La demanda anual es 10 000 unidades. El costo unitario del artículo es de cinco dólares; el costo de almacenamiento en inventario es del 20% anual por dólar.
a. Calcule la cantidad económica de pedido en unidades.
b. Suponga que el tiempo de entrega de reabastecimiento es dos semanas. La demanda semanal es, en promedio, 200 unidades (suponga 50 semanas al año) con desviación estándar de 41 unida-

des; suponga también que las demandas semanales tienen distribución normal y son independientes entre sí. La gerencia ha determinado que una unidad que no se suministre a partir de la existencias representa un costo adicional de tres dólares. Determine el punto óptimo de reorden (R).

c. Una analista que ya no trabaja para la compañía recomendó un punto de reorden de 603 unidades. ¿Cuál es el costo por unidad faltante (k_u) que supone dicho punto de reorden?

16-8. Un artículo se reabastece un promedio de 10 veces por año. El costo anual de almacenamiento es la mitad del costo unitario de escasez. La demanda semanal se distribuye normalmente con media de 100 y desviación estándar de 20.

a. Calcule la probabilidad deseada de no tener inexistencias durante el tiempo de entrega.

b. Suponga que el tiempo de reabastecimiento es *cuatro* semanas. Calcule el tamaño óptimo de pedido.

16-9. Remítase al problema 16-8. Suponga que se cometió un error al estimar uno de los valores que se usaron para calcular el punto de pedido. Específicamente, suponga que se cometió un error del 50% en la estimación del costo de escasez, por lo que la razón k_c/k_u es errónea.

a. Suponga que la razón errónea es $k_c/k_u = 1.0$ en lugar del valor verdadero de un medio. Calcule la probabilidad de que no se produzcan inexistencias durante el tiempo de entrega y el punto de pedido asociado.

b. Suponga que la razón errónea es $k_c/k_u = VA$. Una vez más, calcule la probabilidad de no tener inexistencias y el punto de pedido.

c. Comente acerca de la sensibilidad relativa de la cantidad de pedido con respecto al punto de pedido.

16-10. La demanda promedio anual de un artículo es 2400 unidades.

El tiempo de entrega es un mes; la desviación estándar de la demanda mensual es 50 unidades. La cantidad de pedido es 300 unidades y la gerencia quiere que el 99% de la demanda se cubra con las existencias.

a. ¿Cuál es el punto de pedido óptimo?

b. Suponga que la gerencia quiere un nivel de servicio del 98%. ¿Cuál es el punto de pedido óptimo?

c. Si la gerencia estuviera satisfecha con un nivel del servicio del 90%, ¿cuál sería el punto óptimo de pedido?

Problemas más difíciles

16-11. Una empresa tiene la opción de fabricar una pieza o comprarla a un proveedor externo. El costo variable por unidad es el mismo en ambos casos. Sin embargo, si la pieza se fabrica internamente hay un costo de preparación de 100 dólares y si se compra fuera hay un costo fijo de pedido de 20 dólares. Si la compañía fabrica la pieza, el tiempo de entrega es cero; si se obtiene del proveedor externo, el tiempo de entrega es de 25 días (la utilización durante el tiempo de entrega se distribuye normalmente con media de 100 unidades y desviación estándar de 20 unidades). El costo anual de mantenimiento de una unidad en inventario es de dos dólares por año. El costo de escasez de una unidad es de 18 dólares (esto es k_u). Las necesidades anuales de esta pieza es 1000 unidades.

¿Debe fabricarse esta pieza o comprarse por fuera? ¿Qué otros aspectos, además de los costos de inventario, involucraría una decisión de este tipo?

16-12. La compañía ABC tiene una máquina que requiere la reposición de una pieza a intervalos aleatorios, cada vez que se rompe la pieza. El tiempo de entrega de las piezas de recambio es un mes. El número de desper-

fectos promedio es uno por mes y la gerencia acepta la premisa de que la avería de la pieza es consistente con las características de una distribución de Poisson.[12]

a. La política actual es pedir cinco unidades de una pieza cada vez que se efectúa un pedido de reabastecimiento. Si la gerencia requiere una probabilidad no menor que 0.99 de que haya existencias de la parte durante el tiempo de entrega, ¿cuál deberá ser el punto de pedido?

b. Si los costos de formulación de pedido son de 10 dólares y el costo de almacenamiento por unidad es de 2.40 dólares al año, ¿cuál debe ser la cantidad óptima de pedido?

c. Si cambia la cantidad de pedido, ¿es necesario revisar el objetivo de la gerencia de la probabilidad mínima de 0.99 de servicio durante el tiempo de entrega? ¿Cómo debe establecerse este objetivo? ¿Qué información requiere para tomar la decisión?

16-13. Una vacuna fabricada por una compañía farmacéutica tiene una demanda constante y conocida de 1200 unidades al año (o 100 al mes). El costo de producción es de 120 dólares por unidad, el costo de preparación es de 400 dólares por lote y el costo de almacenamiento de inventario es el 20% anual. El tiempo de entrega de la producción es constante y conocido (un mes).

a. ¿Cuál es la cantidad económica de producción por lote?

b. La compañía acaba de descubrir que la vacuna sólo puede almacenarse 1.5 meses sin perder calidad. Determine la estrategia de producción de menor costo para esta situación (es decir, la que minimice los costos totales de preparación, almacenamiento y desperdicio).

c. Suponga ahora que la demanda media de la compañía es 100 unidades por mes, pero ya no es constante. La demanda se distribuye normalmente con desviación estándar de 20. El costo unitario de escasez es de 640 dólares (beneficios perdidos más reacción negativa). Si se ignora el problema de vida útil de (*b*), ¿cuál es la política óptima para el inventario?

16-14. Considere el ejemplo 2 del capítulo. Suponga que hay un descuento por volumen de 0.20 dólares por artículo si se compran mil artículos o más. ¿Debe aprovecharse el descuento?

16-15. Aggregated Air Lines (AAL) mantiene piezas de recambio para reparar los motores de sus aviones, los cuales fallan en forma aleatoria. Considere, como ejemplo, la pieza #7654, que se encuentra en cada uno de los motores de un Boeing 747. Cuando los motores llegan a la base de mantenimiento para desmontaje, diagnóstico y reparación, se examina con cuidado esta pieza y se determina si es necesaria la reparación. Las averías de esta pieza ocurren en un mes de acuerdo con una distribución normal con media de 5 y desviación estándar de 1.5.

El tiempo de preparación para la reparación es muy pequeño en comparación con el valor de la pieza, por lo que cada vez que requiere reparación se envía al taller (es decir, no se forman lotes). Suponga que el taller necesita tres meses para reparar la pieza y que la línea aérea tiene un inventario objetivo de 30 piezas de recambio; por lo tanto, las 30 piezas deben ser suficientes para cubrir la demanda aleatoria durante un ciclo de reabastecimiento de tres meses o de lo contrario se presentarán inexistencias.

AAL ha determinado que el costo de escasez es de 50 dólares (el costo de acelerar la entrega de una pieza de recambio de Boeing). Se le pide a usted que revise el número objetivo de 30 piezas de recambio. ¿Cómo determinaría la cantidad objetivo óptima si las piezas cuestan 125 dólares cada

---

[12] Si es una distribución de Poisson, entonces la probabilidad de k ocurrencias en un intervalo de tiempo es:

$$P(k) = \frac{e^{-\lambda}\lambda^{k}}{k!}$$

donde λ es la media o número esperado de ocurrencias por unidad de tiempo y la varianza del número de ocurrencias por unidad de tiempo. Véase el apéndice 1 del capítulo 18.

una y el costo anual de almacenamiento de inventario es del 25%?

16-16. Remítase al problema 16-5. Aplique la regla heurística de R. G. Brown (véase pie de página 3 del capítulo) y encuentre la cantidad y el punto de pedido óptimos.

Remítase al problema 16-7. Suponga que por una cuota anual de 100 dólares es posible reducir el tiempo de reabastecimiento de dos semanas a una, para implantar el concepto justo a tiempo.

a. Suponiendo que se paga la cuota, calcule la nueva cantidad económica de pedido *(Q)*.

b. Suponiendo que se paga la cuota, calcule el nuevo punto óptimo de reorden *(R)*.

c. Calcule la reducción en existencias de seguridad, tanto en unidades como en dólares. ¿Debe pagarse la cuota? Expli que la respuesta.

16-18. Friendly Computer Store pide actualmente a su proveedor paquetes de discos flexibles. Los pedidos se reciben un mes después de formularlos. El costo unitario de un paquete de discos es tres dólares; los costos anuales de almacenamiento son el 25%; el costo unitario de escasez de un paquete se determinó en siete dólares. La demanda mensual de paquetes de discos es una variable aleatoria distribuida normalmente con media de 1000 paquetes y desviación estándar de 200 paquetes.

a. Un empleado nuevo pregunta cuál es el costo de procesamiento de pedidos de discos y se le informa que es de cinco dólares. A continuación propone que la compañía adopte una política de revisión continua, como la que se describió en este capítulo. ¿Cuáles serían los valores óptimos de Q y R para esta política?

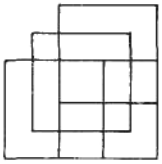
b. Otro empleado descubre que el costo de procesamiento de pedidos se puede reducir de cinco dólares a uno si la tienda está dispuesta a invertir 100 dólares en un paquete de software para análisis de pedidos. Determine si debe efectuarse esta inversión.

16-19. Un artículo tiene costo unitario de 20 dólares si se compra en condiciones normales de reabastecimiento, las cuales implican un tiempo de entrega de dos semanas. Si se produce amenaza de inexistencias, se puede obtener un reabastecimiento de emergencia pagando 22 dólares por unidad (es decir, una prima de dos dólares por encima del costo normal). La compañía ha decidido pagar la prima y pedir las unidades conforme las requiera (una por una) cuando el inventario baje a cero. No hay costo de procesamiento de pedidos con los reabastecimientos de emergencia; el costo de procesamiento de pedidos para el reabastecimiento normal es de 20 dólares por pedido. Los costos de almacenamiento son del 25% anual. La demanda anual media es de 10 400 unidades; la demanda semanal se distribuye normalmente con media de 200 unidades y desviación estándar de 30 unidades.

a. Calcule la cantidad de reabastecimiento y el punto de reorden para los reabastecimientos normales.

b. Suponga que ya no está disponible la opción del reabastecimiento de emergencia inmediato y también que la compañía debe satisfacer el 98% de la demanda a partir de sus existencias, sin pedidos atrasados. ¿Cuál debe ser ahora el punto de reorden?

CAPÍTULO 17



Control de inventarios con incertidumbre y sin reorden

Este capítulo presenta métodos para resolver un problema de inventario "único" en el que no hay oportunidad de reorden y el artículo no se puede almacenar en forma económica para pedidos posteriores. Esta situación se presenta en empresas que producen bienes de moda o de temporada, bienes perecederos (flores, alimentos), bienes que se vuelven obsoletos (revistas) y servicios perecederos (por ejemplo, asientos en una línea aérea para una fecha determinada). En el capítulo 4 se propuso un método para resolver este tipo de problema de inventarios, con base en las tablas de valor esperado y condicional. En muchos casos, dicho método de análisis requiere gran cantidad de esfuerzo. Otro procedimiento es utilizar el análisis marginal y encontrar la última unidad que vale la pena pedir.

Hay que señalar que este capítulo tiene que ver con problemas de control de inventario en los cuáles *no* están presentes los problemas de tamaño de pedido, en conjunto con la frecuencia y el tiempo del pedido. Aquí, lo único que nos preocupa es saber cuánto hay que pedir si nos enfrentamos a una demanda con probabilidades conocidas y *no es posible el reorden* (los capítulos 15 y 16 consideraron la situación en la cual se permite reordenar).

Se supondrá que la demanda es incierta pero que se conoce la distribución de probabilidad de la demanda. Esto es análogo a saber que una moneda legítima tiene una cara y una cruz pero desconocer cuál caerá en el siguiente lanzamiento.

Ejemplo 1

Supongamos que se sabe que la demanda de un producto tiene la distribución que se muestra en la tabla 17-1. Suponga que las unidades cuestan 25 dólares cada una y que los sobrantes se pueden vender como desechos a cinco dólares. El precio de venta es de 55 dólares por unidad. Se conoce la distribución de probabilidad de la demanda del producto, pero no se sabe cuál será la demanda para el periodo. En este caso, ¿cuántas unidades hay que pedir?

Tabla 17-1 Distribución de la demanda

Demanda	*Probabilidad*
0	0.10
1	0.30
2	0.40
3	0.20
	1.00

Tabla 17-2 Cálculo del beneficio esperado

		Pedir una unidad		*Pedir dos unidades*		*Pedir tres unidades*	
Suceso: Demanda	*Probabilidad de la demanda*	*Beneficio condicional*	*Beneficio esperado*	*Beneficio condicional*	*Beneficio esperado*	*Beneficio condicional*	*Beneficio esperado*
0	0.10	$(20)	$(2)	$(40)	$(4)	$(60)	$(6)
1	0.30	30	9	10	3	(10)	(3)
2	0.40	30	12	60	24	40	16
3	0.20	30	6	60	12	90	18
	1.00	Beneficio esperado: $25			$35		$25

* Las cantidades que aparecen entre paréntesis son negativas.

Una posibilidad sería calcular los beneficios que se obtendrían con diferentes planes de pedido; éste es el procedimiento que se sigue en el capítulo 4. La tabla 17-2 presenta los cálculos correspondientes. Recuerde que si no se compran unidades, no se puede vender ninguna; si se compra una unidad, no puede venderse más que una, incluso si la cantidad de la demanda es mayor.

Con base en el beneficio esperado, la acción óptima es pedir dos unidades, ya que el beneficio esperado de 35 dólares es mayor que el beneficio esperado de cualquier otra estrategia.

Método marginal

En el análisis anterior se calcularon los beneficios esperados con distintas políticas de pedido. Una solución más sencilla para los cálculos es utilizar un método marginal, calculando el efecto sobre el beneficio de añadir una unidad más al tamaño de pedido.

Sea p la probabilidad de vender una unidad adicional (o más); entonces, $(1 - p)$ es la probabilidad de no vender la unidad adicional (o más). En la tabla 17-3 se muestran los valores de p del ejemplo.

La columna titulada "Probabilidades acumuladas" es p, ya que indica la probabilidad de vender cero unidades o más (1.00), una unidad o más (0.90) dos

Tabla 17-3

Demanda	*Probabilidad de la demanda*	*Probabilidades acumuladas (p)*
0	0.10	1.00
1	0.30	0.90
2	0.40	0.60
3	0.20	0.20
	1.00	

Tabla 17-4 Costos condicionales y esperados

Suceso: Demanda de la siguiente unidad (o más)	*Probabilidad del suceso*	*Acción*	
		No pedir	*Pedir*
No	$1 - p$	0	c_o
Sí	p	c_u	0
Costos esperados de las acciones		pc_u	$(1 - p)c_o$

o más (0.60) o tres unidades o más (0.20). Es la *cola derecha* de la distribución de probabilidad.

Sea c_o el **costo de los excedentes;** es decir, el costo de que sobre una unidad. Por ejemplo, si una unidad cuesta 25 dólares y las unidades sobrantes se pueden vender a cinco dólares, el costo del excedente es de 20 dólares por unidad.

Sea c_u el **costo de las carencias;** es decir, el costo de no tener unidades que vender si un cliente desea una unidad. En el ejemplo, una unidad cuesta 25 dólares y se vende a 55 dólares. Por lo tanto, la empresa pierde 30 dólares de beneficio por cada unidad que falte; en otras palabras, c_u es 30 dólares. Se supone que no hay ningún costo después del periodo actual por causa del faltante.

La relación entre los costos de excedentes y faltantes y la probabilidad de la demanda de la siguiente unidad se muestra en la tabla 17-4.

La tabla 17-4 indica que si se pide una unidad y no hay demanda, el costo condicional es c_0. Así mismo, si no se pide la unidad y hay demanda de ella, el costo condicional es c_u. Observe que el costo de faltantes c_u, es una **pérdida de oportunidad** (véase Cap. 4).

El costo esperado de la acción "no pedir" es pc_u; para la acción "pedir" es $(1 - p)c_0$. La unidad adicional se debe pedir si el costo esperado de hacerlo es menor que el costo esperado de no pedirla. Es decir, se debe pedir si:

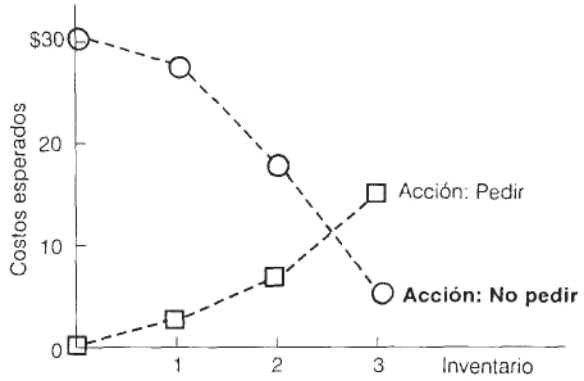
$$(1 - p)c_o < pc_u$$

Por ejemplo, considere pedir inicialmente cero unidades y que la acción "pedir" represente el pedido de una unidad. Entonces:

Tabla 17-5

(1) Política: Pedir desde el pedido	*p*	*(2) Costo esperado de pedir la siguiente unidad: $(1 - p)c_o$*	*(3) Costo esperado de no pedir la siguiente unidad: pc_u*	*(4) Costo incremental neto del pedido: (2) - (3)*
0 a 1	0.90	$0.10 \cdot 20 = 2$	$0.90 \cdot 30 = 27$	-25
1 a 2	0.60	$0.40 \cdot 20 = 8$	$0.60 \cdot 30 = 18$	-10
2 a 3	0.20	$0.80 \cdot 20 = 16$	$0.20 \cdot 30 = 6$	10

Figura 17-1 Costos esperados de las acciones



$$\text{Costo esperado (no pedir)} = pc_u = (0.9)(\$30) = \$27$$

y:

$$\text{Costo esperado (pedir)} = (1 - p)c_0 = (0.1)(\$20) = \$2$$

El costo esperado de pedir es menor que el costo esperado de no pedir, por lo que debe pedirse la unidad. Se efectúa la misma comparación para ver si debe pedirse la segunda unidad, etcétera. La tabla 17-5 y la figura 17-1 ilustran estos cálculos.

Un costo negativo en la columna 4 de la tabla 17-5 es un beneficio neto esperado. El pedido de la primera unidad aumenta el beneficio en 25 dólares; el pedido de la segunda unidad aumenta el beneficio en 10 dólares (a 35 dólares); y el pedido de la tercera unidad reduce el beneficio en 10 dólares (a 25 dólares). No sería deseable tener tres unidades en existencias, ya que hay un costo marginal esperado de 10 dólares asociado al almacenamiento de la tercera unidad.

Al usar esta regla, el decisor agregará unidades hasta que el costo de "pedir" sea igual o mayor que el costo de "no pedir". Recuerde que al añadir unidades se

reducirá la probabilidad de la demanda de la siguiente unidad (o más), *p, y* aumentará (1 - *p)*. Finalmente, el costo esperado de pedir será mayor que el de no pedir (véase Fig. 17-1).

En lugar de completar una tabla como la 17-5 para encontrar la solución óptima, hay un atajo que se puede aprovechar. Suponga que p_c es la probabilidad para la cual el costo de pedir es *igual* al costo de no pedir. A p_c la llamaremos la **probabilidad crítica** y se puede encontrar al resolver la siguiente ecuación:

$$(1 - p_c)\, c_o = p_c\, c_u$$

o sea:

$$p_c = \frac{c_o}{c_o + c_u} \qquad \textbf{(17–1)}$$

La razón$c_o/(c_o + c_u)$se denomina **razón crítica.**

Si los sucesos no son continuos (por ejemplo, la demanda puede ser 1000 o 2000 unidades, pero no un valor intermedio), no siempre es posible encontrar la venta marginal de probabilidad exacta de p_c. Las reglas siguientes son útiles para encontrar el óptimo en un caso discreto:

1. Mientras la probabilidad de vender una unidad adicional o más sea mayor que p_c, la razón crítica, se debe pedir la unidad.
2. Si la probabilidad de vender la unidad adicional es igual a p_c, es indistinto incluirla en el pedido o dejarla fuera.
3. Si la probabilidad es menor que p_c, no se debe pedir la unidad.

En el ejemplo, c_0 es igual a 20 dólares y c_u es igual a 30 dólares; por lo tanto:

$$p_c = \frac{c_o}{c_o + c_u} = \frac{20}{20 + 30} = \frac{20}{50} = 0.40$$

Remítase a la tabla 17-3, y observe que el decisor pediría dos unidades (porque $p = 0.60$ para la segunda unidad y esto es mayor que $p_c = 0.40$), pero no pediría la tercera unidad (ya que $p = 0.20$ y esto es menor que 0.40).

Observe que el modelo de inventario que se desarrolló supone la linealidad en los costos de excedentes y faltantes. Es decir, se ha supuesto que los costos unitarios son iguales para todas las unidades. En algunos casos estas hipótesis no son realistas y se pueden usar funciones más apropiadas, pero más complejas, para los costos marginales.

Costo de la reacción negativa

Hasta ahora se ha supuesto que el único costo de una carencia (es decir, una inexistencia) era el beneficio que se perdía en el periodo. No obstante, es posible modificar el modelo para incluir la reacción negativa del cliente que podría resultar de no encontrar los bienes. La estimación del costo de reacción negativa

puede ser un proceso muy difícil. Un método consiste en suponer que pudiera comprar una varita mágica y usarla para evitar una unidad de inexistencias, ¿cuánto estaría dispuesto a pagar por ella? En cualquier caso, es necesario estimar este factor en función del valor actual de los beneficios futuros que se perderían por el faltante de una unidad. Esta cantidad se puede incluir para determinar la razón crítica y así establecer la política de pedidos óptima.

Continuando con el ejemplo 1 de este capítulo, supongamos que la reacción negativa costaría 7.50 dólares por cada unidad de la demanda que no se satisfaga debido a una escasez de inventario. Considere las siguientes definiciones y datos:

c_o = Costo unitario de los excedentes = 20 dólares. Los 20 dólares son la diferencia entre el costo por unidad (25 dólares) y el precio de desecho (cinco dólares).

c_u = Costo unitario de las carencias = 37.50 dólares. Esta cifra equivale a la suma de los beneficios que se pierden por una demanda no satisfecha ($55 - $25 = $30) y el costo de la reacción negativa (7.50 dólares) por cada unidad carente; es decir, cuando hay demanda y no hay unidades que vender.

La definición del costo de faltantes se ha modificado para incluir los efectos de la reacción negativa; sin embargo, aún se aplica la ecuación de la razón crítica (Ecuación 17-1):

$$p_c = \frac{c_o}{c_o + c_u}$$

En el ejemplo modificado:

$$p_c = \frac{c_o}{c_o + c_u} = \frac{20}{20 + 37.50} = 0.35$$

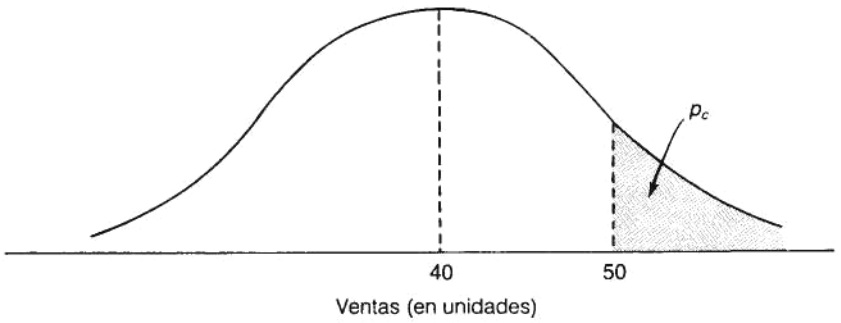
El precio adicional que hay que pagar por no cumplir con un pedido tiene el mismo efecto que un aumento en el margen de beneficios (es decir, un aumento en las consecuencias de no tener una unidad disponible cuando hay demanda por ella) y tenderá a aumentar el tamaño del pedido al reducir p_c.

Uso de una distribución continua de probabilidad

En lugar de suponer que las ventas sólo pueden tomar unos cuantos valores discretos, se puede usar una distribución continua de probabilidad. Esta distribución permitirá considerar todos los valores factibles de la variable aleatoria, la demanda. Suponga, como ilustración, que la variable aleatoria, la demanda de mañana, se distribuye normalmente.

Como se hizo en la sección anterior para el caso discreto, comenzamos por calcular p_c, donde p_c es la razón crítica. Esta razón crítica es la probabilidad para la cual el costo de pedir es igual al costo de no pedir. En función de la distribución normal, p_c se puede representar como el área sombreada de la figura 17-2. Debe observarse *que* p_c es la *cola derecha* de la distribución.

Figura 17-2



La figura 17-2 muestra un pedido óptimo de 50 unidades. Si se pide menos de esa cantidad, *p,* la probabilidad de vender una unidad adicional o más, será mayor que p_c; en el caso continuo tienen validez los mismos argumentos que se presentaron para el caso discreto.

El primer paso en el cálculo del tamaño óptimo de pedido es encontrar *Z,* el número de desviaciones estándar con respecto a la media, que haga igual la cola derecha de la función de densidad normal y p_c. Después hay que convertir Z a unidades multiplicando Z por la desviación estándar de la distribución de ventas. Este número de unidades se suma entonces a la media de las ventas si $p_c < 0.50$ (como en la Fig. 17-2) o se resta si $p_c > 0.50$. Si $p_c = 0.50$, Z = 0. Éste es el mismo proceso de estandarización de una distribución normal de probabilidad que se presentó en el capítulo 7.

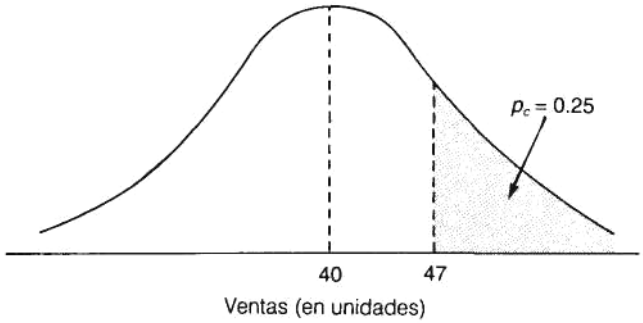
Ejemplo 2 Suponga que la distribución de la demanda es normal, c_0 es igual a 64 dólares y que c_u es 336 dólares. La razón crítica es:

$$p_c = \frac{c_o}{c_o + c_u} = \frac{64}{64 + 336} = 0.16$$

La probabilidad de 0.16 corresponde a la cola derecha de la distribución normal. En la tabla A del apéndice que se encuentra al final del libro, se indican las colas izquierdas. El complemento de cola izquierda de un cola derecha de 0.16 es 0.84, lo cual es aproximadamente igual a una desviación estándar con respecto a la media (el valor en la tabla para una desviación estándar es 0.8413). Si nos desplazamos una desviación estándar a la derecha de la media, la probabilidad de vender una o más unidades adicionales será igual a 0.16.

Suponga que la media de las ventas para el próximo periodo es 40 unidades y que la desviación estándar de la distribución anterior es 10. Queremos aumentar el tamaño de pedido hasta que la probabilidad de efectuar una venta adicional sea igual a 0.16. Hay que moverse una desviación estándar a la derecha de la media ($Z = 1$). Para convertir *Z* a unidades, se multiplica por la desviación estándar:

Figura 17-3



$$Z\sigma = 1 \cdot 10 = 10 \text{ unidades}$$

Como $p_c < 0.50$, para obtener Q, el tamaño óptimo de pedido, hay que *sumar* 10 unidades a la media de las ventas. Se puede escribir la siguiente ecuación:

$$Q = \text{Media de las ventas} \pm Z\sigma = 40 + 10 = 50$$

El signo será positivo si $p_c < 0.50$ y negativo si $p_c > 0.50$.

Ejemplo 3 Suponga que la demanda tiene la misma distribución normal que en el ejemplo 2 y también que se ha calculado $p_c = 0.25$. La figura 17-3 ilustra esta situación.

El complemento de cola izquierda de una cola derecha de 0.25 es 0.75; la tabla A indica que el valor de Z que corresponde a $F(Z) = 0.75$ es aproximadamente Z = 0.67. Entonces, el tamaño óptimo de pedido es:

$$Q = \text{Media de las ventas} + Z\sigma = 40 + 0.67(10) = 46.7 = 47$$

Ejemplo 4 Considere el mismo problema del ejemplo 3, pero suponga ahora que el pronóstico de las ventas es más incierto; la desviación estándar de la distribución a priori es 25, en lugar de 10.

En el ejemplo 3, la razón crítica p_c era 0.25 y el valor de Z correspondiente era aproximadamente Z = 0.67. Con el aumento en la desviación estándar, el tamaño óptimo de pedido es:

$$Q = \text{Media de las ventas} + Z\sigma = 40 + 0.67(25) = 56.75 = 57$$

Es interesante comparar este resultado con el del ejemplo 3, donde la desviación estándar de las ventas era 10. Observe que al aumentar la incertidumbre del pronóstico (cuando aumenta la desviación estándar) lo óptimo es alejarse del pronóstico de 40 unidades de media de las ventas. A primera vista quizás no parezca

obvio, pero es una consecuencia directa de que la razón crítica considere correctamente los costos de excedentes y carencias. Si queremos tener una probabilidad de carencias de 0.25, la mayor desviación estándar requiere que se almacene un inventario más grande.

Costos relevantes

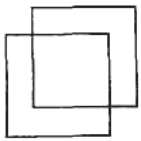
Es importante obtener estimaciones correctas de los costos relevantes de excedentes y carencias al utilizar este procedimiento de solución. Estos costos deben ser *increméntales o costos marginales;* no deben contener asignaciones de costos adicionales y otros costos fijos que no se vean afectados por la decisión. Por ejemplo, suponga que en el ejemplo 1 el costo unitario del artículo fuera el siguiente:

Materias primas	$20	(costos variables)
Fuerza de trabajo directa	5	
Gastos adicionales asignados	25	(asignación de costo fijo)
Total	$50	

Desde el punto de vista de un contable, el costo total asignado al artículo es de 50 dólares, pero a efectos de la toma de decisiones el costo unitario *incremental* es sólo de 25 dólares (la suma de la materia prima y la fuerza de trabajo directa, ambos costos variables, en la mayoría de los casos). Suponemos que los gastos fijos adicionales no cambiarán si se produce o no una unidad marginal. Así mismo, el costo unitario de las carencias no contendrá asignaciones de costos fijos.

Observe que el costo de una carencia es un costo de oportunidad, por lo que no aparece en los estados de pérdidas y ganancias de la empresa. Por lo tanto, una gerencia "conservadora" que se centra únicamente en los beneficios y perdidas que aparecen en los informes puede perder oportunidades considerables de mejorar el beneficio si ignora el costo de las carencias.

RESUMEN



Los problemas de inventario único se pueden analizar determinando el costo de las carencias, el costo de los excedentes y la razón crítica p_c. El tamaño del pedido aumenta hasta que la probabilidad de vender la siguiente unidad o más sea menor que/;$_c$. Si la reacción negativa es un factor a considerar, entonces deberá estimarse e incluirse en el costo unitario de las carencias.



Bibliografía

Véase la bibliografía que aparece al final del capítulo 15.

Problemas con respuestas

17-1. Se ha estimado que la distribución de probabilidad para un producto es:

Demanda	*Probabilidad de la demanda*
0	0.05
1	0.15
2	0.30
3	0.35
4	0.10
5	0.05
6	0.00
	1.00

Cada unidad se vende a 50 dólares y el producto no vale nada si no se vende. El costo de compra de una unidad es de 10 dólares.

a. Suponiendo que no es posible reordenar, ¿cuántas unidades deben comprarse?

b. Si se estima que la reacción negativa de un cliente es de 20 dólares por cada unidad de demanda que no se cumpla, ¿cuántas unidades hay que pedir?

17-2. Suponga que la estimación de la demanda para el próximo periodo es según una distribución normal con inedia de 50 unidades y desviación estándar de 10 unidades. No es posible reordenar. Calcule los tamaños óptimos de pedido con los valores de /?, que se indican a continuación:

a. 0.60 *e.* 0.22
b. 0.50 *f.* 0.10
c. 0.45 *g.* 0.02
d. 0.40

17-3. Calcule el tamaño óptimo de pedido con base en la siguiente información (no hay reórdenes):

Precio de venta	$ 100
Costo incremental por unidad vendida (incluyendo precio de compra)	70
Costo de compra por unidad	50
Valor de desecho (si no se vende)	10
Pérdida por reacción negativa por cada unidad de demanda no satisfecha	50

La distribución de probabilidad de la demanda es normal, con media de 140 y desviación estándar de 20.

17-4. Remítase al problema 17-3. Calcule de nuevo el tamaño óptimo de pedido suponiendo que la desviación estándar de la distribución de probabilidad es 50.

17-5. Remítase al problema 17-3. Calcule de nuevo el tamaño óptimo de pedido suponiendo que *no* hay pérdida por reacción negativa por los pedidos no satisfechos.

a. Suponga una desviación estándar de 20.

b. Suponga una desviación estándar de 50.

c. Compare las respuestas anteriores con las de los problemas 17-3 y 17-4.

Problemas

17-6. Un vendedor de papelería al por mayor decide cuántos calendarios de escritorio almacenar para el próximo año. Es imposible hacer pedidos adicionales y las unidades sobrantes no valen nada. La tabla siguiente indica los niveles posibles de la demanda y las probabilidades a priori del mayorista:

Demanda (en miles)	*Probabilidad de la demanda*
100	0.10
200	0.15
300	0.50
400	0.25
	1.00

Los calendarios se venden a 100 dólares el millar y el costo incremental de compra es de 70 dólares. El costo incremental de las ventas (comisiones) es de cinco dólares por millar.

a. Use el análisis estudio en este capítulo para determinar cuántos calendarios hay que pedir.
b. Revise este cálculo elaborando la tabla de valores condicionales y esperados y calculando los valores esperados para cada acción.
c. ¿Cuál tendría que ser el costo de reacción negativa para justificar un pedido de 400 000 calendarios?

17-7. La demanda de un producto es aproximadamente normal con media de 40 unidades y desviación estándar de 12 unidades. El producto cuesta dos dólares por unidad y se vende a cinco dólares. Las unidades que no se vendan no valen nada.

a. Si supone que no hay pérdidas por reac ción negativa si no se cubre la deman da, ¿cuál es el tamaño óptimo de pedido?
b. Suponga que el gerente a cargo del pro ducto ha pedido habitualmente 60 uni dades y defiende su política sobre la base de que sí hay una pérdida por reac ción negativa del cliente si no se cubre la demanda. ¿Cuál es la pérdida implíci ta por reacción negativa de la política del gerente?

17-8. Indique dos situaciones de inventario que representaría correctamente el modelo de este capítulo. Describa para cada uno los factores que comprendería el costo de excedentes, el costo de faltantes y la pérdida por reacción negativa.

17-9. Un fabricante de cámaras fotográficas realiza la mayoría de sus ventas durante la temporada navideña. Por cada unidad que venda obtiene un beneficio de 20 dólares; si la cámara no se vende en la temporada, entonces hay que venderla a un costo rebajado, cinco dólares menos que el costo variable de manufactura. El fabricante estima que la demanda tiene una distribución normal con media de 10 000 unidades y desviación estándar de 1000 unidades.

a. Si se ignoran los costos de reacción negativa por inexistencias, ¿cuál es el tamaño óptimo de pedido?
b. ¿Qué costo de reacción negativa por inexistencias justificaría un tamaño de pedido de 11 500 unidades?

17-10. Tail Ski Company vende esquís a 50 dólares el par durante la temporada de esquí. Los esquís que no venda en la temporada pueden venderse a través de tiendas especiales a 1 0 dólares el par o bien almacenarse en inventario hasta la siguiente temporada, para venderlos a 15 dólares el par. Ambas opciones pueden absorber grandes cantidades de esquís sin afectar la demanda normal.

El costo de manufactura de un par de esquís es el siguiente:

Materiales directos	$10
Mano de obra directa	5
Gastos adicionales asignados	10
	$25

La compañía tiene un cargo del 20% anual por dólar para el almacenamiento en inventario. La demanda durante la temporada de ventas es normal, con media de 10 000 y desviación estándar de 2000 pares. La compañía debe determinar su producción antes de la temporada de ventas, debido a su capacidad productiva limitada.

¿Qué nivel de producción es el más deseable?

17-11. Green Garden Store debe pedir su lote de plantas antes del 23 de marzo (no puede efectuar pedidos después de esa fecha). Por la persistente sequía, Green Garden ha reducido su pronóstico de ventas y ahora espera vender unos 100 000 dólares de plantas (al por menor); la desviación estándar del error de este pronóstico es el 15% (es decir, 15 000 dólares). Suponga que los errores de pronóstico se distribuyen normalmente.

De cada dólar por ventas al por menor, la tienda paga 30 centavos por las plantas que compra al por mayor. Las plantas que sobren al final de la temporada no pueden ven-

derse; es más, Green Garden tiene que pagar para que se las lleven, a un costo de cinco centavos por cada dólar de precio de venta al por menor. Los demás costos operativos de la tienda no están afectados por el volumen de ventas real.

¿Cuántos dólares (al por menor) de plantas debe pedir la tienda?

17-12. Península Pumpkin Store (PPS) compra calabazas para revenderlas antes de la noche de brujas. PPS vende las calabazas a 50 centavos el kilogramo y su costo de compra al por mayor es de 30 centavos el kilogramo. Sus proveedores requieren pedidos en firme antes del primero de septiembre, por lo que PPS debe comprometerse antes de conocer la demanda. El pronóstico de la demanda de PPS al primero de septiembre es 10 000 kilogramos; su error de pronóstico se distribuye en forma normal con desviación estándar igual al 15% de su pronóstico. Sin embargo, los pronósticos no tienen sesgo. Las calabazas que sobren después de la noche de brujas se pueden vender a un promedio de 20 centavos el kilogramo, sin límites en lo referente a volumen. Se suponen que se pierden los pedidos que no se puedan cubrir.

a. ¿Qué cantidad de calabazas debe pedir PPS el primero de septiembre?

b. Suponga que PPS ha encontrado un proveedor de respaldo que puede surtir *de inmediato* pedidos de reabastecimiento posteriores, por lo que si PPS agota sus existencias de calabazas puede pedir las pequeñas cantidades adicionales que requiera al segundo proveedor (PPS continúa con el proveedor original para su pedido inicial). El nuevo proveedor cobra 42 centavos por kilogramos para este servicio expedito y garantiza la entrega.

¿Cuál es ahora el pedido inicial deseado para el primero de septiembre?

Problemas más difíciles

17-13. La compañía ACMÉ produce acondicionadores de aire. Por su capacidad productiva limitada y el deseo de mantener empleos estables durante el año, la producción de ciertos modelos se debe determinar antes de la fuerte temporada de ventas de la época de calor. La producción del modelo pequeño cuesta 60 dólares (costo incremental) y se vende a 100 dólares; para el modelo grande, el costo de producción es de 120 dólares y se vende a 210 dólares. Las unidades que no se vendan al final de la temporada deben venderse a precio de oferta, a un 80% del costo incremental de producción.

Se estima que la demanda durante la temporada para el modelo pequeño es normal, con media de 10 000 y desviación estándar de 3000; para el modelo grande, la demanda estimada ss normal con media de 6000 y desviación estándar de 2000. La compañía considera que, por la diferencia en precios de los modelos, las demandas son independientes.

a. Sin tomar en cuanta los costos por reacción negativa, calcule los volúmenes de producción óptimos para los dos modelos.

b. Suponga que las demandas no son independientes. Como caso extremo, suponga que el número de unidades vendidas del modelo grande es el 60% del número de unidades vendidas del modelo pequeño. Suponga además que la media de las ventas del modelo pequeño es 10 000, con desviación de 3000 (ignore la otra media y desviación estándar). Calcule ahora el tamaño de pedido óptimo. *Sugerencia:* Dada la suposición de una dependencia estricta, considere un *producto compuesto* que contiene una unidad del modelo pequeño y 0.6 unidades del modelo grande.

17-14. Cox Photo Company es una empresa de pedidos por correo que se especializa en servicio de 24 horas de revelado de negativos e impresiones. La política general es que los pedidos que llegan en el correo matutino deben terminarse y enviarse por correo antes de la media noche. Por lo general no se han presentado problemas para hacerlo. Hay seis técnicos de tiempo completo que trabajan ocho horas al día, desde las 8 *A.M.* a las 5 *P.M.* y reciben como pago ocho dólares por hora (incluyendo prestaciones). Estos técnicos pueden procesar un promedio de cinco pedidos por hora. Cuando ocasionalmente llegan más de 240 pedidos en un día, por lo menos uno de los técnicos trabaja horas extra a 12 dólares la hora.

Hace poco, Cox Photo compró a un competidor su empresa en la misma comunidad y piensa consolidar las operaciones. Sin embargo, el señor Cox aún no decide cuántos técnicos agregar a los seis que tiene. Al sumar los datos de pedidos anteriores de su competidor a los suyos, el señor Cox tiene que considerar los siguientes datos de frecuencia:

Números de pedidos	*Fracción de los días*
Menos de 220	0.03
220–39	0.03
240–59	0.09
260–79	0.16
280–99	0.18
300–19	0.20
320–39	0.15
340–59	0.10
360–79	0.05
Más de 380	0.01
	1.00

Uno de los técnicos de Cox Photo tomaba un curso nocturno de estadística en una universidad de la localidad e intentó analizar los datos anteriores. Le dijo al señor Cox que los datos se aproximaban a una distribución normal con media de 300 y desviación estándar de 40, pero no pudo responder a la pregunta de cuántas personas debían emplearse.

a. ¿Cuántos técnicos debe emplear Cox? ¿Cuál es el costo esperado?

b. ¿Qué factores adicionales se deben incluir al tomar la decisión?

17-15. ABC Office Supply Company tiene un almacén de piezas de recambio en Alaska para apoyar sus necesidades de mantenimiento de equipo para oficinas. Cada seis meses llega un envío considerable de piezas de reabastecimiento. Entre estas entregas programadas se requieren envíos aéreos de emergencia para reabastecer las piezas de recambio si el inventario no es suficiente para cubrir la demanda.

ABC debe determinar el nivel óptimo de su inventario de piezas de recambio. Como ejemplo, en los últimos intervalos de seis meses, la pieza #123456 ha presentado una demanda normalmente distribuida con media de 100 y desviación estándar de 10. El costo por unidad excedente (que representa el costo de almacenamiento de la pieza no requerida durante seis meses) es de cinco dólares; el costo incremental del costo de producción y envío del artículo es 40 dólares por unidad.

ABC tiene problemas para determinar el costo por unidad faltante, por dos razones. Primero, el precio que asigna a las piezas de recambio es su costo, sin aumentarle nada. Segundo, siempre satisfará la demanda, utilizando los envíos aéreos de emergencia para reabastecerse si la demanda excede el inventario. Los envíos aéreos de emergencia tienen un costo unitario 25 dólares mayor que los envíos normales.

¿Cuál debe ser el inventario óptimo para esta pieza?

17-16. Usted está a cargo del banquete anual del club Football Boosters de su universidad. Aunque se esperan muchos comensales, no sabrá cuántas cenas tendrá que servir hasta la noche del banquete. Su convenio con el hotel donde tendrá lugar el banquete establece que usted debe determinar el número de comensales una semana antes del banquete. El precio de la cena es de siete dóla-

res por persona. Si se presentan menos personas que el número que estableció, tendrá que pagar por la cantidad establecida. Si asisten más personas, se les servirá a un costo de 12 dólares por persona. Por ejemplo si determina que asistirán 200 personas y se presentan 200 o menos, tendrá que pagar los 1400 dólares. Si acuden más de 200, pagará los 1400 dólares más 12 dólares por cada cena adicional.

Su opinión acerca del número de personas que asistirán al banquete se puede describir con una distribución normal de probabilidad con media de 400 y desviación estándar de 100.

a. Suponga que la Asociación de Alumnos cubrirá totalmente el costo del banquete, por lo que su objetivo es minimizar el costo supuesto que se atiende a cada persona que asista. ¿Cuál debe ser el compromiso de asistencia que debe indicar al hotel?

b. Suponga que se cobran 10 dólares a cada persona que atienda y su objetivo es maximizar el beneficio del banquete. En este caso, ¿cuál debe ser la cantidad de asistentes que indique al hotel?

17-17. Dresden Glass Company (DGC) produce esculturas de vidrio decorativo de alta calidad y distribuye sus productos a través de tiendas de departamentos y especializadas que sirven al segmento de ingresos elevados del mercado. Casi todos los pedidos y envíos se efectúan en octubre, como preparación para el mercado navideño de ventas al por menor. Los artículos que sobren en enero regresan a DGC para un reembolso total, pero el minorista paga el costo de envío de la devolución.

Los aspectos económicos del artículo #123C se muestran en la siguiente tabla.

Costo normal de manufactura (por pieza):	
Materia prima	$ 5.00
Mano de obra directa	30.00
Gastos adicionales variables	5.00
Gastos adicionales asignados	15.00
Costo normal	55.00
Precio de venta al por mayor de DGC al minorista	85.00
Precio de venta al por menor	170.00
Costo de envío para las devoluciones del minorista a DGC (5 % de $85)	4.25

Si un minorista agota sus existencias del artículo, los pedidos que no se cubren se "pierden" (es decir, el cliente no espera ni compra otro artículo). Están dispuestos a no considerar la reacción negativa pero no están dispuestos a ignorar el beneficio perdido.

¿Qué nivel de inventario debe tener un minorista para el artículo #123C de DGC si se estima que la demanda media de la temporada es 100 unidades y la desviación estándar es 20 unidades? Suponga una variable aleatoria normalmente distribuida.

17-18. Wyler Wine Company produce champaña fermentada en botella. El proceso de fermentación dura un año. El costo variable de la producción inicial de una caja de botellas de champaña *(sin* incluir el costo de almacenamiento del periodo de fermentación de un año) es de 10 dólares. El precio neto de venta al por mayor es de 18 dólares por caja. Las cajas que no se venden en el año "objetivo" (año 1) se conservan para el año siguiente, sin perder calidad; sin embargo, el dinero sigue comprometido en el inventario. La compañía estima que los costos de almacenamiento de inventario son un 20% anual por dólar. Como las uvas sólo maduran una vez por año en las instalaciones de la compañía en la parte norte de Nueva York, debe establecer un compromiso de producción para toda la champaña que piensan producir en un año.

Se aproxima el momento de tomar la decisión para la producción de este año (las ventas del siguiente). El pronóstico de mercadotecnia para las ventas del año entrante es 100 000 cajas ($\sigma = 8000$); el almacenamiento de inventario anticipado es de 15 000 cajas. No hay costos de reacción negativa para las situaciones de inexistencias, pero en dichos casos se pierde el beneficio.

¿Cuántas cajas debe producir la compañía?

17-19. Alpine Valley Ski Área (AVSA) debe decidir todos los días, a las 5 *P.M.*, si debe llamar a los equipos para fabricar nieve. La fabricación de la nieve comienza a las 11 *P.M.* y continúa hasta las 3 *A.M.* Sin embargo, para fabricar la nieve, la temperatura no debe ser superior a -9 grados centígrados. Si a las 11 *P.M.* la temperatura es superior a -9 grados, AVSA debe pagar a los equipos pero no fabricará nieve; el costo del equipo es de 1000 dólares por noche. Si a las 5 *P.M.* AVSA decide que no fabricará nieve, pero la temperatura a las 11 *P.M.* es inferior a -9 grados, AVSA reconoce que ha perdido la oportunidad de fabricar nieve esa noche, lo cual tiene un costo bruto estimado de 4000 dólares y valor neto (después de pagar a los equipos) de 3000 dólares.

AVSA utiliza la siguiente regla de pronósticos. La temperatura pronosticada para las 11 *P.M.* es igual a la de las 5 *P.M.* menos cinco grados. Una comparación histórica de las temperaturas reales y pronosticadas para las 11 *P.M.* indica que estas temperaturas no tienen sesgo y que los errores de pronóstico se distribuyen normalmente con desviación estándar de 4 grados.

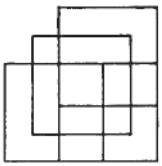
¿Qué temperatura debe utilizar AVSA a las 5 *P.M.* como marca para tomar su decisión?

Recomendación: Encuentre la probabilidad deseada (es decir, la apuesta óptima) de que no se llame a los equipos cuando podrían fabricar nieve.

17-20. Una línea aérea ha encontrado que el número de personas que no se presentan para un vuelo tiene una distribución normal con media de 20 y desviación estándar de 10. La línea aérea estima que el costo de oportunidad de un asiento vacío es de 100 dólares; se estima que la reacción negativa y los costos adicionales asociados al hecho de que un pasajero con reserva confirmada no pueda subir al avión ascienden a 400 dólares.

La línea aérea quiere establecer un límite de "sobrecupo" para el vuelo. Hay 150 asientos. ¿Cuál debe ser el límite superior para las reservas confirmadas? ¿Por qué?

CAPÍTULO 18



Colas de espera
Teoría de colas

Las colas o filas de espera son muy comunes en la vida cotidiana. Son pocos los individuos de una sociedad moderna que no hayan tenido que esperar en una fila para subir al autobús o al taxi, para entrar al cine, para pagar en el supermercado, para cortarse el cabello o para inscribirse al iniciar el año escolar. La mayoría de nosotros consideramos las colas como una parte inevitable de la vida civilizada y las aceptamos, con mejor o peor cara. En ocasiones, la longitud de la cola que encontramos nos desalienta y abandonamos el proyecto, con lo cual se pierde una venta. Este capítulo se relaciona con el proceso de toma de decisiones de una empresa (o una institución de gobierno) que está a cargo de la operación y que toma decisiones con respecto al número y a la capacidad de las instalaciones de servicio.

La teoría de colas o filas de espera tiene que ver principalmente con los procesos caracterizados por llegadas aleatorias (es decir, llegadas a intervalos aleatorios); el servicio al cliente también es un proceso aleatorio. Si se supone que hay costos relacionados con la espera en la fila y que hay costos para añadir más canales (es decir, agregar más instalaciones de servicio), lo que se busca es minimizar la suma de los costos de espera y los costos derivados de proveer instalaciones de servicio. De los cálculos resultarán medidas como el número esperado de personas en la fila, el tiempo de espera estimado para las llegadas y el porcentaje esperado de utilización de las instalaciones de servicio. Estas medidas se pueden emplear en los cálculos de costo para determinar el número y la capacidad deseables para las instalaciones de servicio.

La teoría de colas se puede usar para determinar el número óptimo de:

- Casetas de cobro en un puente o camino de peaje
- Doctores disponibles para consultas en una clínica
- Mecánicos para atender máquinas
- Pistas de aterrizaje para aviones
- Muelles para barcos

- Paramédicos disponibles para llamadas de emergencia
- Personal para un mostrador de piezas de recambio
- Ventanillas de servicio en una oficina postal

La lista anterior es sólo una muestra de las situaciones de colas de espera que encuentran los gerentes.

Experiencia y **colas**

Afortunadamente para el gerente ocupado, las decisiones razonables acerca de las colas muchas veces se pueden basar en la experiencia o en los hechos de la situación actual. Así, la gerencia de una tienda de comestibles sabe aproximadamente cuántas cajas debe instalar en una tienda nueva al revisar la experiencia de otras tiendas de su mismo tipo. En un momento determinado del día, el gerente de la tienda puede decidir cuántas de las cajas instaladas deben estar abiertas si observa la longitud de las colas y asigna personal de otras tareas o envía el personal de las cajas a otras actividades. Así mismo, los datos históricos (por ejemplo, del tiempo de inactividad de una máquina) pueden indicar la cantidad de tiempo que las máquinas han tenido que estar en cola para reparaciones, en vez de utilizar los cálculos de un modelo matemático para determinar el tiempo de inactividad.

Aunque es posible resolver con intuición o experiencia varios de los problemas que detecta un ejecutivo, muchas situaciones son demasiado complejas para la intuición. Algunas veces se necesita una respuesta más precisa que la que podría obtenerse intuitivamente. En estos casos el problema se puede abordar con simulación o con un modelo matemático. En este capítulo se analizarán varios modelos matemáticos de situaciones de colas de espera, y en el siguiente se mostrará cómo se puede emplear la simulación para estudiar problemas de colas de espera más complejos.

Modelos matemáticos de colas

En una situación de colas hay cinco elementos principales:

Llegadas. Los clientes llegan al sistema en busca de un servicio, y pueden ser personas, máquinas que requieren reparaciones, llamadas telefónicas que hay que contestar o alarmas de incendio. Es muy importante la manera en que llegan estos clientes al sistema. Pueden llegar individualmente o por lotes; a intervalos regulares o con un patrón aleatorio; pueden venir de una población infinita (es decir, muy grande) de posibles llegadas (por ejemplo, todas las personas de una ciudad que podrían usar un teléfono) o pueden provenir de un conjunto finito (por ejemplo, las 10 máquinas de un taller que pueden averiarse y requerir reparaciones).

Servicios. Hay que dar a cada cliente un servicio, como cortarle el cabello a una persona, reparar una máquina averiada, hacer una reserva vía telefónica en

una línea aérea o despachar camiones de bomberos para combatir un incendio. El tiempo que se requiere para concluir el servicio es el segundo elemento de importancia, y puede ser el mismo para cada cliente o variar considerablemente en forma aleatoria.

Número de puntos de servicio. Puede existir un solo punto de servicio o **canal,** o varios. Un cliente puede ser atendido por un solo punto de servicio o varios a la vez, y los puntos de servicio pueden tener tasas de servicio diferentes (algunos técnicos de reparación de máquinas son más rápidos que otros).

Disciplina de cola. Mientras los clientes esperan el servicio, están en la cola. Puede haber una sola cola o varias para cada servidor. El espacio de la cola puede ser limitado y los clientes que llegan cuando la cola está llena pueden retirarse (lo que se denomina *rechazo).* El orden de servicio a los clientes muchas veces se basa en el principio **FIFO** (primero en entrar primero en salir, First in First out), pero también es posible que exista un servicio rápido o prioritario para ciertos clientes; un ejemplo es la caja rápida para personas con 10 artículos o menos, en un supermercado. El servicio también puede proporcionarse en orden aleatorio.

Medidas del rendimiento. Hay varias formas de evaluar el rendimiento de una cola. Los resultados se pueden evaluar en un periodo corto después de iniciar el sistema, o en un plazo largo o de *equilibrio.* Por lo general es importante el tiempo que esperan los clientes y se puede considerar el promedio de tiempo de espera o una medida como el porcentaje de clientes que tienen que esperar más de, digamos, 10 minutos. El número promedio de clientes en la cola, la tasa de utilización del equipo y el costo de operación del sistema son otras medidas importantes que los gerentes podrían usar para determinar el número óptimo de servidores y la capacidad del sistema de colas.

Un sistema de colas puede tener cualquier combinación de los elementos antes descritos. Por consiguiente, hay un gran número de sistemas posibles y ningún modelo matemático puede describirlos todos. El interés central de este capítulo se dirige a los modelos sencillos de aplicación general que sirven para conocer más acerca del comportamiento global de los sistemas de colas. La mayoría de éstos se comportan como los casos que se estudian en este capítulo. En el capítulo siguiente se describe la simulación, que puede emplearse para modelizar colas y otros sistemas de manera bastante general.

En los modelos de colas aparecen con frecuencia dos distribuciones de probabilidad importantes. La distribución de **Poisson** supone un número muy grande (infinito) de llegadas posibles, cada una con una pequeña probabilidad de ocurrencia. Las llegadas son independientes y el número de ellas en un periodo no afecta el número en el siguiente. La distribución de Poisson es una buena aproximación para procesos que se consideran "aleatorios", como las llamadas que llegan a un conmutador, los clientes en la caja de un supermercado o las alarmas de incendio.

La variable aleatoria en la distribución de Poisson es el *número de sucesos* (por ejemplo, llegadas) *en una unidad de tiempo.* La distribución **exponencial** es una

distribución complementaria de la de Poisson, y tiene como variable aleatoria *el tiempo entre los sucesos.* A ambas se les denomina distribuciones de **Markov.** Los detalles de estas distribuciones se proporcionan en el apéndice 1 de este capítulo.

Modelo de colas con un solo punto de servicio

Para este modelo se considerará el caso en el cual:

1. Las llegadas son aleatorias y provienen de una distribución de probabilidad de *Poisson* o de *Markov.*
2. Se supone que el tiempo de servicio es también una variable aleatoria que sigue una distribución *exponencial* o de Markov. Se supone además que los tiempos de servicio son independientes entre sí e independiente del proceso de llegada.
3. Sólo hay un punto de servicio o canal.
4. La disciplina de cola se basa en el principio FIFO y no hay un límite para el tamaño de la cola.
5. Las tasas de llegadas y de servicio no cambian con el tiempo. El proceso ha estado en operación el tiempo suficiente para eliminar los efectos de las condiciones iniciales.

Notación. Una práctica común es representar los modelos de colas con una notación abreviada, como sigue:

Distribución del tiempo de llegada / Distribución del tiempo de servicio / Número de canales o puntos de servicio

donde:

M = Distribución de Markov (de Poisson o exponencial)
D = Tiempos deterministas (es decir, constantes)
G = Distribución general con una desviación estándar específica.

Con base en esta notación, el modelo que se considera es un modelo de cola *M/M/1.* Sea:

λ = Número promedio de clientes que llegan en una unidad de tiempo
μ = Número promedio de clientes al cual puede dar servicio la instalación en una unidad de tiempo, suponiendo que no hay escasez de clientes
L = Número esperado de unidades que se atienden y/o esperan en el sistema
L_q = Número esperado en cola (el número en cola no incluye la unidad que se atiende)
p_n = Probabilidad de tener η unidades en el sistema
W_q = Tiempo probable de espera en cola de una llegada
W = Tiempo probable de permanencia en el sistema (tanto en cola como en servicio)

Hay varias relaciones de importantes:

Como p_0 es la probabilidad de que el sistema esté vacío, representa el **tiempo de inactividad** esperado del sistema. Así mismo, $(1 - p_0) = \lambda/\mu$ es el **tiempo de actividad** esperado del sistema, o la **utilización** esperada.

El número esperado en la cola de espera y/o en servicio es:

El número esperado en cola es:

El tiempo de espera promedio (en la cola) para una llegada es:

Además, como la tasa media de servicio es μ, el tiempo medio de servicio es $1/\mu$; por lo tanto, el tiempo promedio de permanencia en el sistema (tanto en espera como en servicio) es:

La probabilidad de que el número de unidades en cola y en servicio sea mayor que k es:

Las ecuaciones 18-1 a 18-8 son aplicables sólo si $(\lambda/\mu) < 1$. Si la tasa de llegadas, A, es mayor que la tasa de servicio, μ, la cola crecerá sin fin a menos que cambie una de las hipótesis.

Suponga que los pacientes del consultorio médico de una gran planta llegan en forma aleatoria, de acuerdo con un proceso de Poisson. El consultorio puede atender a los pacientes con una tasa promedio de cinco personas por hora (uno por uno); el proceso de servicio también es de Poisson. El promedio de llegada de los pacientes es de cuatro por hora (supondremos también que este proceso es de Poisson, aunque no es exacto, ya que la población no es infinita, aunque sea de gran tamaño). La planta opera durante las 24 horas del día.

[1] Véase el apéndice 2 al final de este capítulo para conocer la obtención de la ecuación 18-2.

$$\lambda = 4$$
$$\mu = 5$$

Como $(\lambda/\mu) < 1$, se pueden utilizar las siguientes relaciones:

$$p_0 = 1 - \frac{\lambda}{\mu} = 1 - \frac{4}{5} = 0.20$$

En promedio, el consultorio estará inactivo el 20% del tiempo y activo el 80%.

$$L = \frac{\lambda}{(\mu - \lambda)} = \frac{4}{(5 - 4)} = 4$$

Habrá un promedio de cuatro personas en cola y en servicio:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{4 \cdot 4}{5(5 - 4)} = \frac{16}{5} = 3.2$$

En promedio habrá 3.2 personas en cola.

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{16/5}{4} = \frac{4}{5} = 0.8 \text{ horas}$$

El tiempo de espera promedio de un paciente es 0.8 horas.

$$W = W_q + 1/\mu = 0.8 + 1/5 = 1.0 \text{ horas}$$

El tiempo promedio que permanece en el sistema (en espera y en servicio) es una hora.

Todas las mediciones anteriores suponen que el proceso ha estado en operación el tiempo suficiente para que se hayan hecho presentes las probabilidades que surgen de las características físicas del problema; es decir, el sistema está en equilibrio.

Ahora se sabe lo siguiente:

1. El consultorio estará inactivo el 20% del tiempo y activo el 80%.
2. El número promedio de pacientes en la oficina es cuatro.
3. El número promedio de pacientes en espera es 3.2.
4. El paciente esperará en promedio $^4/5$ de hora.
5. El tiempo total (espera más servicio) será, en promedio, una hora.

Si consideramos un día de trabajo de 24 horas, el promedio de pacientes que llegan al consultorio será de 96 al día y el tiempo promedio que perderán los pacientes en la cola de espera será:

$$T = \lambda \cdot 24 \text{ horas} \cdot W_q$$
$$T = 4 \cdot 24 \cdot 0.8 = 76.8 \text{ horas}$$

Hay un costo relacionado con estas 76.8 horas. Suponga que el costo para la compañía es de 20 dólares por hora que espera un trabajador. El costo promedio diario de la espera sería:

$$76.8 \cdot 20 = \$1\,536$$

Tabla 18-1

Más que este número en el consultorio k	*Probabilidad* $P(n > k) = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^{k+1} = \left(\frac{4}{5}\right)^{k+1}$
0	0.8000
1	0.6400
2	0.5120
3	0.4096
4	0.3277
5	0.2621
6	0.2097

También se puede calcular la distribución de probabilidad acumulada de los pacientes en el consultorio, a partir de la ecuación 18-8 (véase Tabla 18-1).

Es posible que se desee limitar la probabilidad de un suceso específico. Por ejemplo, si estamos dispuestos a aceptar una probabilidad de 0.41 de que estén más de tres personas en el consultorio (es decir, más de dos en espera), entonces la situación actual es aceptable.

Suponga que se pudiera, de alguna manera, aumentar la tasa de servicio de cinco a seis personas por hora y así reducir el tiempo promedio en servicio, de 12 a 10 minutos. ¿Cuál sería el efecto de este cambio?

Con $\mu = 6$, el número esperado en la cola, L_q, ahora es 1.33 en lugar de 3.2, como se determinó antes. Esta cifra se puede calcular de la siguiente manera:

$$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{4 \cdot 4}{6(6 - 4)} = \frac{16}{12} = 1.33$$

La espera promedio de cada paciente es ahora:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{1.33}{4} = \frac{1}{3} \text{ hora}$$

Antes del cambio, cada paciente esperaba en promedio 12 minutos en servicio y 48 minutos en espera. Después del cambio, cada paciente estará un promedio de 10 minutos en servicio y 20 en espera. Esto se puede verificar si se calcula el tiempo total en el sistema:

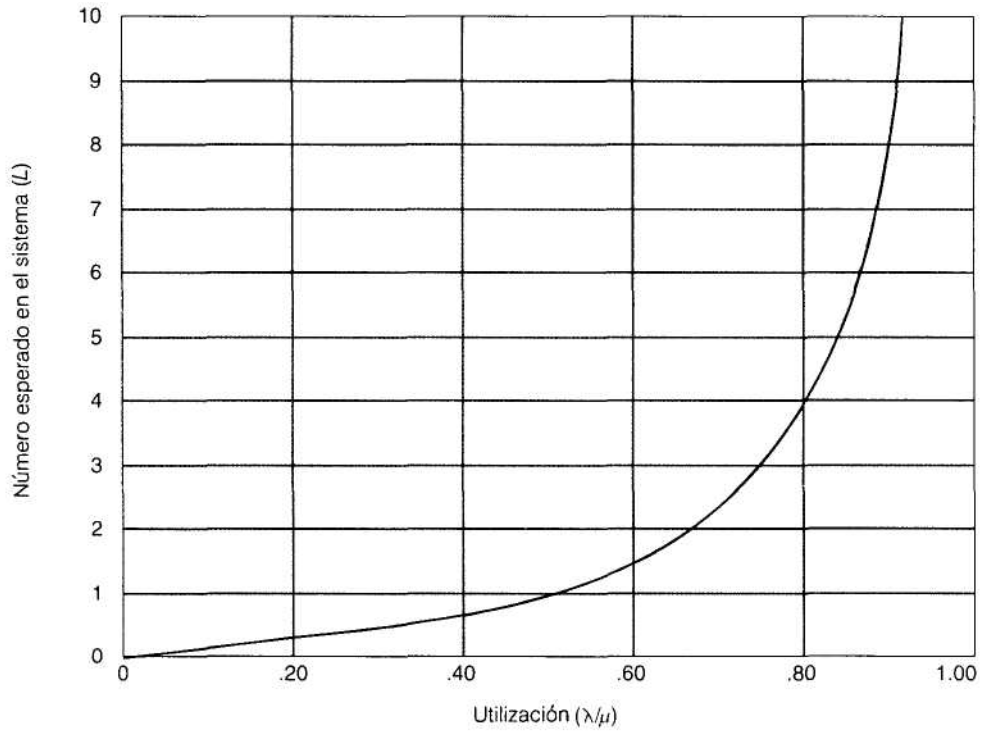
$$W = W_q + 1/\mu = \tfrac{1}{3} + \tfrac{1}{6} = \tfrac{1}{2} \text{ hora}$$

Cada día hay 96 pacientes ($4 \cdot 24$) y cada paciente ahorrará media hora. A un costo de 20 dólares la hora, el ahorro total en costo es:

$$96 \cdot \tfrac{1}{2} \cdot 20 = \$960$$

Aumentar la tasa de servicio a seis pacientes por hora le costaría a la compañía 960 dólares diarios (350 400 dólares anuales).

Figura 18-1 Número esperado en el sistema, y la utilización



Comportamiento del sistema de colas

Las fórmulas que se presentaron para el caso de un solo canal permiten estudiar el comportamiento del sistema conforme la tasa de llegadas λ se aproxima a la tasa de servicio μ. Recuerde que (λ/μ) es igual a la utilización del sistema o al porcentaje de tiempo de actividad del punto de servicio; con base en esto se puede representar gráficamente el número esperado en el sistema (L) como función de la utilización, como en la figura 18-1.[2]

Al revisar la figura 18-1 salta a la vista la manera en que responde el número esperado en el sistema (L) ante la utilización. En un sistema de cola de un solo punto de servicio, si la utilización supera el 80%, el número esperado en el sistema aumenta *mucho más abruptamente.* La consecuencia general es que si se desea servicio rápido en un sistema de un solo canal, tiene que haber capacidad

[2] Al dividir entre μ el numerador *y* el denominador de la ecuación 18-4, se puede obtener L como una función de la utilización, (λ/μ):

$$L = \frac{(\lambda/\mu)}{1 - (\lambda/\mu)}$$

"excesiva" (mucho menos del 100% de utilización) para evitar las esperas excesivas.

Aunque la figura 18-1 sólo puede aplicarse directamente a las suposiciones que se establecieron, es sorprendente la cantidad de situaciones empresariales que se comportan en una forma cualitativamente parecida cuando cambia la utilización. Incluso en instalaciones de producción complejas, con varias máquinas y rutas alternativas para las piezas, se ha observado con frecuencia que cuando un aumento en la demanda da lugar a un aumento en la utilización del taller, hay un aumento mayor en el tiempo que pasa un pedido en el taller (tiempo de espera más tiempo de procesamiento), lo cual se ajusta al patrón general de la figura 18-1.

En la mayoría de las organizaciones existe una presión para ser eficientes y reducir todo lo posible el tiempo de inactividad. A los gerentes no les gusta ver que el personal o el equipo estén sin trabajar. Pero con las llegadas y los tiempos de servicio aleatorios, surge la necesidad de tener capacidad excesiva para evitar largas colas y tiempos de espera para los clientes. Este aspecto es muy importante en los sistemas de colas y no siempre es evidente para algunas personas.

Tiempos generales de servicio: Modelo *M/G/1*

Considere un sistema con un solo punto de servicio, llegadas de Poisson (o de Markov) y disciplina de cola FIFO. Suponga que la distribución de probabilidad del tiempo de servicio es arbitraria o general, con media l/μ y desviación estándar σ. En esta situación se aplican las siguientes fórmulas:

$$W_q = \frac{\frac{\lambda}{\mu^2} + \lambda\sigma^2}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)} \qquad \textbf{(18–9)}$$

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} \qquad \textbf{(18–10)}$$

$$L_q = \lambda W_q \qquad \textbf{(18–11)}$$

$$L = \lambda W \qquad \textbf{(18–12)}$$

Aquí también se aplica la ecuación 18-1:

$$p_0 = 1 - \lambda/\mu \qquad \textbf{(18–1)}$$

Observe que la varianza del tiempo de servicio, σ^2, aparece en el numerador de la ecuación 18-9. Esto implica que el tiempo de espera depende directamente de las variaciones en el tiempo de servicio.

Ejemplo 2 Considere un sistema con un solo punto de servicio, como en el ejemplo 1, con tasa promedio de llegadas de cuatro por hora y tasa promedio de servicio de cinco por hora. Observe que una tasa inedia de servicio de cinco por hora equivale a un

tiempo medio de servicio de 12 minutos. Supongamos ahora que la distribución del tiempo de servicio no es exponencial, sino que tiene el mismo tiempo medio de servicio de 12 minutos con desviación estándar de tres minutos. En horas, la desviación estándar $\sigma = {}^{3}/_{60} = 0.05$ horas. Al sustituir esta cantidad en la ecuación 18-9 se tiene:

$$W_q = \frac{({}^{4}/_{5}^{2}) + 4(.05)^2}{2(1 - {}^{4}/_{5})} = \frac{.16 + .01}{.40} = 0.425 \text{ horas}$$

Otros valores importantes se calculan de la siguiente manera:

$$W = W_q + \frac{1}{\mu} = 0.425 + 20 = 0.625 \text{ horas}$$

$$L_q = \lambda W_q = 4(0.425) = 1.70$$

y

$$L = \lambda W = 4(0.625) = 2.50$$

Tiempos constantes de servicio: Modelo *M/D/1*

Los tiempos de servicio constantes o deterministas también pueden modelizarse con las ecuaciones 18-8 a 18-12, dándole un valor de cero a la desviación estándar σ. Entonces, la ecuación 18-9 se convierte en:

$$W_q = \frac{\frac{\lambda}{\mu^2}}{2\left(1 - \frac{\lambda}{\mu}\right)} \qquad \textbf{(18–13)}$$

y esta ecuación se puede usar con las ecuaciones 18-10 a 18-12 para calcular medidas del rendimiento para el modelo *M/D/1*.

Ejemplo 3 Considere los ejemplos 1 y 2, pero suponga ahora que el tiempo de servicio es exactamente 12 minutos ($\mu = 5$/hora, $\sigma = 0$). A partir de la ecuación 18-13:

$$W_q = \frac{{}^{4}/_{5}^{2}}{2(1 - {}^{4}/_{5})} = \frac{0.16}{0.40} = 0.40 \text{ horas}$$

De la ecuación 18-11:

$$L_q = \lambda W_q = 4(0.40) = 1.6$$

Es interesante comparar los resultados de los ejemplos 1, 2 y 3. La distribución exponencial (o de Markov) del servicio[3] tiene mucha variación y la desvia-

[3] Véase el apéndice 1 para conocer los detalles. Observe que al introducir la varianza de la distribución de Markov en la ecuación 18-Θ se puede obtener la ecuación 18-6.

ción estándar del tiempo de servicio es igual a la media del tiempo de servicio. Es decir, $\sigma = 1/\mu = Vs = 0.20$.

	Ejemplo 1	*Ejemplo 2*	*Ejemplo 3*
Desviación estándar de la distribución del tiempo de espera	$\sigma =$ 0.20	$\sigma = 0.05$	$\sigma = 0$
Tiempo promedio de espera, W_q	1.0	0.425	0.40
Longitud promedio de la cola, L_q	3.2	i.7	1.6

De esta manera se puede ver que una reducción en la variación del tiempo de servicio del caso exponencial produce mejoras considerables en el rendimiento del sistema.

EL papel de la variabilidad

Los ejemplos ilustran lo que se sabe a partir de la experiencia: la imprevisibilidad o variabilidad es una de las causas principales de los congestionamientos en los sistemas de colas. Si hay variabilidad, las llegadas pueden ocurrir con mayor rapidez que lo que ofrece el servicio y la cola crece. En otras ocasiones, no hay llegadas y el sistema está inactivo. Además la fila crece detrás de un cliente que tarda mucho tiempo para completar su servicio en un supermercado o en un banco. Por lo tanto, la variación en los tiempos de llegadas y de servicio es el factor principal en los congestionamientos de los sistemas de colas y a mayor variación, mayor es la congestión.

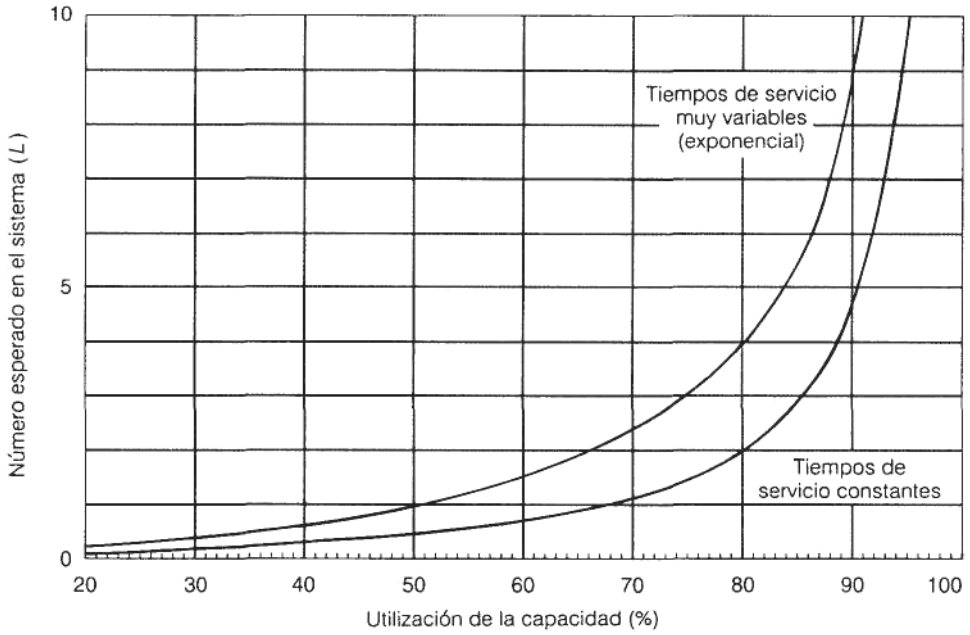
La figura 18-2 ilustra este concepto comparando el modelo *M/M/1,* con tiempos de servicio exponenciales, con el modelo *M/D/1* que tiene tiempos de servicio constantes. Observe que en cualquier nivel de utilización de la capacidad, los tiempos de servicio exponenciales crean un número esperado en el sistema (L) que es exactamente el doble de lo que se obtiene con los tiempos de servicio constantes. Por lo tanto, cuando los tiempos de llegada o de servicio son aleatorios, no sólo hay que hacer planes para lograr menos del 100% de utilización de la capacidad, sino también para reducir la variabilidad en los tiempos de servicio.

Puntos de servicio múltiples: Modelo *M/M/c*

Supondremos ahora que hay *c* canales y que existe una sola cola de espera si todas las instalaciones de servicio están ocupadas. Cada canal tiene la misma tasa de servicio, μ. Una vez más se usará *n* para representar la suma de los clientes en servicio y en la cola de espera.

Las fórmulas que se presentan a continuación muestran la probabilidad de cero clientes en el sistema (p_0) y la probabilidad de *n* clientes (p_n). Estas fórmulas son más complejas que las correspondientes a un solo canal:

Figura 18-2 Efecto de la variabilidad sobre el número de unidades en el sistema (colas *M/M/1* y *M/D/1)*



$$p_0 = \left[\frac{(\lambda/\mu)^c}{c!\left(1 - \frac{\lambda/\mu}{c}\right)} + 1 + \frac{(\lambda/\mu)^1}{1!} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!} + \ldots + \frac{(\lambda/\mu)^{c-1}}{(c-1)!} \right]^{-1} \qquad \textbf{(18–14)}$$

$$p_n = p_0 \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \quad \text{si } n \le c \qquad \textbf{(18–15)}$$

$$p_n = p_0 \frac{(\lambda/\mu)^1}{1!} \quad \text{si } n > c \qquad \textbf{(18–16)}$$

La utilización de la capacidad en este sistema es $\frac{\lambda}{c\mu}$.

Se pueden usar las ecuaciones anteriores si:

$$\frac{\lambda}{c\mu} < 1$$

Si:

$$\frac{\lambda}{c\mu} > 1$$

entonces la cola de espera se hace cada vez más larga; es decir, n se hace infinito si el proceso dura lo suficiente.

Cuando $c = 1$ (hay una instalación de servicio), las ecuaciones 18-15 y 18-16 se reducen a la ecuación 18-2. De la ecuación 18-15 se tiene:

$$p_n = p_0 \frac{(\lambda/\mu)^n}{n!} \quad \text{si } n \leq c$$

Pero n sólo puede tomar valores de 0 o 1 si $n \leq c = 1$; por lo tanto:

$$p_n = p_0(\lambda/\mu)^n$$

Si $c = 1$, la ecuación 18-16 también se reduce a la ecuación 18-2.

Con c instalaciones de servicio, el número promedio de clientes en la cola es:

$$L_q = \frac{(\lambda/\mu)^{c+1}}{c \cdot c! \left(1 - \frac{\lambda/\mu}{c}\right)^2} p_0 \qquad \textbf{(18–17)}$$

El número promedio en el sistema (en espera y en servicio) es:

$$L = L_q + \lambda/\mu \qquad \textbf{(18–18)}$$

El tiempo medio de espera en cola para una llegada es:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} \qquad \textbf{(18–19)}$$

Así mismo, el tiempo medio de permanencia en el sistema (espera más servicio) es:

$$W = \frac{L}{\lambda} \qquad \textbf{(18–20)}$$

Ejemplo 4 Remítase al ejemplo de un consultorio médico, del ejemplo 1, y considere las características del proceso si se añade otro consultorio. Cada consultorio puede atender en promedio a cinco pacientes por hora; suponga que los tiempos de servicio son exponenciales y que hay una cola de espera común para los dos consultorios que opera sobre la base FIFO. Entonces, se trata de una sistema *M/M/c* con los siguientes parámetros:

$$\lambda = 4$$
$$\mu = 5$$
$$c = 2$$
$$\lambda/\mu = 0.8$$

Se calcula primero p_0, el tiempo de inactividad esperado para el sistema, con la ecuación 18-14:

$$p_0 = \frac{1}{\dfrac{(\lambda/\mu)^c}{c!\left(1 - \dfrac{\lambda/\mu}{c}\right)} + 1 + \dfrac{(\lambda/\mu)^1}{1!} + \ldots + \dfrac{(\lambda/\mu)^{c-1}}{(c-1)!}}$$

$$p_0 = \frac{1}{\dfrac{(0.8)^2}{2(1 - 0.8/2)} + 1 + \dfrac{0.8}{1}} = \frac{1}{\dfrac{0.64}{1.2} + 1.8}$$

$$= \frac{1}{2.3} = 0.43$$

El número esperado de clientes en la cola de espera, que se obtiene de la ecuación 18-17, es entonces:

$$L_q = \frac{(0.8)^3}{2 \cdot 2(1 - 0.8/2)^2} \cdot 0.43 = \frac{0.512 \cdot 0.43}{4 \cdot 0.36} = 0.153$$

El número esperado de clientes en el sistema (espera más servicio) es, de acuerdo con la ecuación 18-18:

$$L = L_q + \lambda/\mu = 0.153 + 0.8 = 0.953$$

El tiempo medio de esperao en la cola es:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda} = \frac{0.153}{4} = 0.038 \text{ horas}$$

Previamente se calculó que el tiempo medio que se perdía en un día con un consultorio era de 76.8 horas. El tiempo total perdido esperado es ahora:

$$T = \lambda \cdot 24 \text{ horas} \cdot W_q$$
$$= 4 \cdot 24 \cdot 0.038 = 3.65 \text{ horas}$$

Suponiendo una vez más que hay un costo de 20 dólares por hora, el costo promedio de la espera por día es:

$$3.65 \cdot \$20 = \$73$$

Con esto se presenta un ahorro de 1463 dólares (es decir, $1536 - $73) en el costo esperado. Si el costo de añadir el segundo consultorio es menor de 1463 dólares diarios, entonces la decisión debe ser abrir los dos consultorios. También se puede considerar un tercer consultorio, pero como el costo medio de espera es de sólo 73 dólares diarios, lo más probable es que no sea conveniente añadir el tercer consultorio, desde el punto de vista económico.

Los cálculos que implican las ecuaciones 18-14 a 18-20 pueden ser tediosos si hay más de dos canales de servicio. La tabla 18-12 puede usarse para calcular el tiempo medio de espera, W_q, lo cual generalmente es la medición más útil del rendimiento. El interior de la tabla contiene el valor del múltiplo del tiempo de espera (WTM, *waiting time multiple),* es decir, el tiempo medio de espera

Tabla 18-2 Múltiplo del tiempo de espera (WTM) para colas M/M/C

Utilización de la capacidad $\frac{\lambda}{c\mu}$	*Número de canales de servicio*					
	c = 1	*c = 2*	*c = 3*	*c = 4*	*c = 5*	*c = 10*
0.10	0.1111	0.0101	0.0014	0.0002	0.0000*	0.0000*
0.20	0.2500	0.0417	0.0103	0.0030	0.0010	0.0000*
0.30	0.4286	0.0989	0.0333	0.0132	0.0058	0.0002
0.40	0.6667	0.1905	0.0784	0.0378	0.0199	0.0015
0.50	1.0000	0.3333	0.1579	0.0870	0.0521	0.0072
0.60	1.5000	0.5625	0.2956	0.1794	0.1181	0.0253
0.70	2.3333	0.9608	0.5470	0.3572	0.2519	0.0739
0.80	4.0000	1.7778	1.0787	0.7455	0.5541	0.2046
0.90	9.0000	4.2632	2.7235	1.9694	1.5250	0.6687
0.95	19.0000	9.2564	6.0467	4.4571	3.5112	1.6512

* Menor que 0.00005

multiplicado por la tasa de servicio.[4] Dados los valores para λ, μ y c, es fácil determinar el valor de W_q. En el ejemplo anterior, $\lambda = 4$, $\mu = 5$ y $c = 2$. La razón de utilización de la capacidad es:

$$\lambda/(c\mu) = 4/(5 \cdot 2) = 0.40$$

El WTM correspondiente de la tabla 18-2 en la columna $c = 2$ es 0.1905. Entonces:

$$W_q\mu = W_q(5) = 0.1905$$

y

$$W_q = \text{WTM}/\mu = 0.1905/5 = 0.038$$

lo cual concuerda con el resultado que se calculó anteriormente.

Ejemplo 5 Los clientes llegan en forma aleatoria a la estación de seguridad de un aeropuerto, a una tasa media de nueve por minuto ($\lambda = 9$). La estación tiene cuatro puntos de servicio (es decir, cuatro conjuntos de unidades de rayos X y detectores de metales), cada uno de los cuales puede revisar un promedio de 2.5 personas por minuto ($\mu = 2.5$). Suponiendo que las llegadas y el servicio son de tipo Poisson, ¿cuál es la longitud promedio de la cola y el tiempo de espera promedio?

Se calcula primero la utilización de la capacidad como $\lambda/(c\mu) = 9/(4 \cdot 2.5) = 0.90$. A partir de la tabla 18-2, el múltiplo del tiempo de espera correspondiente a la columna $c = 4$ es WTM = 1.9694.

[4] El múltiplo del tiempo de espera es el tiempo medio de espera medido en unidades de tiempo de servicio esperado:

$$\text{WTM} = W_q \cdot \mu$$

$$\text{WTM} = 1.9694 = W_q\mu$$
$$W_q = 1.9694/\mu = 1.9694/2.5 = 0.78 \text{ minutos}$$

Por lo tanto, el tiempo de espera promedio en la cola es de 0.78 minutos (47 segundos). De la ecuación 18-19:

$$W_q = \frac{L_q}{\lambda}$$

o sea:

$$L_q = \lambda W_q = (9)(0.78) = 7.1 \text{ personas}$$

Por consiguiente, la longitud promedio de la cola es de 7.1 personas.

Instalaciones agrupadas

El término *agrupamiento* se refiere a la combinación de sistemas separados para formar un grupo común. Suponga que hay dos sistemas de cola, cada uno con un punto de servicio (es decir, dos sistemas *M/M/1)* y colas de espera separadas. ¿Qué sucede si se combinan los dos flujos de llegadas para formar uno solo y así tratar el sistema como si fuera *M/M/2?*

La figura 18-3 ilustra la forma en que queda afectado el múltiplo del tiempo de espera (WTM) con el agrupamiento de dos unidades independientes para formar un punto de servicio "agrupado" de dos estaciones. En un nivel cualquiera de utilización de la capacidad, el WTM es mucho más pequeño con el agrupamiento. Intuitivamente, al agrupar los sistemas se evita que el sistema Atenga una cola de espera y el sistema B esté vacío.

Al ampliar más el agrupamiento se obtienen mejores resultados. La figura 18-4 ilustra el efecto de agrupar cinco sistemas separados para formar uno agrupado; observe la notable reducción en el WTM, sobre todo con niveles mayores de utilización de la capacidad.

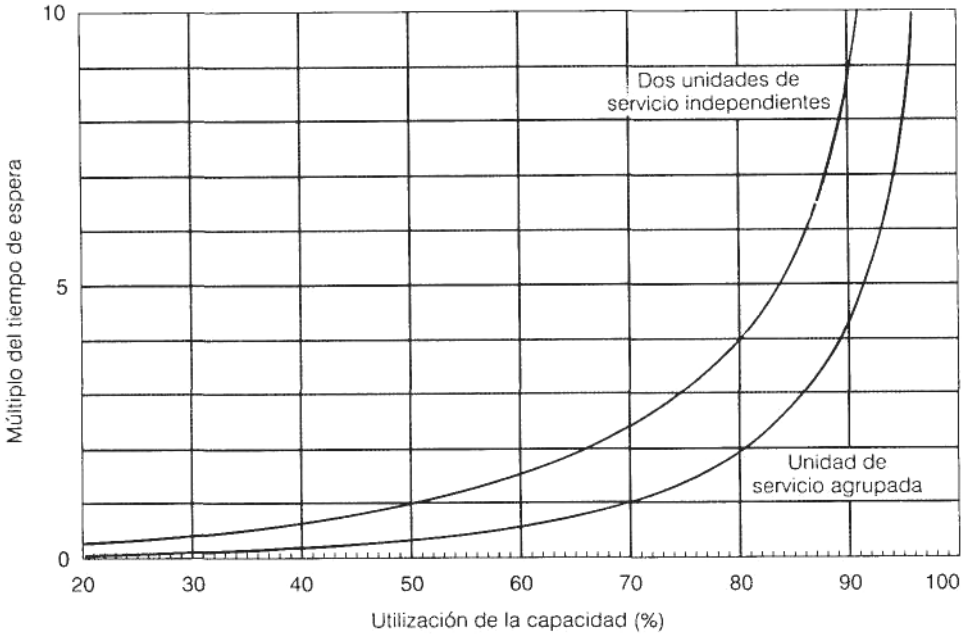
Ejemplo 6 Remítase al ejemplo del consultorio médico que se analizó en los ejemplos 1 y 4. Suponga que se agrega un segundo consultorio, pero en un lugar distinto del primero, de manera que cada uno tenga su propia cola de espera. Suponga además que cada consultorio atenderá aproximadamente la mitad de los clientes y que las llegadas son aleatorias, como antes. Ahora hay dos sistemas de cola *M/M/l* independientes, cada uno con:

$$\lambda = 2.0$$
$$\mu = 5.0$$

A partir de la tabla 18-2 se puede ver que para $c = 1$ y $\lambda/\mu = 0.40$, WTM = 0.6667. Entonces:

$$W_q = \text{WTM}/\mu = 0.1333 \text{ horas}$$

Figura 18-3 Efecto del agrupamiento de colas *M/M/c* (comparación entre dos unidades independientes y una unidad agrupada)



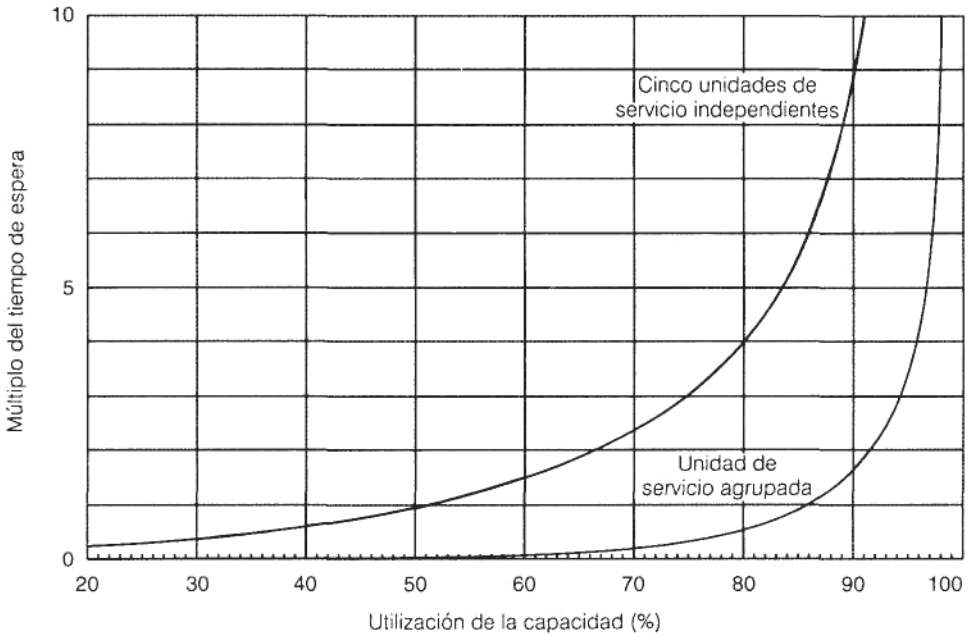
Compare esto con el tiempo de espera para la instalación agrupada del ejemplo 4, donde el tiempo de espera era 0.038 horas. En este caso, el agrupamiento reduce el tiempo de espera en casi dos terceras partes.

Antes de determinar que el agrupamiento siempre es benéfico, hay que tener presentes algunos de los costos de los sistemas agrupados. Pueden existir cargas administrativas, aumento en el tiempo de viaje de los clientes y pérdida de control en la organización. Como muestra, en el ejemplo, si la planta abarcara varios edificios y los consultorios independientes estuvieran ubicados en forma conveniente, se podría compensar el tiempo de espera adicional con el ahorro en tiempo de desplazamiento de los trabajadores al consultorio. Observe también que la mayoría de los ejecutivos prefieren tener su propia secretaria en lugar de que exista un grupo secretarial.

Conclusión

Existen varios modelos más complejos para situaciones de colas que no se ajustan a las hipótesis anteriores. Pero no todas las suposiciones se pueden manipular en forma analítica y resolverse para obtener la información que nos interesa. En una situación típica puede ser más fácil usar la técnica de simulación (descrita en el

Figura 18-4 Efecto del agrupamiento de colas *M/M/c* (comparación entre cinco unidades independientes y una unidad agrupada)



capítulo siguiente) incluso si existe un modelo teórico, ya que es fácil modificar una simulación para incluir características específicas del problema (por ejemplo, el área de descarga de camiones sólo puede tener espacio para tres vehículos). Los lenguajes de simulación y los sistemas de computación se combinan para permitir que la simulación sea accesible a bajo costo, por lo cual esta técnica se emplea con frecuencia para estudiar situaciones específicas de colas.

RESUMEN

Para una instalación de un solo canal hay fórmulas que permiten determinar medidas importantes del rendimiento, como la media del tiempo de espera, el número promedio en cola y la utilización del sistema. Para el caso de varios canales se proporcionan tablas. La simulación debe considerarse como alternativa si las hipótesis de la cola no son apropiadas.

Hay tres aspectos de gestión importantes con respecto a los sistemas de colas:

1. Planificar para tener capacidad no utilizada: la utilización elevada de la capa cidad implica esperas largas.
2. La variabilidad (de las llegadas o del servicio) es un elemento no deseable.
3. El agrupamiento reduce el tiempo de espera si todos los demás aspectos permanecen sin cambio (pero no menosprecie las dificultades administrativas del agrupamiento).

APÉNDICE 1

Proceso y distribución de Poisson



En un proceso de Poisson, la probabilidad de ocurrencia de un suceso es constante y la ocurrencia del suceso es independiente de lo que haya sucedido inmediatamente antes de la observación actual. El punto de interés puede ser lo que sucede en un intervalo continuo. Este intervalo puede ser una medida de la distancia (por ejemplo, un metro) o una unidad de tiempo (como un día). Un ejemplo de un proceso que puede ser de Poisson son los errores de impresión por página de un libro; otros ejemplos son la manufactura de textiles, de acero laminado, de tubería, de alambre, etc., donde hay X defectos por unidad de medida del producto.

Las ventas de un producto se pueden comportar como un proceso de Poisson. Suponga que hay 80 ventas individuales de una unidad de producto por persona en las últimas 50 semanas, o un promedio de ventas de 1.6 unidades semanales, y nos interesa saber la probabilidad de que se presenten distintos niveles de ventas en las próximas cinco semanas.

La distribución de probabilidad de Poisson aplicada a un proceso de Poisson indica la probabilidad de que ocurra cierto número de sucesos en una medida de distancia o tiempo, si se sabe (1) el número esperado de sucesos *por unidad* de distancia o tiempo y (2) la longitud de la distancia o el tiempo. Suponga que se usa el símbolo λ para representar el número esperado de sucesos por unidad de medida, es decir, la *tasa o intensidad* del proceso. Como ejemplo de λ están 1.6 unidades de ventas por semana, 25 llamadas telefónicas por hora, tres defectos por cada 100 metros de tubería, etcétera. Sea Tía unidad de tiempo o de espacio en la cual se contarán los sucesos. Entonces, la probabilidad de Poisson de que ocurran exactamente r sucesos en el tiempo T, dado el número promedio λ de sucesos por unidad de tiempo, es:[5]

$$P(R = r|\lambda,T) = \frac{e^{-\ T}(\lambda T)^r}{r!} \qquad (18\text{–}21)$$

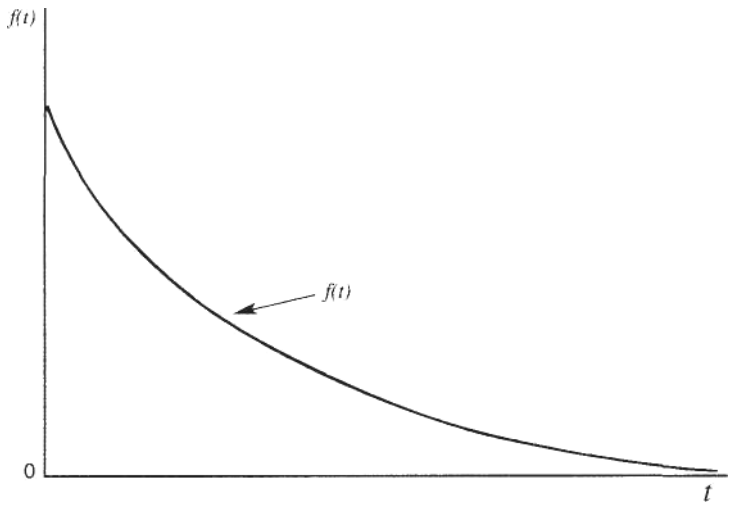
Al usar la distribución de probabilidad de Poisson se pueden combinar por multiplicación λ y T para obtener *ni;* es decir, $m = \lambda T$, donde m es el número esperado de sucesos en el periodo. Se *esperan m* sucesos en el tiempo especificado. T. Por ejemplo, si $\lambda = 2$ (el número promedio de sucesos por semana) y $T = 5$ (el periodo de tiempo es cinco semanas), el número promedio de sucesos por periodo de cinco semanas es $2 \cdot 5 = 10$. Una distribución de Poisson tiene la propiedad de que su varianza siempre es igual a su media, m, por lo que la desviación estándar es $\sqrt{m}$.

Distribución exponencial

Con relación al proceso de Poisson se analizó la distribución de probabilidad de Poisson, la cual da la probabilidad del número de ocurrencias de un suceso, dada

[5] $e = 2.718\ldots$, la base para los logaritmos naturales.

Figura 18-5 Función de densidad de probabilidad exponencial



una intensidad λ y cierto periodo de tiempo *T.* También se podría investigar cuál es el tiempo de espera entre sucesos inmediatos para *el mismo proceso de Poisson* (es decir, el "tiempo entre llegadas"). En otras palabras, ¿cuál es la distribución de probabilidad del tiempo, *t, entre sucesos!* Esta distribución de probabilidad se denomina **distribución exponencial** (véase Fig. 18-5). La función de densidad de probabilidad exponencial es:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \qquad 0 \le t < \infty \tag{18–22}$$

La media de la distribución exponencial es $E(t) = (1/\lambda)$ y la varianza es $(1/\lambda)^2$. La cola del lado derecho de la distribución exponencial es:[6]

$$p(t > T) = e^{-m} \qquad \text{donde } m = \lambda T$$

Es decir, la probabilidad de que el tiempo entre sucesos (llegadas) sea mayor que *T,* es e^{-m}. Observe que éste es también el valor de la función de masa de provabilidad de Poisson para cero sucesos (llegadas) en el periodo *T.*[7]

---

[6] $\int_T^\infty \lambda e^{-\lambda x} dx = -e^{-\lambda x}\Big|_T^\infty = 0 + e^{-\lambda T} = e^{-\lambda T} = e^{-m}$

[7] La función de masa de probabilidad de Poisson es:

$$P(R = r|\lambda, T) = e^{-m}\frac{m^r}{r!}$$

donde $m = \lambda T$. Si $r = 0$, entonces:

$$P(R = 0 \mid \lambda, T) = e^{-m}$$

Es decir, la probabilidad de que no haya llegadas durante T, es e^{-m}.

Por lo tanto, la distribución de Poisson de llegadas por unidad de tiempo y la distribución exponencial de tiempos entre llegadas son dos modos alternativos para describir la misma cosa. Podemos decir que el número de llegadas por unidad de tiempo es una distribución de Poisson con tasa media $\lambda = 5$ por hora, por ejemplo, o bien que los tiempos que transcurren entre llegadas se distribuyen exponencialmente con un promedio entre ellas de $(1/\lambda) = {}^{1}/_{5}$ hora; las dos expresiones se implican mutuamente.

APÉNDICE 2 Obtención de la fórmula básica de colas



Queremos deducir la relación:

$$p_n = (\lambda/\mu)^n p_0$$

Suponga que las llegadas y los servicios ocurren de acuerdo con un proceso de Poisson. Hay una instalación de servicio con una cola "primero en llegar primero en salir". Sea:

λ = Número promedio de llegadas en una unidad de tiempo
μ = Número promedio de llegadas que la instalación puede atender en una unidad de tiempo
n = Número de unidades en el sistema, ya estén en servicio o en espera
$P_n(t)$ = Probabilidad de tener n unidades en el sistema en el instante t
p_n, = Probabilidad de tener n unidades en el sistema, suponiendo que hay equilibrio
λh = Probabilidad de una llegada durante el periodo h, cuando h es muy pequeño
μh = Probabilidad de que concluya un servicio durante el periodo h

Podemos suponer que la probabilidad de que ocurra más de un cambio durante el periodo h es muy cercana a cero. Para hacer más sencillo el desarrollo, supondremos que es cero (es decir, la probabilidad de dos o más servicios o llegadas o un servicio y una llegada es cero en un intervalo de tiempo muy pequeño). Entonces:

$1 - \lambda h - \mu h$ = Probabilidad de que no haya cambios

Se puede llegar al estado n (es decir, n unidades en el sistema) a través de uno de cuatro sucesos, que ocurren de la siguiente manera:

- Suceso *a:* Estar en n *y* que no ocurran cambios.
- Suceso *b:* Estar en n - 1 y que ocurra una llegada.
- Suceso c: Estar en n + 1 y que concluya un servicio.
- Suceso *d:* Estar en n- y o n + y y que ocurran y cambios, donde $y > 1$ (hemos supuesto que la probabilidad de este suceso es cero).

Como los sucesos *a, b* y *c* son mutuamente excluyentes, podemos sumar sus probabilidades:

$$P_n(t + h) = P(a) + P(b) + P(c), \qquad 1 \leq n < \infty$$

$$P_n(t + h) = P_n(t)(1 - \lambda h - \mu h) + P_{n-1}(t)(\lambda h) + P_{n+1}(t)(\mu h) \qquad \textbf{(18–23)}$$

$$\frac{P_n(t + h) - P_n(t)}{h} = -(\lambda + \mu)P_n(t) + \lambda P_{n-1}(t) + \mu P_{n+1}(t) \qquad \textbf{(18–24)}$$

Al reacomodar los términos y aproximar *h* a cero:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = \lambda P_{n-1}(t) - (\lambda + \mu)P_n(t) + \mu P_{n+1}(t) \qquad \textbf{(18–25)}$$

En equilibrio:

$$\frac{dP_n(t)}{dt} = 0$$

y se obtiene:

$$P_{n+1} = -\frac{\lambda}{\mu} P_{n-1} + \frac{\lambda + \mu}{\mu} p_n \qquad \textbf{(18–26)}$$

Regresando a la ecuación 18-23:

$$P_n(t + h) = P_n(t)(1 - \lambda h - \mu h) + P_{n-1}(t)(\lambda h) + P_{n+1}(t)(\mu h) \qquad \textbf{(18–27)}$$

Si consideramos $P_0(t + h)$, entonces $n = 0$, $P_{n-1}(t) = 0$ y el término $-\mu h$ sale de la ecuación porque al haber cero clientes no es posible concluir un servicio. Se obtiene entonces:

$$P_0(t + h) = P_0(t)(1 - \lambda h) + P_1(t)(\mu h) \qquad \textbf{(18–28)}$$

Restando $P_0(t)$ a ambos lados y dividiendo entre *h:*

$$\frac{P_0(t + h) - P_0(t)}{h} = -\lambda P_0(t) + \mu P_1(t) \qquad \textbf{(18–29)}$$

En equilibrio, esta última ecuación es igual a cero si *h* tiende a cero:

$$-\lambda p_0 + \mu p_1 = 0$$

$$p_1 = \frac{\lambda}{\mu} p_0 \qquad \textbf{(18–30)}$$

Utilizando la ecuación 18-26 se obtiene:

$$p_2 = -\frac{\lambda}{\mu} p_0 + \frac{\lambda + \mu}{\mu} p_1 \qquad \textbf{(18–31)}$$

Sustituyendo p_1 por $\frac{\lambda}{\mu} p_0$:

$$p_2 = -\frac{\lambda}{\mu} p_0 + \frac{\lambda + \mu}{\mu}\left(\frac{\lambda}{\mu} p_0\right)$$

$$p_2 = \left(-\frac{\lambda\mu}{\mu^2} + \frac{\lambda^2 + \lambda\mu}{\mu^2}\right)p_0 = \frac{\lambda^2}{\mu^2} p_0 = \left(\frac{\lambda}{\mu}\right)^2 p_0$$

Si continuamos con este procedimiento, se obtiene:

$$p_n = (\lambda/\mu)^n p_0 \qquad \textbf{(18–32)}$$

Bibliografía

Feller, *W.,An Introduction to Probability Theory and Its Applications,* vol. 1, tercera edición, Nueva York, John Wiley & Sons, 1968.

Feller, W., *An Introduction to Probability Theory and Its Applications,* vol. 2, Nueva York, John Wiley & Sons, 1966.

Gross, D. y C. M. Harris, *Fundamentals of Queueing Theory,* segunda edición, Nueva York, John Wiley & Sons, 1985.

Hillier, F. y G. J. Lieberman, *Introduction to Operations Research,* quinta edición, Nueva York, McGraw-Hill, 1990.

Lee, A. M, *Applied Queueing Theory,* Nueva York, Macmillan, 1966.

Newell, G. F., *Applications of Queueing Theory,* segunda edición, Londres, Chapman & Hall, 1982.

Prabhu, N. U., *Queues and Inventories,* Nueva York, John Wiley & Sons, 1965.

Wagner, H. M., *Principles of Operations Research,* segunda edición, Englewood Cliffs, N. J., PrenticeHall, 1975.

Wolff, R. W., *Stochastic Modeling and the Theory of Queues,* Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1989.

Problemas con respuestas

18-1. En un instante cualquiera, Ace Airline tiene en servicio un agente de reservas que maneja información acerca de los itinerarios de vuelo y hace reservas. Un operador responde todas las llamadas a Ace Airline; si la persona que llama requiere información o necesita una reserva, el operador transfiere la llamada al agente de reservas. Si el agente está ocupado, el operador solicita a la persona que espere; cuando el agente se desocupa, el operador transfiere la llamada de la persona que tiene más tiempo en espera.

Suponga que las llegadas y los servicios siguen un proceso de Poisson. Las llamadas llegan a una tasa de 10 por hora y el agente de reservas puede atender una llamada en cuatro minutos en promedio (es decir, μ = 15 por hora).

a. ¿Cuál es el número promedio de llamadas en espera de ser conectadas con el agente de reservas?

b. ¿Cuál es el tiempo promedio que tiene que esperar un cliente para comunicar se con el agente de reservas?

c. ¿Cuál es el tiempo promedio para que un cliente concluya su llamada (tiempo de espera más tiempo de servicio)?

18-2. Remítase al problema 18-1. Suponga que el gerente de Ace Airline desea instalar un equipo de cómputo y un nuevo sistema de reservas. Uno de los beneficios de este sistema es que reducirá de cuatro a tres minutos el tiempo promedio para atender una llamada.

a, ¿Cuál sería el número promedio de llamadas en espera de conectarse con el agente de reservas si se instala el nuevo sistema?

b. ¿Cuál sería el tiempo medio de espera para que un cliente se comunique con el agente de reservas en el nuevo sistema?

18-3. Remítase a los problemas 18-1 y 18-2. Suponga que en lugar de reducir el tiempo pro-

-

medio para atender una llamada, el nuevo sistema reducirá la variabilidad del tiempo de servicio. La distribución del tiempo de servicio tendrá una media de cuatro minutos (igual que antes), pero ahora una desviación estándar de dos minutos.

a. ¿Cuál es el número promedio de llama das en espera de ser conectadas con el agente de reservas?

b. ¿Cuál es el tiempo promedio que debe esperar un cliente para comunicarse con el agente de reservas?

c. Suponga que el nuevo sistema pudiera reducir por completo la variabilidad en los tiempos de servicio, de manera que todas las llamadas se puedan atender exactamente en cuatro minutos. Responda *(a) y* (*b*) para este caso.

18-4. Remítase a los problemas 18-1 y 18-2. Suponga que en lugar de instalar un nuevo sistema de reservas, Ace Airline quiere contratar otro agente de reservas. De esta manera, el operador del teléfono podría transferir las llamadas al agente libre.

a. ¿Cuál sería el número promedio de llamadas en espera de comunicarse con un agente de reservas?

b. ¿Cuál sería el tiempo medio de espera para que un cliente se comunique con un agente de reservas?

18-5. Remítase al problema 18-4. Suponga que el costo de funcionamiento de la estación adicional fuera de 50 dólares diarios. Ace Airline aún no sabe si debe realizar este gasto.

a. Si el costo de buena voluntad de que un cliente espere es de 10 centavos por minuto (antes de comunicarse con el agente), ¿ se debe añadir el segundo agente?

b. ¿Con cuál costo le sería indiferente a Ace Airline añadir o no añadir el segundo agente?

c. ¿Qué hipótesis hay que hacer acerca del número esperado de llamadas en cada hora del día?

Problemas

18-6. Dos mecanógrafas tienen puestos idénticos. Ambas escriben las cartas que les dicta un gerente. Suponga que las cartas que deben mecanografiarse llegan en forma aleatoria (siguiendo un proceso de Poisson) a una tasa de tres por hora para cada mecanógrafa. Suponga que cada mecanógrafa puede escribir cuatro cartas por hora en promedio (también es un proceso de Poisson).

a. Suponiendo que cada mecanógrafa efectúa su propio trabajo, ¿cuál es el tiempo medio de espera para una carta (el tiempo que transcurre antes de que comiencen a trabajar con la carta)?

b. Suponga que se "agrupan" las dos me canógrafas; es decir, las cartas se envían a las dos y las escribe quien esté libre, según el orden de llegada. ¿Cuál es el tiempo medio de espera para una carta con esta disposición?

c. Comente acerca de este, ejemplo.

18-7. Una compañía petrolera quiere ampliar las instalaciones de descarga de su refinería de Australia. Debido a las variaciones aleatorias del clima, de las demoras de descarga y de otros factores, los buques llegan a la refinería para descargar crudo según una distribución de Poisson con tasa promedio $\lambda = 5$ buques por semana. El tiempo de servicio también es de Poisson, con tasa de servicio promedio $\mu = 10$ buques por semana.

a. ¿Cuál es la cantidad promedio de buques en espera de entregar petró leo crudo?

b. ¿Cuál es el tiempo promedio que debe esperar un buque para comenzar la en trega de su carga a la refinería?

c. ¿Cuál es el tiempo total promedio (es pera más entrega) de permanencia de un buque en la refinería?

18-8. Remítase al problema 18-7. La compañía quiere utilizar otro muelle de descarga, el

cual se puede alquilar por 5000 dólares semanales. El tiempo de servicio para este muelle también tendría distribución de Poisson, con la misma tasa $\mu = 10$ del muelle de la compañía. La compañía pierde 20 000 dólares por cada semana que un buque esté inactivo en la cola de espera.

a. Si se alquila el segundo muelle, ¿cuál sería el número promedio de buques en espera?

b. ¿Cuál sería el tiempo promedio de espera de un buque?

c. ¿El beneficio de la reducción en los tiempos de espera (en dólares) justifica el costo del alquiler del segundo muelle?

18-9. Remítase al problema 18-7. Una alternativa para mejorar las instalaciones de descarga es que la compañía alquile un dispositivo de descarga de alta velocidad. Con este dispositivo, la tasa de servicio sería de Poisson con media $\mu' = 15$ buques por semana. El costo semanal del alquiler del dispositivo es de 5000 dólares.

a. Calcule el nuevo número promedio de buques en espera si se instala el dispositivo.

b. Calcule el nuevo tiempo medio de espera para los buques.

c. ¿El beneficio de la reducción en los tiempos de espera (en dólares) justifica el costo del alquiler del dispositivo?

18-10. Remítase a los problemas 18-8 y 18-9. Un analista de la compañía, después de estudiar los costos y los beneficios de las dos modificaciones propuestas, recomienda lo siguiente: "En cada caso, el beneficio excede el costo; dispongamos entonces *tanto* de la instalación del dispositivo de descarga rápida en nuestro muelle como del alquiler del segundo muelle". Por desgracia, en este capítulo no hay fórmulas apropiadas para una cola de dos canales con tasas de servicio diferentes ($\mu_1 = 15$, $\mu_2 = 10$). Encuentre una manera de calcular un límite superior para los ahorros potenciales que se obtendrían de evitar las demoras por espera y utilice este límite para comentar acerca de la recomendación del analista.

Problemas más difíciles

18-11. Considere una cola de un solo canal con llegadas ($\lambda = 4$) y servicio ($\mu = 5$) de Poisson. La tabla 18-1 de este capítulo presenta las probabilidades de que el número de unidades en el sistema sea mayor que k, para distintos valores de k.

Suponga ahora que se evalúa un sistema en el cual llegan camiones a una zona de descarga donde el espacio sólo permite que un camión esté en servicio y dos estén en espera. Si llega otro camión, tendrá que estacionarse en doble fila en la calle y un oficial de policía multará al conductor (sin importar cuánto tiempo permanezca). ¿Puede utilizar los datos de la tabla 18-1 para estimar el número promedio de multas por hora? *Recomendación:* Considere llegadas aleatorias al sistema cuando está en "estado estable", es decir cuando la probabilidad de m unidades en el sistema no depende del momento t considerado.

18-12. El director de obras públicas de la ciudad estudia la solicitud para un nuevo puesto de inspector de construcción. La solicitud indica que se espera un aumento en las inspecciones de construcción de 118 a 154 por mes, un aumento del 30% (suponga que hay 22 días de trabajo en el mes). El departamento tiene en la actualidad cuatro inspectores y la propuesta solicita uno más, "un aumento de sólo el 25% que permitirá al departamento mantener su política de un tiempo de espera menor que un día para las solicitudes de servicios de inspección". El director sabe que en promedio se requiere medio día para que un inspector lleve a cabo una inspección y elabore su informe.

Suponiendo que las solicitudes de inspección y los servicios (inspecciones terminadas) tienen una distribución de Poisson, ¿es necesaria la otra persona para cumplir con la política del departamento?

18-13. En años recientes, muchos bancos y oficinas de correo han cambiado de un sistema en el cual hay una fila para cada cajero o punto de servicio a una sola cola de espera acordonada. Analice este cambio considerando los dos casos siguientes:

a. *Caso 1*. Los clientes llegan al banco a una tasa media de 80 por hora y se for man en una sola fila. Hay cinco cajas y la tasa promedio de servicio es de 20 por hora para cada caja. Suponiendo que las llegadas y los servicios tienen distribución de Poisson, ¿cuál es la es pera promedio en la cola?

b. *Caso 2*. Los clientes llegan a la venta nilla de servicio a una tasa de 16 por hora (hay cinco ventanillas, por lo que hay un total de 80 llegadas por hora). Hay una fila independiente para cada ventanilla (no se permite que haya cambios de una fila a otra). Al igual que en el caso 1, la tasa de servicio pa ra cada ventanilla es de 20 por hora. ¿Cuál es la espera promedio en la fila?

c. Comente acerca de los resultados de los casos 1 y 2. ¿Qué otros factores po drían afectar los tiempos de espera en una situación bancaria real?

18-14. El almacén de herramientas de una fábrica es una sala donde se almacenan herramientas especiales, guías y otro equipo que utilizan los mecánicos. Un encargado registra la entrada y la salida de equipo cuando lo solicitan o lo devuelven los mecánicos.

Suponga que los mecánicos llegan al almacén a una tasa de 60 por hora y el encargado requiere un promedio de 2.5 minutos para localizar y registrar la salida del equipo (o su llegada). A los mecánicos se les pagan 16 dólares por hora y el encargado recibe 10 dólares por hora (incluyendo prestaciones). ¿Cuántos encargados hay que contratar para hacerse cargo del almacén? Suponga que las llegadas y los servicios tienen distribución de Poisson.

18-15. Suponga que en un sistema de cola con un servidor se redefine la unidad de tiempo para que sea igual a la media del tiempo de servicio ($1/\mu$). Con base en esta definición, elabore un gráfico del tiempo medio de espera en la cola (W_q) en relación con la utilización (λ/μ). Compare su gráfico con la figura 18-1. ¿Por qué deben ser similares?

18-16. El aeropuerto internacional O'Hare de Chicago utiliza dos pistas cuando hay mucha demanda. Suponga que una de las pistas se dedica exclusivamente a despegues y la otra sólo a aterrizajes. Con este método de operación, los "tiempos de servicio" se distribuyen exponencialmente con media de dos minutos por solicitud en cada una de las pistas. Suponga que no hay interferencia entre una pista y la otra, de manera que puedan operar en forma independiente. Suponga que las solicitudes de despegue tienen distribución de Poisson con tasa de 25 por hora, y que las solicitudes de aterrizaje también siguen una distribución de Poisson con tasa de 25 por hora.

a. Calcule el número promedio de minutos de espera para atender una solicitud de despegue o aterrizaje.

b. Suponga ahora que los controladores de O'Hare pueden usar las dos pistas para ambos propósitos. Sin embargo, los requisitos de seguridad para este modo de operación prolongan el tiempo promedio de servicio de 2 a 2.16 mi nutos por solicitud (los tiempos de servicio reales están distribuidos exponencialmente, con media = 2.16 minutos). El agrupamiento de los dos flujos de llegada de solicitudes (despegues y aterrizajes) da como resultado llegadas de Poisson con tasa de 50 por hora. Calcule ahora el tiempo de espera promedio por solicitud. ¿Cuál es la mejor disposición: sistemas separados o un sistema agrupado?

18-17. Santa Clon Transit System (SCTS) tiene 380 autobuses. En promedio, cada autobús requiere mantenimiento (programado y no programado) una vez por mes. El tiempo de mantenimiento promedio es de dos horas.

SCTS tiene cinco mecánicos para efectuar el mantenimiento, cada uno de los cuales trabaja 160 horas al mes. Suponga que las llegadas (es decir, la necesidad de mantenimiento) y los servicios son procesos de Poisson.

a. ¿Cuál es el tiempo promedio que tiene que esperar un autobús para que comience su mantenimiento?

b. ¿Cuál es el número promedio de autobuses que están fuera de servicio en un instante determinado (es decir, en espera o en servicio)?

c. Suponga que un analista observa al azar el número de autobuses fuera de servicio y este número es 95. ¿A qué podría deberse la discrepancia entre esta observación y su respuesta de (*b*)?

18-18. Considere la cola *M*/G/1.

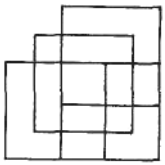
a. Cuando los servicios son de Poisson, la desviación estándar de la distribución de los tiempos de servicio es ($1/\mu$). Use esto para demostrar que la ecuación 18-9 equivale a la ecuación 18-6 para el caso de los servicios de Poisson.

b. Remítase al problema 18-7. Suponga que la tasa promedio de servicio es aún de 10 por semana, pero que no hay variación en el tiempo de servicio; es decir, se requieren exactamente 0.10 semanas para descargar cada buque. Determine la espera promedio de un buque y el número promedio de buques en espera.

c. Remítase de nuevo al problema 18-7. Suponga ahora que el tiempo de servicio para descargar un buque tiene una distribución normal con tiempo medio de servicio de 0.10 semanas y desviación estándar de 0.05 semanas. Calcule el tiempo de espera promedio y la longitud promedio de la cola para este caso.

d. Compare los resultados de *(b) y* (*c*) con lo que obtuvo en el problema 18-7.

CAPÍTULO 19



Simulación

En los últimos años se han desarrollado técnicas para probar los resultados de algunas decisiones empresariales antes de que se pongan en práctica, a través de la simulación en un computador de los procesos empresariales reales que se anticipan. Los computadores tienen la ventaja de que pueden manipular grandes cantidades de datos con rapidez; sin embargo, el procedimiento básico de una simulación es independiente de la manera como se realicen los cálculos.

En términos generales, cualquier modelo de un problema de decisión empresarial podría denominarse un modelo de simulación, ya que representa o simula algunos aspectos del problema real. Por ejemplo, se podría diseñar un modelo de programación lineal para que represente un problema de composición de productos o un problema de planificación de transporte. A los modelos del capítulo 2 y los que se presentan en este capítulo los denominaremos *modelos de simulación* y estos modelos difieren en dos aspectos de los que se consideraron en otras partes del libro:

1. Los modelos de simulación normalmente no se diseñan para encontrar soluciones óptimas o mejores, como se hace en la programación lineal y en el análisis de decisiones. En su lugar, se evalúan diversas alternativas propuestas y se toma una decisión con base en la comparación de los resultados. En otras palabras, se evalúa el rendimiento de un sistema previamente especificado.
2. Los modelos de simulación generalmente se centran en las operaciones detalladas, ya sean físicas o financieras, del sistema. El sistema se estudia mientras opera durante el tiempo y se incluyen los efectos de los resultados de un periodo en el siguiente.

Para ilustrar estas diferencias, considere la construcción de un modelo de una fábrica que elabora una serie de productos. Un modelo de programación lineal podría desarrollar la combinación óptima de productos. Un modelo de simulación más detallado podría tratar los aspectos específicos de cómo se programaría la fábrica para obtener la combinación de productos deseada, teniendo en cuenta los tiempos de preparación de las máquinas, el tiempo de espera antes del procesa-

miento y otros detalles que no pueden incluirse en la formulación de la programación lineal.

Los modelos de caso del capítulo 2 son ejemplos de simulaciones *deterministas.* Estos modelos se trataron con detalle en dicho capítulo y por lo tanto no se considerarán más. Más bien, se usarán ejemplos de simulaciones de sistemas de colas, modelos de inventarios y modelos de análisis de riesgo para ilustrar el caso *probabilístico,* conocido también como simulación de Montecarlo.

Simulación probabilistica

En muchas situaciones la incertidumbre es un factor clave en las operaciones del sistema y es importante tener presente esta aleatoriedad en el modelo. Los problemas de cola de espera, como los que se presentaron en el capítulo anterior, pueden analizarse con la construcción de uno de estos modelos de simulación. Cuando es posible, es preferible resolver el modelo con métodos matemáticos. Sin embargo, hay muchas situaciones de colas (y otras) que no se pueden resolver matemáticamente con facilidad y, por ello, se acude a la simulación.

Ejemplo 1 Considere un almacén con un andén para descargar vagones de ferrocarril. Los vagones de carga llegan al almacén durante la noche. Se requiere exactamente medio día para descargar un vagón. Si hay más de dos vagones en espera de descarga, se pospone la descarga de algunos hasta el día siguiente.

La experiencia anterior indica que el número de vagones que llega durante la noche tiene las frecuencias que se muestran en la tabla 19-1. Además, no hay un patrón aparente, por lo que el número que llega una noche es independiente del número que llega en otra.

Se trata de un problema de colas de un canal con tasa promedio de servicio de dos por día y tasa promedio de llegadas de 1.5 por día. Sin embargo, se puede ver que las llegadas no siguen una distribución de Poisson; por lo tanto, no se

Tabla 19-1

Número de vagones que llegan	*Frecuencia relativa*
0	0.23
1	0.30
2	0.30
3	0.10
4	0.05
5	0.02
6 o más	0.00
	1.00

Promedio = 1.5 vagones por noche

puede aplicar ninguno de los modelos de colas que se presentaron en el capítulo anterior.

El primer paso para simular el proceso de colas es generar una historia o series de tiempos de las llegadas para varias noches. Esto se hace con un proceso aleatorizado o de **Montecarlo.** Una manera de hacerlo consiste en tomar 100 fichas y escribir el número 0 en 23 de ellas, el número 1 en 30, el número 2 en 30 fichas, etcétera, correspondiendo **a** las frecuencias de la tabla 19-1. Después se puede extraer una ficha de un sombrero y el número en la ficha indicaría el número de vagones de carga que llegan en el periodo de la simulación.

Un procedimiento más sencillo es usar una tabla de números aleatorios, como la tabla 19-2. Cada entrada que aparece en la tabla se obtuvo de manera que cada dígito (cero a nueve) tuviera la misma probabilidad de extracción.

Después se pueden asignar números aleatorios de dos dígitos a cada uno de los resultados posibles (es decir, el número de llegadas), como se muestra en la tabla 19-3.

Hay cien pares de números de dos dígitos. Observe que 23 de ellos se asignan al suceso "llegada de cero vagones"; 30 a "llegada de un vagón"; 30 a "llegada de dos vagones"; etcétera. Como cada número de dos dígitos tiene 1/100 de probabilidad de aparecer, la probabilidad de que ocurra el suceso "llegada de cero vagones" es 23/100, o 23%, como se desea.

Ahora estamos preparados para simular el proceso de cola, lo cual se realiza en la tabla 19-4.

Se usan tres días para iniciar el proceso (marcados con *x).* El número aleatorio (de la Tabla 19-2) para el primer día es 97. Como 97 corresponde al suceso"llegada de cuatro vagones" de la tabla 19-3, se marca cuatro en la tercera columna. De estos cuatro vagones, se descargan dos y la descarga de los otros dos se pospone hasta el día siguiente. El número aleatorio para el segundo día es 02 (también de la Tabla 19-2). Esto significa que no llegan vagones y se descargan los dos vagones del día anterior. Continúa el procedimiento. Sin embargo, no se cuentan los resultados de los primeros tres días, ya que se trata del **periodo de inicialización.** La simulación comienza sin vagones de ferrocarril, lo cual no es una situación típica. El periodo de inicialización permite que la simulación llegue a su comportamiento típico o de "estado estable" antes de contar los resultados.

La tabla 19-4 simula 50 días de operación (además de los tres días iniciales). En la mayor parte del periodo hay poca demora; pero hay una demora considerable que comienza alrededor del periodo 36. El número promedio de llegadas por día (1.58) durante el periodo de muestra de 50 días es un poco mayor que el número esperado por día (1.50). En promedio se atrasan 0.90 vagones por día. La simulación debe efectuarse para más días con el propósito de que los resultados sean, más precisos.

Se puede emplear el modelo de simulación como se usaron los modelos matemáticos de colas de espera. Es decir, se puede comparar el efecto de las alternativas factibles sobre el tiempo de espera y el costo. Por ejemplo, en este caso se pueden comparar las demoras con la tasa actual de servicio de dos por día con una tasa de servicio de tres por día. Otra opción sería introducir más canales.

Tabla 19-2 Tabla de dígitos aleatorios

97	95	12	11	90	49	57	13	86	81
02	92	75	91	24	58	39	22	13	02
80	67	14	99	16	89	96	63	67	60
66	24	72	57	32	15	49	63	00	04
96	76	20	28	72	12	77	23	79	46
55	64	82	61	73	94	26	18	37	31
50	02	74	70	16	85	95	32	85	67
29	53	08	33	81	34	30	21	24	25
58	16	01	91	70	07	50	13	18	24
51	16	69	67	16	53	11	06	36	10
04	55	36	97	30	99	80	10	52	40
86	54	35	61	59	89	64	97	16	02
24	23	52	11	59	10	88	68	17	39
39	36	99	50	74	27	69	48	32	68
47	44	41	86	83	50	24	51	02	08
60	71	41	25	90	93	07	24	29	59
65	88	48	06	68	92	70	97	02	66
44	74	11	60	14	57	08	54	12	90
93	10	95	80	32	50	40	44	08	12
20	46	36	19	47	78	16	90	59	64
86	54	24	88	94	14	58	49	80	79
12	88	12	25	19	70	40	06	40	31
42	00	50	24	60	90	69	60	07	86
29	98	81	68	61	24	90	92	32	68
36	63	02	37	89	40	81	77	74	82
01	77	82	78	20	72	35	38	56	89
41	69	43	37	41	21	36	39	57	80
54	40	76	04	05	01	45	84	55	11
68	03	82	32	22	80	92	47	77	62
21	31	77	75	43	13	83	43	70	16
53	64	54	21	04	23	85	44	81	36
91	66	21	47	95	69	58	91	47	59
48	72	74	40	97	92	05	01	61	18
36	21	47	71	84	46	09	85	32	82
55	95	24	85	84	51	61	60	62	13
70	27	01	88	84	85	77	94	67	35
38	13	66	15	38	54	43	64	25	43
36	80	25	24	92	98	35	12	17	62
98	10	91	61	04	90	05	22	75	20
50	54	29	19	26	26	87	94	27	73

Tabla 19-3

Número de vagones que llegan	*Dígitos aleatorios*	*Frecuencia relativa*
0	00 a 22	0.23
1	23 a 52	0.30
2	53 a 82	0.30
3	83 a 92	0.10
4	93 a 97	0.05
5	98 y 99	0.02
		1.00

Tabla 19-4 Simulación del sistema de cola

Número de día	*Número aleatorio*	*Número de llegadas*	*Número total para descarga*	*Número de vagones descargados*	*Número demorado hasta el día siguiente*
x	97	4	4	2	2
x	02	0	2	2	0
x	80	2	2	2	0
1	66	2	2	2	0
2	96	4	4	2	2
3	55	2	4	2	2
4	50	1	3	2	1
5	29	1	2	2	0
6	58	2	2	2	0
7	51	1	1	1	0
8	04	0	0	0	0
9	86	3	3	2	1
10	24	1	2	2	0
11	39	1	1	1	0
12	47	1	1	1	0
13	60	2	2	2	0
14	65	2	2	2	0
15	44	1	1	1	0
16	93	4	4	2	2
17	20	0	2	2	0
18	86	3	3	2	1
19	12	0	1	1	0
20	42	1	1	1	0
21	29	1	1	1	0
22	36	1	1	1	0
23	01	0	0	0	0

(continúa)

Tabla 19-4 *(conclusión)*

Número de día	*Número aleatorio*	*Número de llegadas*	*Número total para descarga*	*Número de vagones descargados*	*Número demorado hasta el día siguiente*
24	41	1	1	1	0
25	54	2	2	2	0
26	68	2	2	2	0
27	21	0	0	0	0
28	53	2	2	2	0
29	91	3	3	2	1
30	48	1	2	2	0
31	36	1	1	1	0
32	55	2	2	->	0
33	70	2	2	*2*	0
34	38	1	1	1	0
35	36	1	1	1	0
36	98	5	5	2	3
37	50	1	4	2	2
38	95	4	6	2	4
39	92	3	7	2	5
40	67	2	7	2	5
41	24	1	6	2	4
42	76	2	6	2	4
43	64	2	6	2	4
44	02	0	4	2	2
45	53	2	4	2	2
46	16	0	2	2	0
47	16	0	0	0	0
48	55	2	2	2	0
49	54	2	2	2	0
50	23	1	1	1	0
Totales		79			45
Promedio		1.58			0.90

Simulación y computadores

Los cálculos de la tabla 19-4 son tediosos y en una aplicación real se llevarían a cabo en un computador. La implantación más sencilla en un computador se realizaría con una hoja de cálculo; muchos de estos programas tienen la capacidad de generar números aleatorios. El apéndice 2 de este capítulo muestra algunas técnicas de simulación para hojas de cálculo; además, hay programas complementarios a las hojas de cálculo que facilitan la simulación de Montecarlo.[1] También

[1] Véase, por ejemplo, el programa ORISK (Newfield, N. Y., Palisade Corp., 1990).

hay lenguajes de computación de uso general (por ejemplo, GPSS, SIMSCRIPT y SLAM) que incluyen rutinas para tratar diversos detalles que son comunes en la mayoría de las simulaciones. Por último, si así se desea, es posible programar una simulación "desde cero" en cualquier lenguaje de computación.

En lo que queda del capítulo continuaremos con la presentación de los conceptos mediante la simulación manual, para así comunicar las ideas con mayor claridad.

Simulación y control de inventarios

La simulación no sólo se aplica a procesos de colas: se han simulado muchas fases de las operaciones empresariales con buenos resultados. Ilustraremos a continuación, con un ejemplo breve, cómo se aplica la simulación a la resolución de un problema de inventarios.

Ejemplo 2 Suponga que la demanda semanal de un producto tiene la distribución que se muestra en la tabla 19-5.

Cuando se formula un pedido para reabastecer el inventario, hay una demora de entrega, la cual es una variable aleatoria como se muestra en la tabla 19-6.

Tabla 19-5 Distribución de probabilidad para la demanda semanal

Cantidad demandada	*Probabilidad*	*Números aleatorios asignados*
0	0.10	00 a 09
1	0.40	10 a 49
2	0.30	50 a 79
3	0.20	80 a 99
	1.00	

Tabla 19-6 Distribución de probabilidad para la demora de entrega

Número de semanas desde el pedido hasta la entrega	*Probabilidad*	*Números aleatorios asignados*
2	0.20	00 a 19
3	0.60	20 a 79
4	0.20	80 a 99
	1.00	

Tabla 19-7 Ejemplo de simulación de inventarios

Número de semana	*Recep-ciones*	*Inventario inicial* **10**	*Número aleatorio* **37**	*Ventas (uni-dades)* **1**	*Inventario final* **9**	*Ventas perdidas (escasez)*	*Pedidos*	*Número aleatorio para pedidos*	*Número de semanas para que llegue el pedido*
x									
x		**9**	**51**	**2**	**7**				
x		**7**	**68**	**2**	**5**		**15**	**45**	3
x		**5**	**83**	**3**	**2**				
x		**2**	**56**	**2**	**0**				
0	**15**	**15**	**11**	**1**	**14**				
1		**14**	**91**	**3**	**11**				
2		**11**	**99**	**3**	**8**				
3		**8**	**57**	**2**	**6**				
4		**6**	**28**	**1**	**5**		**15**	**61**	3
5		**5**	**70**	**2**	**3**				
6		**3**	**33**	**1**	**2**				
7	**15**	**17**	**91**	**3**	**14**				
8		**14**	**67**	**2**	**12**				
9		**12**	**97**	**3**	**9**				
10		**9**	**61**	**2**	**7**				
11		**7**	**11**	**1**	**6**				
12		**6**	**50**	**2**	**4**		**15**	**86**	4
13		**4**	**25**	**1**	**3**				
14		**3**	**06**	**0**	**3**				
15		**3**	**60**	**2**	**1**				
16	**15**	**16**	**80**	**3**	**13**				
17		**13**	**19**	**1**	**12**				
18		**12**	**88**	**3**	**9**				
19		**9**	**25**	**1**	**8**				
20		**8**	**24**	**1**	**7**				
21		**7**	**68**	**2**	**5**		**15**	**37**	3
22		**5**	**78**	**2**	**3**				
23		**3**	**37**	**1**	**2**				
24	**15**	**17**	**04**	**0**	**17**				
25		**17**	**32**	**1**	**16**				
26		**16**	**75**	**2**	**14**				
27		**14**	**21**	**1**	**13**				
28		**13**	**47**	**1**	**12**				
29		**12**	**40**	**1**	**11**				
30		**11**	**71**	**2**	**9**				
31		**9**	**85**	**3**	**6**				
32		**6**	**88**	**3**	**3**		**15**	**15**	2
33		**3**	**24**	**1**	**2**				
34	**15**	**17**	**61**	**2**	**15**				
35		**15**	**19**	**1**	**14**				
36		**14**	**90**	**3**	**11**				

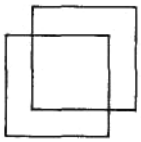
Tabla 19-7 *(conclusión)*

Número de semana	*Recepciones*	*Inventario inicial*	*Número aleatorio*	*Ventas (unidades)*	*Inventario final*	*Ventas perdidas (escasez)*	*Número aleatorio para Pedidos pedidos*	*Numero de semanas para que llegue el pedido*
37		11	24	1	10			
38		10	16	1	9			
39		9	32	1	8			
40		8	72	2	6			
Totales		412				0		
Promedio		10.3						

Nos gustaría determinar una cantidad de pedido, Q, y un punto de pedido, R. Esto se puede hacer si se ensaya con varios valores de Q y R y se lleva a cabo la simulación para determinar la mejor opción.

En la tabla 19-7 se presenta un ejemplo con $Q = 15$ y $R = 5$. Observe que se establece un inventario inicial de 10 y se emplean cinco semanas para la inicialización antes de contar los resultados. Se supone que no se aceptan pedidos atrasados. Si se establecieran los costos de pedidos, de almacenamiento de inventario y de inexistencias, se podría estimar el costo del sistema de inventario con la regla $Q = 15$ y $R = 5$, para después compararlo con el costo de reglas alternativas. Por ejemplo, se podrían emplear las fórmulas para la cantidad óptima de pedido y el punto óptimo de pedido (ecuaciones 16-1 y 16-2, del capítulo 16), aunque no se cumplan en el ejemplo las hipótesis necesarias para estas fórmulas (el tiempo de entrega del reabastecimiento no es constante). Con la simulación se puede estimar la cantidad de error que introduce el uso de las fórmulas. Muchas veces, un método de solución puede ser útil para fines operativos incluso si no puede aplicarse estrictamente en forma teórica.

RESUMEN



Los modelos probabilísticos de simulación incluyen variables aleatorias para sucesos inciertos. Los números aleatorios se asignan de acuerdo con las probabilidades de los sucesos inciertos y se emplea el proceso de Montecarlo para generar una historia de sucesos para simular el sistema en estudio. Los sistemas de colas e inventarios son ejemplos de aplicaciones de simulaciones probabilísticas.

Análisis de riesgo

Considere la decisión acerca de invertir capital de gran magnitud, como sería la introducción de un producto nuevo. La rentabilidad de la inversión depende de varios factores que por lo general son inciertos. Las estimaciones del mercado total para el producto, la cuota de mercado que puede obtener la empresa, el crecimiento del mercado, el costo de producción del producto, el precio de venta,

la vida del producto, e incluso el costo del equipo necesario, generalmente están sujetos a un alto grado de incertidumbre.

Un método común consiste en hacer "mejores estimaciones" puntuales para cada uno de los factores de incertidumbre y luego calcular una medida de la rentabilidad. Este procedimiento tiene dos inconvenientes:

1. No hay garantía de que las "mejores estimaciones" proporcionen la verdadera rentabilidad esperada del proyecto.
2. No hay forma de medir el riesgo asociado con la inversión. En particular, el gerente no puede determinar la probabilidad de perder dinero o la de obtener grandes beneficios. Por ejemplo, si se emplea el método de un solo número como estimación, un gerente no podría distinguir los dos proyectos que se muestran en la figura 19-1. Pero esta información es necesaria si se aplican técnicas relacionadas con el riesgo, como las medidas de la utilidad del capítulo 6.

El análisis de riesgo es una técnica diseñada para eliminar estos inconvenientes. El método general consiste en asignar una distribución de probabilidad subjetiva a cada factor desconocido y combinarlos por medio del método de Montecarlo, para formar una distribución de probabilidad para la rentabilidad del proyecto global. Este procedimiento se puede ilustrar con un ejemplo sencillo.

Ejemplo 3 Suponga que se lanza al mercado un producto nuevo. La inversión que se requiere es de 5000 dólares y hay tres factores inciertos: precio de venta, costo variable y volumen anual de ventas. El producto tiene una vida de solamente un año. La tabla 19-8 contiene los distintos niveles posibles para estos factores, así como una estimación de la probabilidad de cada uno. Supondremos que los factores de la

Figura 19-1 Comparación de dos proyectos

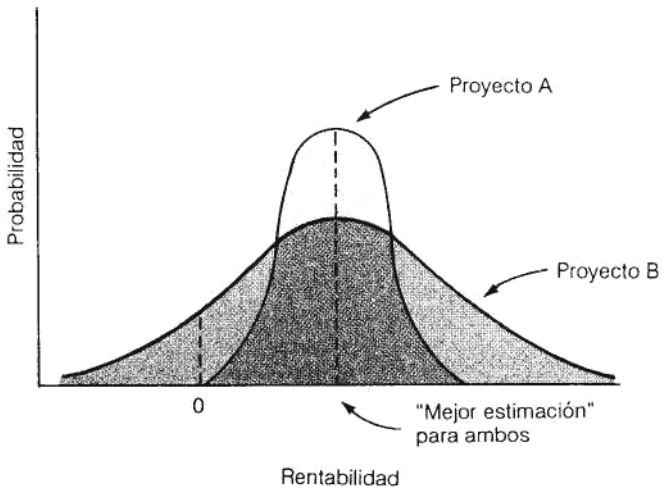


tabla 19-8 son estadísticamente *independientes* (esta suposición es importante, ya que de no ser cierta habría que modificar la simulación para considerar la dependencia probabilistica apropiada).

Como se trata de un ejemplo sencillo, es posible utilizar las técnicas del árbol de decisión y el árbol de probabilidades del capítulo 4 para calcular los resultados y las probabilidades. En este caso sólo hay $3 \cdot 3 \cdot 3 = 27$ resultados posibles, pero un problema más realista, con varios factores inciertos, cada uno con 10 o 20 niveles, podría tener un millón de resultados posibles. En estas circunstancias, la técnica de simulación puede ser muy útil para estimar la rentabilidad promedio de la inversión y lo "arriesgado" de ella, de acuerdo con la probabilidad de lograr distintos niveles de beneficio.

Lo primero que se requiere es una forma de generar valores aleatorios para los elementos de la tabla 19-8, de acuerdo con las probabilidades indicadas. Como se hizo antes, se relacionan diversos números aleatorios con los resultados posibles, como se observa en la tabla 19-9.

Ahora puede comenzar la simulación. Se generan números aleatorios de un solo dígito a partir de la tabla de números aleatorios (Tabla 19-2) y se determinan un precio, un costo y un volumen. Una vez que se han determinado estos elementos, el beneficio se calcula de la siguiente manera:

$$\text{Beneficio} = (\text{Precio} - \text{Costo}) \cdot \text{Volumen} - \$5000$$

Después se repite el proceso muchas veces para generar un gran número de resultados de beneficio. En la tabla 19-10 se presenta una muestra de 25 ensayos. Observe que en la simulación del tipo de análisis de riesgo, cada ensayo es independiente de los demás; por lo tanto, no se requiere periodo de inicialización.

Tabla 19-8 Factores en el ejemplo de análisis de riesgo

Precio de venta	*Probabilidad*	*Costo variable*	*Probabilidad*	*Volumen de ventas (unidades)*	*Probabilidad*
$4	0.3	$2	0.1	3000	0.2
5	0.5	3	0.6	4000	0.4
6	0.2	4	0.3	5000	0.4

Tabla 19-9 Asignaciones de números aleatorios en el ejemplo de análisis de riesgo

Precio de venta	*Números aleatorios*	*Costo variable*	*Números aleatorios*	*Volumen de ventas (unidades)*	*Números aleatorios*
$4	0-2	$2	0	3000	0, 1
5	3-7	3	1-6	4000	2-5
6	8,9	4	7-9	5000	6-9

Tabla 19-10 Ejemplo de análisis de riesgo: 25 ensayos

Ensayo	*Número aleatorio*	*Precio*	*Número aleatorio*	*Costo*	*Número aleatorio*	*Volumen (miles de unidades)*	*Beneficio (miles de dólares)*
1	8	$6	0	$2	6	5	15
2	0	4	4	3	3	4	-1
3	6	5	3	3	2	4	3
4	1	4	4	3	0	3	-2
5	3	5	6	3	0	3	1
6	5	5	6	3	9	5	5
7	1	4	6	3	7	5	0
8	3	5	8	4	6	5	0
9	2	4	8	4	8	5	-5
10	1	4	6	3	1	3	-2
11	5	5	7	4	3	4	-1
12	9	6	9	4	6	5	5
13	4	5	9	4	7	5	0
14	7	5	2	3	6	5	5
15	9	6	5	3	3	4	7
16	0	4	5	3	0	3	-2
17	1	4	1	3	8	5	0
18	0	4	6	3	4	4	-1
19	8	6	8	4	6	5	5
20	9	6	2	3	4	4	7
21	0	4	7	4	7	5	-5
22	0	4	0	2	8	5	5
23	4	5	0	2	1	3	4
24	6	5	5	3	8	5	5
25	4	5	0	2	1	3	4
						Promedio = 2.08	

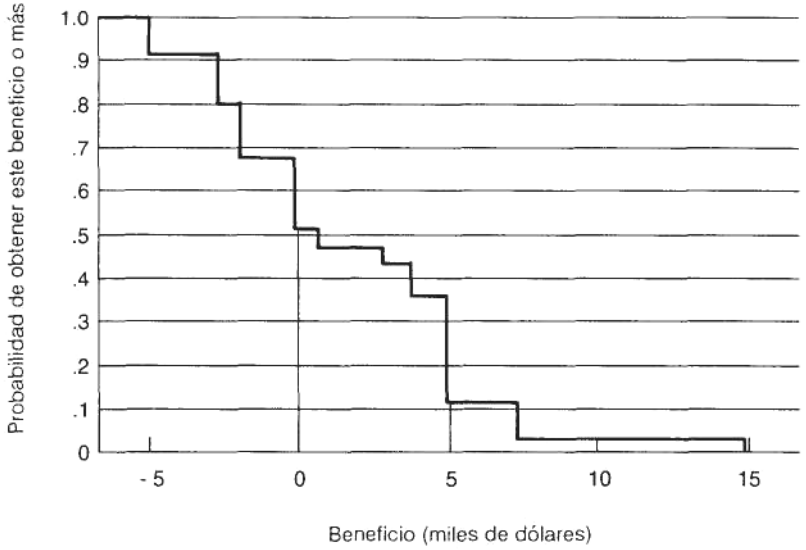
Veinticinco ensayos no son suficientes para hacer una estimación precisa de la rentabilidad promedio o de la distribución de probabilidad de los beneficios. Si el proceso se programara en un computador, sería fácil simular cientos de ensayos. Sin embargo, con fines ilustrativos, basaremos nuestro análisis en los resultados de los 25 ensayos.

Observe que el beneficio promedio es de 2.08 millares o 2080 dólares. Es interesante comparar esto con los métodos de análisis más sencillos. Por ejemplo, si se hubiera usado el método de una sola estimación y se hubiera utilizado el valor más probable para cada factor, nuestra estimación del beneficio habría sido:

$$\text{(Beneficio más probable)} = (\$5 - \$3) \cdot (4000) - \$5000 = \$3000$$

Por lo tanto, el método de una sola estimación excede considerablemente en este caso la rentabilidad esperada de la inversión.

Figura 19-2 Análisis de riesgo (función de probabilidad acumulada de la muestra)



Como se trata de un caso sencillo, puede realizarse el cálculo del beneficio esperado (el beneficio de cada uno de los 27 resultados posibles, ponderado por las probabilidades);[2] este beneficio esperado es de 2140 dólares. Por lo tanto, como podría esperarse, el promedio muestral de los 25 ensayos no es precisamente igual al beneficio esperado. Sin embargo, el cálculo del beneficio esperado no aclara nada acerca del *riesgo* asociado con la inversión, mientras que el conjunto de 25 resultados indica claramente que pueden obtenerse pérdidas (por ejemplo, el ensayo 2 de la Tabla 19-10).

Una manera conveniente de representar los resultados del análisis de riesgo es elaborar una lista de los resultados clasificados por rentabilidad y dibujar un gráfico de la función de probabilidad acumulada de la muestra (véase Fig. 19-2). A partir de la figura 19-2 se observa que hay un 68 % de probabilidad de que el beneficio sea de cero o más (y un 32 % de incurrir en una pérdida); hay un 36 % de probabilidad de obtener 5000 dólares o más y no existe la posibilidad de lograr más de 15 000 dólares. Si se simularan más ensayos, la curva de la figura 19-2 se suavizaría un poco (aunque seguiría con forma de escalera, ya que hay un número finito de resultados posibles).

[2] En este caso, como los factores son independientes y se relacionan con multiplicaciones y sumas, se puede calcular el beneficio esperado a partir de los valores esperados del precio, del costo y del volumen (véase Cap. 4). Pero si estos elementos no se relacionaran en forma lineal ni fueran independientes, habría que evaluar todo el conjunto de ramas del árbol de probabilidades.

RESUMEN

El análisis de riesgo es una aplicación de la simulación, para evaluar proyectos de inversión. Se evalúan las distribuciones de probabilidad de factores inciertos que existen en el proyecto y se combinan, a través del proceso de Montecarlo, para obtener la distribución de probabilidad para la rentabilidad del proyecto global.

Simulación con distribuciones continuas de probabilidad

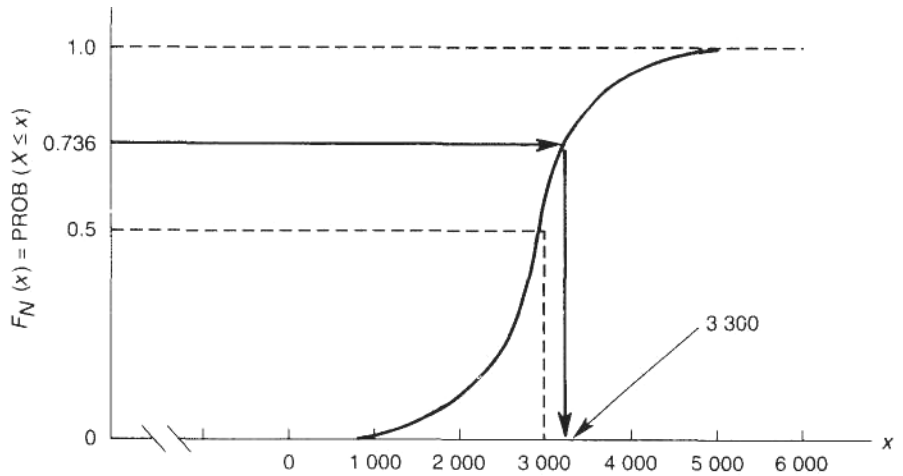
En el ejemplo anterior del análisis de riesgo, las variables aleatorias eran discretas (es decir, el precio de venta sólo asumía tres valores distintos: cuatro, cinco y seis dólares). En algunos casos nos gustaría suponer que los elementos son variables aleatorias que se obtienen de una distribución continua de probabilidad. Suponga, por ejemplo, que creemos que el volumen anual de ventas del ejemplo de análisis de riesgo se distribuye normalmente, con media $\mu = 3000$ unidades y desviación estándar $\sigma = 500$ unidades. ¿Cómo se generarían valores aleatorios del volumen de ventas para la simulación?

Método gráfico

Una manera de generar variables aleatorias a partir de una distribución continua es representar gráficamente la función de distribución acumulada (véase Cap. 7). En la figura 19-3 se muestra la función de distribución acumulada para la distribución normal que se acaba de mencionar.

Para poder utilizar la función de distribución acumulada, lo primero es usar una tabla de números aleatorios (como la Tabla 19-2) para generar un decimal aleatorio

Figura 19-3 Distribución normal acumulada ($\mu = 3000$, $\sigma = 500$)



aleatorio entre 0 y 1. Esto se logra tomando tres números aleatorios de la tabla 19-2 y colocando el punto decimal antes de los números. Por ejemplo, si se extraen los números 7, 3 y 6, el decimal correspondiente sería 0.736.

Después, la curva acumulada de la figura 19-3 *se registra en el eje vertical* en el punto correspondiente al valor decimal (0.736 en el ejemplo). Dibuje una línea horizontal hasta la curva acumulada y cuando la línea de la altura 0.736 se encuentre con la curva, dibuje una línea directamente hacia abajo hasta el eje horizontal. Lea entonces el valor que se alcanzó. Éste será el valor aleatorio específico que se desea. En este caso, el valor es aproximadamente 3300.

Este método para generar valores aleatorios funciona porque la elección de un decimal aleatorio entre 0 y 1 equivale a escoger un *porcentaje* aleatorio de la distribución. La cifra se usa entonces para convertir el porcentaje aleatorio (en el ejemplo, el porcentaje de 73.6) en un valor específico (3300). El método es general y puede usarse con *cualquier* distribución de probabilidad acumulada, sea continua o discreta.

En el caso de una variable aleatoria normal, el proceso que se acaba de describir se puede efectuar con las tablas de la distribución normal estandarizada (véase la Tabla A al final del libro). Se toma el decimal aleatorio 0.736 y se busca en la tabla el valor Z correspondiente: Z = 0.63. Entonces, la estimación aleatoria del volumen de ventas es:

$$\text{Volumen de ventas} = \mu + Z\sigma = 3000 + 0.63(500) = 3315 \text{ unidades}$$

En ocasiones es posible realizar el proceso anterior en forma algebraica. Véase el apéndice 1 que aparece al final del capítulo para conocer el método algebraico.

Generación de variables aleatorias por computador

Hay programas de computación que permiten generar decimales aleatorios de "igual probabilidad" entre 0 y 1. Además, los computadores incluyen rutinas para generar variables aleatorias normales estandarizadas Z ($\mu = 0$, $\sigma = 1$), a partir de las cuales se pueden generar valores para variables aleatorias normales con parámetros dados, si se realiza la transformación:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

para que $X = \mu + Z\sigma$, como se mostró antes.

Una manera sencilla de generar una variable aleatoria que se aproxime a una variable normal estandarizada es sumar 12 decimales aleatorios de "igual probabilidad" entre 0 y 1 y luego restar 6. Se puede demostrar que la media de la variable resultante es 0 y que la varianza es 1; como se suman 12 observaciones independientes para producir la variable, el "teorema central del límite" de la estadística hace que su distribución sea aproximadamente normal.

RESUMEN La simulación se puede efectuar con variables aleatorias continuas en forma gráfica, por consulta de tablas o por computador, si se emplea la distribución de probabilidad acumulada apropiada.

Simulación de sistemas complejos

Aunque la simulación es una herramienta útil para tratar problemas de colas, inventarios, análisis de riesgo y otros, su mayor contribución es quizás en el análisis de sistemas complejos. Muchos problemas de la vida real comprenden sistemas formados por muchos componentes interrelacionados; el sistema puede ser dinámico y cambiante con el tiempo y puede incluir sucesos inciertos o probabilísticos. La simulación puede ser la única técnica para el análisis cuantitativo de estos problemas.

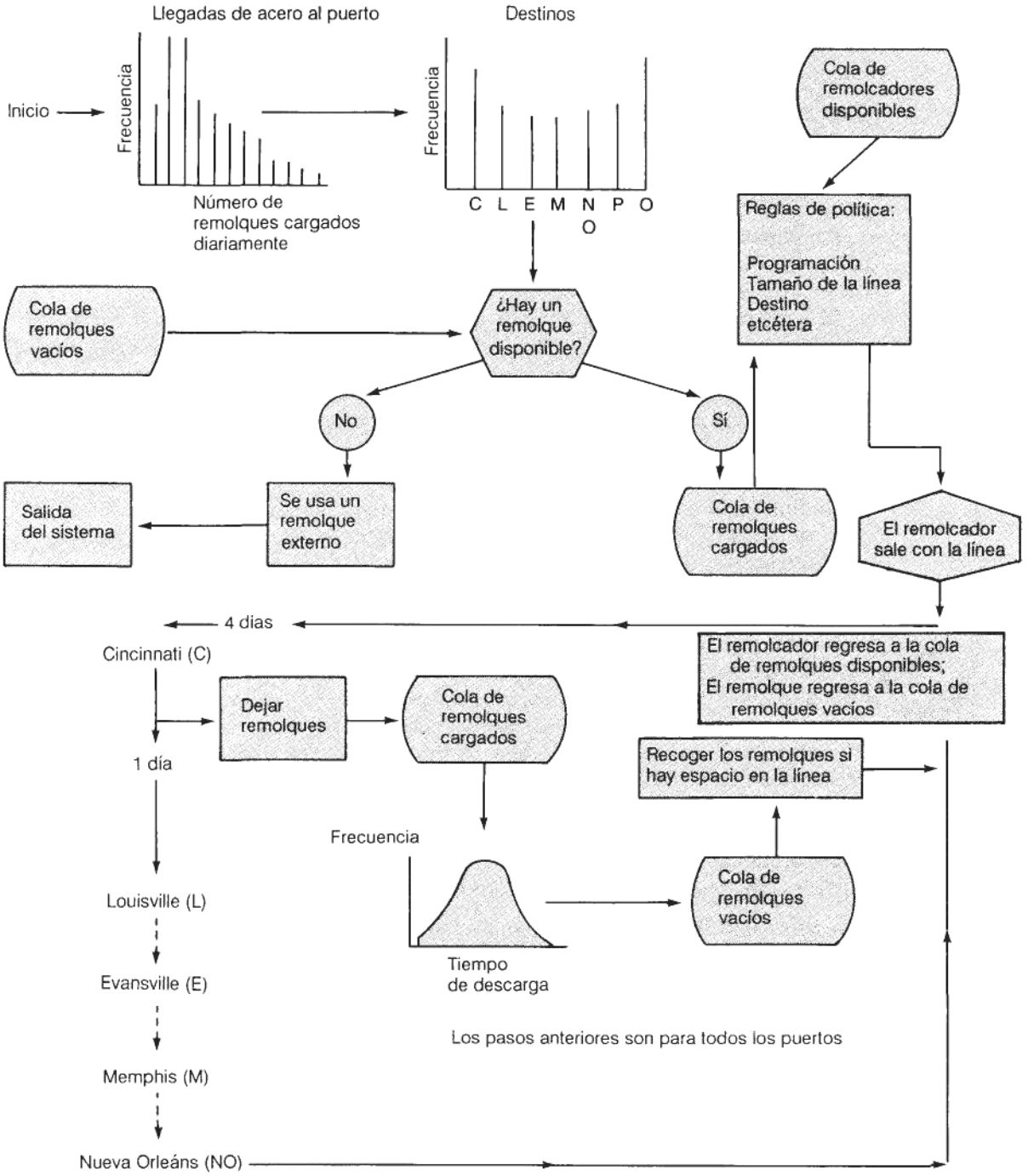
Usaremos un ejemplo para ilustrar la aplicación de la simulación en estos problemas. Considere la operación de una línea de remolcadores por los ríos Ohio-Mississippi.[3] La compañía de remolcadores es susbsidiaria de una compañía de acero y recibe cargas de acero en la ciudad de Pittsburgh, para luego enviarlas por el río a distintos puertos ubicados en el río y en la costa del Golfo de México. La figura 19-4 presenta un esquema de las operaciones del sistema. Las cargas de los remolcadores llegan al puerto de Pittsburgh de manera aleatoria, de acuerdo con la distribución de probabilidad de la figura 19-4. El destino de los remolcadores también varía ocasionalmente, lo cual se indica con la distribución de frecuencias de la figura. Si hay un remolcador disponible, se carga el acero; de lo contrario, deberá enviarse a través de otra compañía de remolcadores (es decir, externa). Un remolcador comenzará con una línea de remolques cargados (el tamaño de la línea está restringido por el tamaño de las esclusas del río). En cada puerto se dejan los remolques destinados para dicho lugar. En Nueva Orleáns, los remolques destinados a los puertos de Pascagoula (P) y Orange (O), en el Golfo de México, se transfieren a otra línea y el remolcador regresa para recoger los remolques vacíos. Éstos están disponibles después de cierto periodo (para la descarga), lo cual es un suceso aleatorio. Al regresar a su puerto de origen, el remolcador vuelve a la cola de remolcadores disponibles (después de un periodo para reabastecimiento, reparaciones, etc.) y los remolques entran a la cola de remolques vacíos, listos para ingresar de nuevo en el sistema.

La compañía tiene cuatro remolcadores y 127 remolques, los cuales pueden estar dispersos por el sistema en cualquier instante.

Se ha elaborado y programado en un computador un modelo de simulación de este sistema. Los elementos probabilísticos (llegadas de acero, destinos de los remolques y tiempos de descarga) se incorporan por medio de la técnica de simulación de Montecarlo. El modelo del computador también debe llevar un registro del tiempo en el sistema; rastrear los remolcadores, los remolques y las limitaciones físicas del sistema; llevar los remolcadores y remolques de un puerto

[3] Este ejemplo es una adaptación de G. G. O'Brien y R. R. Crane, "The Scheduling of a Barge Line", *Operations Research* 7, 1959, págs. 561-570.

Figura 19-4 Operaciones de la compañía de remolcadores



a otro de acuerdo con las distancias (por ejemplo, cuatro días de Pittsburgh a Cincinnati); y realizar otras funciones.

Una vez que se desarrolla un modelo de simulación de este tipo, la gerencia puede utilizarlo para ensayar políticas alternativas. Entre las reglas de programación que podrían probarse están:

1. Que un remolcador salga de Pittsburgh a intervalos fijos (cada 8 o 10 días) sin importar cuántos remolques tenga.
2. Que un remolcador salga cuando tenga por lo menos cierta cantidad de remolques, por ejemplo 16.

Por supuesto, es posible utilizar otras políticas de programación. Además, la compañía podría examinar el efecto de equipo adicional sobre el sistema, como serían más remolques o remolcadores, o remolcadores más rápidos.

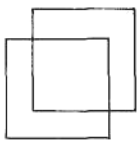
El modelo de simulación permite que la compañía experimente con éstos y otros cambios sin tener que probarlos en el sistema real. Además del costo del cambio, en el que podría incurrir, es difícil evaluar los resultados de un experimento en la realidad porque hay factores externos que cambian constantemente. Es difícil saber si los resultados se deben a los factores externos o a los cambios en el sistema. Este problema no se presenta en los modelos de simulación, ya que se pueden controlar los factores externos.

La simulación se ha utilizado mucho para tratar diversos tipos de problemas. Hay modelos de simulación para sistemas de transporte, para fábricas y para operaciones de aeropuertos; para el procesamiento de juicios, para servicios de ambulancias y bomberos, para sistemas de computación y comunicaciones, y para estudiar el crecimiento económico y el de población a nivel urbano y mundial.

Aunque los modelos de simulación de sistemas complejos pueden ser muy valiosos, tienen algunos inconvenientes. Su construcción tiende a ser costosa. También puede ser difícil validar una simulación compleja (es decir, asegurar que el modelo deseado sea una representación adecuada sin error en la lógica o en el programa de computación). Por otra parte, hay que determinar un periodo de inicialización apropiado y la duración de la simulación. Los métodos estadísticos pueden ser convenientes para determinar cuál debe ser la duración de la simulación y así saber si un resultado se debe a causas fortuitas o es sistemático. Por supuesto, como sucede con todos los modelos, la simulación es una simplificación de la realidad y quizás no represente en forma adecuada los elementos o las relaciones importantes.

RESUMEN

Una aplicación importante de la simulación es el estudio de sistemas operativos complejos que no pueden analizarse por optimización u otros métodos matemáticos.



APÉNDICE 1

Método algebraico para generar variables aleatorias



Suponga que la función de distribución acumulada que nos interesa se puede expresar en forma cerrada (es decir, con una fórmula que sea una función de χ sin signos de integración); entonces se puede sustituir el proceso gráfico por una

relación algebraica equivalente. Por ejemplo, considere la función de densidad de probabilidad exponencial que se analizó en el apéndice 1 del capítulo 18:

$$f(t) = \lambda e^{-\lambda t}, \quad 0 < t < \infty \tag{19–1}$$

La función de distribución acumulada de la distribución exponencial es:[4]

$$F(t) = 1 - e^{-\lambda t} \tag{19–2}$$

Ahora se establece un decimal aleatorio hipotético (R.D.) igual a la función de distribución acumulada y se resuelve para *t:*

$$\text{R.D.} = 1 - e^{-\lambda t} \tag{19–3}$$
$$e^{-\lambda t} = 1 - \text{R.D.}$$

Como el decimal aleatorio está entre 0 y 1, también lo está 1 - R.D.; por lo tanto, *esta* cantidad (1 - R.D.) se puede considerar directamente como decimal aleatorio. Por ello, se puede definir:

$$e^{-\lambda t} = \text{R.D.} \tag{19–4}$$

Tomando logaritmos naturales:

$$-\lambda t = \log_e(\text{R.D.}) \tag{19–5}$$

o sea:

$$t = -(1/\lambda)\log_e(\text{R.D.}) \tag{19–6}$$

La ecuación 19-6 se puede usar en forma directa para generar valores a partir de una distribución exponencial con parámetro λ. Primero, se obtiene un decimal aleatorio (R.D.) de una tabla de números aleatorios, como la tabla 19-2, luego se sustituye el valor específico que se obtuvo en el segundo miembro de la ecuación 19-6 y se resuelve para producir un valor específico de *t.* El valor que se obtenga será un valor aleatorio de una distribución exponencial con parámetro A.

Por ejemplo, si $\lambda = 5$ y el decimal aleatorio es R.D. = 0.475, entonces, de las tablas de logaritmos naturales, $\log_e(0.475) = -0.744$ y $t = -(1/5)(-0.744) = 0.1488$. Éste sería un valor aleatorio de una distribución exponencial con parámetro $\lambda = 5$ (media $1/\lambda = 1/5$).

APÉNDICE 2



Simulación de Montecarlo en hojas de cálculo

Los programas de hojas de cálculo son bastante flexibles. Es fácil utilizarlos para efectuar simulaciones como las descritas en este capítulo, pero con frecuencia los manuales no lo indican. Este apéndice es un breve curso introductorio para la construcción de estos modelos en Lotus 1-2-3 y hojas de cálculo compatibles,

[4] Véase el pie de página 6 del capitulo 18.

como VP Planner y Quattro; no obstante, los conceptos pueden utilizarse en cualquier hoja de cálculo.

La mejor manera de usar este apéndice es sentarse frente a un computador personal con un paquete de hoja de cálculo y seguir los pasos que se indican. En este capítulo se supondrá que usted conoce los elementos básicos para usar una hoja de cálculo.

Generación de valores aleatorios: La función @RAND

Antes de entrar en detalles, hay que presentar ciertos antecedentes del método de Montecarlo y la generación de valores aleatorios a partir de distribuciones. Específicamente, se estudiará la función **@RAND** de Lotus 1-2-3. Para comenzar:

1. Encienda el computador e introduzca Lotus 1-2-3.
2. Coloqúese en cualquier celda vacía, por ejemplo B2.
3. Escriba **@RAND.**
Observe lo que sucede: aparece un decimal mayor que cero pero menor que 1.0.
4. Copie la celda B2 a las celdas B3 a B7.
(Ya debe saber cómo hacerlo. Las instrucciones son:

/C {retorno} B3.B7 {retorno}

Si todo lo demás falla, reescriba @RAND cinco veces.) Observe que en cada caso se obtiene un valor distinto, cada uno entre 0 y 1.0.
5. Oprima la tecla **Cale** (para recalcular)
Observe que los números cambian. Cada vez que se recalcula la hoja de cálculo (al añadir o modificar una celda o al usar la tecla Cale) se determinan valores nuevos para la función @RAND.

Como es poco desconcertante que los números aleatorios cambien cada vez que haya que modificar el modelo, se puede apagar el modo de recálculo automático. Para hacerlo:
6. Escriba: **/ W G R M** (instrucción, Hoja de cálculo, Recálculo global, Manual)
Ahora la hoja de cálculo sólo se recalculará al oprimir la tecla **Cale.**

La función @RAND genera números aleatorios uniformes entre 0 y 1. Esto quiere decir, por ejemplo, que hay un 10% de probabilidad de obtener un valor entre 0.10 y 0.20, lo mismo para el intervalo 0.80 a 0.90.

Simulación de un sistema sencillo de cola

Para que el análisis sea más claro, usaremos un ejemplo sencillo. De hecho, se usará el ejemplo 1 de este capítulo: el almacén con un solo andén para descargar los vagones de ferrocarril que llegan durante la noche. Lea el ejemplo 1 si no lo ha hecho aún. Observe que la compañía ha determinado una distribución de probabilidad para las llegadas de los vagones: la tabla 19-1. Lo que se desea es generar una historia de llegadas con valores aleatorios a partir de esta tabla, como se ilustró en la tabla 19-3.

Tabla 19-11 Distribución acumulada de llegadas

Número de vagones que llegan (X)	*Frecuencia relativa (probabilidad de X llegadas)*	*Probabilidad acumulada (probabilidad de menos de X llegadas)*
0	0.23	0
1	0.30	0.23
2	0.30	0.53
3	0.10	0.83
4	0.05	0.93
5	0.02	0.98
6 o más	0	1.00

Figura 19-5 La Tabla @VLOOKUP

	H	I	J	K
1		Prob.	Núm. de	
2		acum.	llegadas	
3		0	0	
4		0.23	1	
5		0.53	2	
6		0.83	3	
7		0.93	4	
8		0.98	5	
9		1	6	
		Columna de consulta	Primera columna	

Figura 19-6 Encabezamientos para las columnas del modelo

	A	B	C	D	E	F
1			Modelo de simulación de almacén			
2	Cap. andén	2				
3						
4	Día	Número aleatorio	Núm. de llegadas	Núm. para descarga	Núm. de descargas	Núm. aplazado
5	---------	------	----------	----------	----------	--------
6	0					0
7						
8						

Creación de la tabla @VLOOKUP

Lo primero es tomar la tabla 19-1 y crear, a partir de ella, una distribución acumulada como la que se muestra en la tabla 19-11.

Vamos a usar la distribución acumulada y la función @ **VLOOKUP** de Lotus para llevar a cabo la tarea.

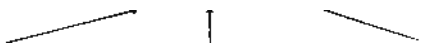
1. Muévase a la celda II.
2. Escriba los encabezamientos y los valores como se indica en la figura 19-5. Los valores provienen de la distribución acumulada de la tabla 19-11. La tabla @ VLOOKUP está en el intervalo 13 a J9. La primera columna se denomina "columna de consulta"; la otra es la "primera columna" (a la derecha de la columna de consulta).
3. Pase a la celda Al y borre los valores que se encuentran en las celdas B2 a B7.
4. Escriba a continuación los encabezamientos y los valores como se indican en la figura 19-6.

Observe que la capacidad de descarga del andén (dos vagones diarios) se registra en la celda B2. Además, no hay vagones en espera el día 0 (introduzca los ceros en las celdas A7 y F7, como se indica).

5. Pase a la celda A8.
6. Escriba: **+A7+1**

Esto incrementa en 1 el recuento de días.

7. Pase a la celda B8.
8. Escriba: **@RAND**
9. Pase a la celda C8.
10.Escriba: **@VLOOKUP(B8,I3.J9,1)**



Valor de consulta — Intervalo de la tabla de consulta — Columna de la tabla

Para lo anterior se necesita una explicación. La función ©VLOOKUP usa el primer argumento (celda B8, que contiene el número aleatorio) para efectuar una búsqueda en la columna de consulta de la tabla (especificada como 13 a J9) y encontrar el valor correspondiente en la primera (y única, en este caso) columna de la tabla. Observe que la referencia a la tabla 13 a J9 se realiza con referencias absolutas, insertando el signo $. Esto se hace para que al copiar (dentro de un par de pasos), la referencia a la tabla siempre sea la misma.

Deténgase un minuto y piense en lo que acabamos de hacer. Si el número aleatorio de la celda B8 está entre 0 y 0.23, la referencia se hace a la primera fila de la tabla de consulta y el resultado es un valor de cero, es decir, ninguna llegada. Si el número aleatorio es 0.23 o mayor, pero menor que 0.53, la referencia se hace a la segunda fila de la tabla, que corresponde a una llegada. Un número aleatorio entre 0.53 y 0.83 da como resultado dos llegadas. Esto produce llegadas tal y como se desea; es decir, con las probabilidades que se indican en la tabla 19-11.

11. Pase a la celda D8.

12. Escriba: **+F7+C8**

Esto indica que el número de vagones que se descargarán en un día determinado es el número demorado del día anterior más las llegadas de la noche.

13. Pase a la celda E8.

14. Teclee: **@MIN** (B2, **D8)**

Esto indica que el número de vagones que se descargarán en un día determinado es el valor menor de la capacidad del andén (especificado en la celda B2) o el número disponible para descarga. Esta situación no es obvia, pero lo que usted debe preguntarse por qué es así. Observe también la referencia absoluta a la celda B2 con el signo $. Como antes, se requiere este signo porque se desea que la referencia permanezca fija al copiar, como se hará más adelante.

15. Pase a la celda F8.

16. Escriba: **+D8-E8**

El número de vagones aplazados para el día siguiente es igual al número de ellos que se descargarán menos los que en realidad se descargaron.

Haga una pausa al llegar a este punto para revisar lo que ha hecho: crear el primer día del modelo. Asegúrese de comprenderlo. Oprima la tecla Cale unas cuantas veces y observe los resultados.

Lo siguiente es copiar 500 veces el modelo del primer día para simular 500 días de operación:

17. Pase a la celda A8.

18. Copie las celdas A8...F8 a las celdas A9...A507.

Si no sabe cómo hacerlo, siga estos pasos:

Escriba: / **C A8.F8**
Oprima: **Retorno**
Escriba: **A9.A507**
Oprima: **Retorno**

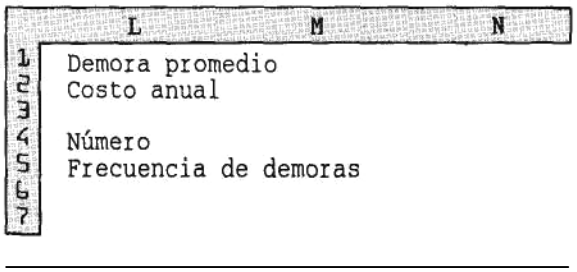
Esto requerirá un poco de tiempo, ya que es una copia de gran tamaño.

Ahora ya ha creado un modelo de simulación. La compañía se preocupa por el número de vagones aplazados, ya que es costoso tenerlos en espera. Ahora tiene una herramienta que puede usar la gerencia para estudiar sus operaciones.

Deberá estudiar su modelo para asegurar que hace lo que usted espera que haga. Observe que la columna C muestra las llegadas diarias. Revise la columna para ver si está bien, es decir, para determinar si las llegadas son aparentemente "aleatorias" y están de acuerdo con las probabilidades de la tabla 19-11.

La columna F contiene el número de vagones aplazados. Observe que en varios días no hay vagones demorados. Pero si revisa toda la columna, descubrirá periodos en los cuales se acumulan las demoras, quizás con más de 10 vagones en espera. Las demoras pueden durar varios días y después regresar a cero. Así es precisamente como se comportan los sistemas de colas.

Figura 19-7 Encabezamientos para el resumen de resultados



Resumen de los resultados

Para que los resultados sean útiles, hay que hacer un resumen. Calcularemos el número promedio de vagones demorados y se determinará el costo de esta demora. También sería conveniente elaborar una distribución que muestre la frecuencia de demora de cada número de vagones. Es fácil producir esta distribución de frecuencias con la instrucción de Datos/Distribución de 1-2-3, como se verá más adelante, pero antes:

1. Pase a la celda L1 y escriba los encabezamientos y la información que se presenta en la figura 19-7.
2. Pase a la celda N1 y marque:

   @AVG(F8.F507)

   Esto calcula el número promedio de vagones demorados por día.
3. Pase a la celda N2 y marque:

   100*365*N1

   Esto calcula el costo anual (365 días) que se debe a los vagones demorados, suponiendo que cuesta 100 dólares diarios la demora de cada vagón.
4. En la columna L, filas 7 a 27, marque los valores:

   0, 1,2,3, …hasta 20

   A éstos se les llama "receptáculos" de datos.
   (Nota: La instrucción **Data/Fill** es una manera fácil de hacerlo.)
5. Escriba: **/ D D** (instrucción, Datos, Distribución)
   El computador pide el intervalo de datos. Se trata del intervalo que contiene los valores que queremos tabular, la columna F del modelo. Entonces:
6. Especifique el intervalo escribiendo F8.F507 y luego oprima: **Retorno.**
   El computador después pide el intervalo para los receptáculos.
7. Especifique este intervalo escribiendo: **L7.L27** y luego oprima: **Retorno.**
   Después de que el computador termina los cálculos, la distribución de valores aparece en la tabla. Allí se muestra el número de días en los cuales no

se demoraron los vagones, el número de días que se demoró un vagón, el número en el cual se demoraron dos vagones, etcétera. Observe que arriba se muestra el promedio para este conjunto de valores.

Haga una pausa para revisar los resultados.

Suponga que quiere guardar los resultados que acaba de calcular, para después calcular otros 500 días. Lo único que hay que hacer es mover los resultados a otra columna.

8. Escriba: / **M M7.M27** (instrucción, Mover, intervalo M7.M27)
9. Oprima: **Retorno**
10. Escribe: **N7** (al intervalo que comienza en N7)
11. Oprima: **Retorno**
12. Oprima: **Cale** (esto puede tardar un poco)
13. Escriba ahora: **/ D D** (instrucción, Datos, Distribución)
14. Luego oprima *dos veces:* **Retorno**

Se presenta una nueva distribución para otros 500 días, así como la demora media y el costo de la demora.

Cambio de la capacidad

Los resultados que se obtuvieron se basaron en la hipótesis de que el andén del almacén tiene la capacidad para descargar dos vagones de ferrocarril por día. Suponga que la compañía puede añadir equipo nuevo que aumentaría la capacidad de descarga a tres vagones por día. Con esto se reducirían las demoras. Veamos cuál es el ahorro que se obtendría.

1. Escriba el costo anual estimado de las demoras (está en la celda N2).
2. Pase a la celda B2.
3. Marque el número: 3 (la nueva capacidad)
(No olvide oprimir **Retorno** después de marcar 3.)
4. Oprima: **Cale**

Esto genera un nuevo conjunto de números aleatorios y, por consiguiente, una nueva simulación con la nueva condición (capacidad de tres vagones por día).

5. Escriba: **/ D D** (instrucción, Datos, Distribución)
6. Oprima: **Retorno** *dos veces*

Esto calcula la distribución de las demoras, el número promedio de vagones demorados y el costo de la demora.

7. Pase a la celda N2 para ver los resultados.

Al restar el resultado de la celda N2 a la cifra que escribió antes, se obtiene una estimación del ahorro anual que se logra aumentando la capacidad a tres vagones diarios. Esta cantidad tendría que ponderarse con el costo de construir la capacidad adicional.

Figura 19-8 Tablas de consulta para el ejemplo de análisis de riesgo

	J	K	L	M	N	O	P	Q
1	Prob. acum.	Precio de venta		Prob. acum.	Costo variable		Prob. acum.	Volumen de ventas
2	---	---	---	---	---	---	---	---
3	0	4		0	2		0	3000
4	0.3	5		0.1	3		0.2	4000
5	0.8	6		0.7	4		0.6	5000
6	1			1			1	
7								
8								

Análisis de riesgo de Montecarlo

El *software* de hoja de cálculo también se puede emplear para realizar análisis de riesgo, como se describió en este capítulo. Para ilustrarlo, volveremos a realizar el análisis del ejemplo 3. En dicho ejemplo había incertidumbre acerca del precio, del costo variable y del volumen de ventas para un producto nuevo. Lo primero que hay que hacer es borrar el ejemplo anterior escribiendo **/ W E Y.**

Las distribuciones de probabilidad se indican en la tabla 19-8. Hay que establecer una tabla de consulta separada para cada una, como se hizo en el ejemplo anterior para las llegadas aleatorias.

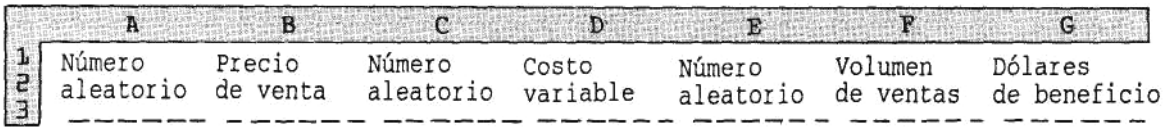
1. Pase a la celda J1.
2. Escriba los encabezamientos de la tabla como se indica en la figura 19-8. Observe que está creando tres tablas que contienen las distribuciones de probabilidad acumulada.
3. Llene el resto de las tablas (filas 4 a 7) también como se muestra en la figura 19-8. Observe que se registran las probabilidades acumuladas en las columnas J, M y P.

Construcción del modelo de Montecarlo

El siguiente paso es establecer el modelo de Montecarlo para el ejemplo. Como antes, hay que apagar el recálculo automático, por lo tanto:

1. Escriba: **/ W G R M** (instrucción, Hoja de cálculo, Global, Recálculo, Manual)
2. Pase a la celda A1 y escriba los encabezamientos de las columnas para el modelo, de acuerdo con la figura 19-9,
3. Pase a la celda A4 y escriba: **@RAND**
4. En la celda B4, escriba: **©VLOOKUP (A4, J4, K7,1)**
   La consulta del precio de venta está en el intervalo J4 a K7. Los signos de dólar se incluyen para que la referencia permanezca fija al copiar la celda siguiente.
5. En la celda C4, escriba: **@RAND**

Figura 19-9 Encabezamientos para el ejemplo de análisis de riesgo



6. En la celda D4, escriba: **©VLOOKUP (C4, M4, N7,1)**
   Ésta es la tabla de consulta para el costo variable.
7. En la celda E4, escriba: **@RAND**
8. En la celda F4, escriba: **©VLOOKUP (E4, P4, Q7,1)**
   Ésta es la tabla de consulta para el volumen de ventas.
9. En la celda G4, escriba: **(B4-D4)*F4-5000**
   Esto calcula el beneficio como

   (Precio - Costo variable) • (Volumen de ventas) - Costo fijo de $5000

Antes de continuar, revise el registro de las fórmulas.

Con esto concluye el primer ensayo del modelo. Para disponer de varios ensayos, digamos 100, basta copiarlo a las otras celdas.

10. Escriba: / **C A4.G4** y luego oprima: **Retorno** (instrucción, Copiar, del intervalo A4 a G4)
11. Escriba después: **A5.A103** y luego oprima: **Retorno** (copiar al intervalo A5 a A103)
    Esta operación requiere un poco de tiempo; tenga paciencia. El resultado será de 100 ensayos, con los valores del beneficio en la columna G. Haga una pausa y revise el análisis. Revise la columna G para ver el intervalo de beneficios que se obtienen. Oprima la tecla Cale para obtener un nuevo conjunto de resultados.

Al llegar a este punto se puede calcular un promedio y clasificar los valores de los beneficios en una distribución de frecuencia, como se hizo en el ejemplo del andén de descarga del almacén. Pero no volveremos a seguir los mismos pasos. En cambio, ilustraremos otra característica, la representación gráfica del perfil de riesgo: la distribución de frecuencias acumulada para el beneficio.

Representación gráfica de los resultados

Primero clasifique los resultados, de mayor a menor:

1. Mueva el cursor a la celda G4.
2. Escriba: **/ D S** (instrucción, Datos, Clasificación)
   Aparece el menú **Sort** (clasificación) y se realza la opción **Data-Range** (intervalo de datos); lo primero que se debe hacer es especificar el intervalo de valores que deseamos clasificar, por lo que:

3. Oprima: **Retorno**

El programa pide que especifique el intervalo de datos; entonces:

4. Escriba: **G4.G103** (el intervalo que contiene los resultados de los beneficios) y oprima: **Retorno**

Vuelve a aparecer el menú de clasificación. Después hay que especificar la clave primaria (no es necesario que sepa exactamente qué significa). Para responder:

5. Escriba: **P** (para la clave primaria)

6. Escriba: **G3** y oprima: **Retorno**

El programa solicita ahora el orden de la clasificación. Se desea que los beneficios vayan de mayor a menor (orden descendente); entonces:

7. Escriba: D y oprima: **Retorno**

El programa regresa al menú de clasificaciones y estamos listos para llevar a cabo la clasificación; entonces:

8. Escriba: **G** (para iniciar)

Observe que la celda G4 contiene el mayor beneficio (más positivo) de los 100 ensayos y que la celda G103 contiene el menor. Éstos son los valores que deseamos representar.

Ahora se tiene que definir la escala de probabilidad, de 0 a 1.0, en unidades de 0.01 (fueron 100 ensayos). Colocaremos esta escala en la columna H, con la instrucción **Data/Fill** (datos/relleno).

9. Pase a la celda H4.

10. Escriba: **/ D F** (instrucción, Datos, Relleno)

11. Escriba: **H4.H103** (intervalo que se llenará) luego oprima: **Retorno**

Deseamos comenzar con 0 y el programa lo propone; entonces:

12. Oprima: **Retorno** (para iniciar a partir de 0)

13. Escriba: **.01** (para el incremento)
y oprima: **Retorno**

14. Escriba: **1.0** (para el fin)

La columna H debe contener ahora los valores 0,0.01,0.02, etc., hasta 0.99. El siguiente paso es crear el gráfico:

15. Escriba: **/ G** (instrucción, Gráfico)

Aparece el menú de gráficos.

16. Escriba: **T X** (tipo de gráfico, tipo XY)

17. Escriba: **X G4.G103** (para especificar el intervalo de datos para la variable X)
y oprima: **Retorno**

18. Escriba: **A H4.H103** (para especificar el intervalo de datos para la varia ble Y o A)
y oprima: **Retorno**

19. Escriba: **O F A L Q** (Opciones, Formato, Datos A, Línea, Salir)

Este paso indica a Lotus que deseamos representar los datos como una serie de líneas conectadas.

20. Escriba: **Q** (una vez más, para salir del menú de opciones)

Reaparece el menú de gráficos. Ya terminamos de especificar el gráfico; entonces:

21. Escriba: **V** (para ver el gráfico)

El gráfico debe compararse con el que se muestra en la figura 19-2. Será un poco diferente, ya que este análisis se basa en 100 ensayos (en lugar de 25, como en la figura 19-2) y, por supuesto, se basa en valores aleatorios distintos.

Oprima cualquier tecla al terminar de observar el gráfico. Luego:

22. Escriba: **Q** (para salir del menú de gráficos)

Los ejemplos que se ilustran en este apéndice y en el capítulo son sencillos, pero se puede utilizar la misma metodología para crear modelos de Montecarlo bastante complejos para análisis de riesgo. Existen además varios productos complementarios para Lotus que facilitan el trabajo realizando muestras aleatorias de diversas distribuciones y naciendo sencilla la creación de las tablas y de los gráficos.[5]

[5] Por ejemplo, @RISK (veáse pie de página 1).

Bibliografía

Bonini, C. P., *Building Monte Cario Simulation Models Using Lotus 1-2-3,* Informe técnico núm. 19, Stanford University Graduate School of Business Computer Facility, 1985.

Boulden, J. B., *Computer-Assisted Planning Systems,* Nueva York, McGraw-Hill, 1975.

Bratley, P., B. L. Fox y L. E. Schrage, *A Guide to Simulation,* Nueva York, Springer-Verlag, 1983.

Gordon, G., *Systems Simulation,* segunda edición, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1978.

Hertz, D. B. y H. Thomas, *Risk Analysis and Its Applications,* Nueva York, John Wiley & Sons, 1983.

Hertz, D. B. y H. Thomas, *Practical Risk Analysis,* Nueva York, John Wiley & Sons, 1984.

Hillier, F. y G. J. Lieberman, *Introduction to Operations Research,* quinta edición, Nueva York, McGraw-Hill, 1990.

Maisel, H. y G. Gnugnoli, *Simulation of Discrete Stochastic Systems,* Chicago, Science Research Associates, 1972.

Meier, R. C, W. T. Newell y H. L. Pazer, *Simulation in Business and Economics,* Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1969.

Naylor, T. H., *Corporate Planning Models,* Reading, Mass., Addison-Wesley Publishing,, 1979.

Pritsker, A. A. B., *Introduction to Simulation and SLAMII,* tercera edición, Nueva York, John Wiley & Sons, Halstead Press, 1986.

Shannon, R. E., *Systems Simulation,* Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1975.

Wagner, H. M. *Principles of Operations Research,* segunda edición, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1975.

Watson, H. S., *Computer Simulation in Business,* Nueva York, John Wiley & Sons, 1981.

Problemas con respuestas

19-1. *a.* Use el registro de llegadas que se muestra en la tabla 19-4 para simular el proceso de cola de espera del ejemplo de vagones de ferrocarril del almacén con una tasa de servicio constante de tres por día.

b. Suponiendo que la compañía del almacén paga 20 dólares diarios por los va-

gones de carga que se almacenan más de un día, estime el ahorro anual (250 días = 1 año) de tener una tasa de servicio de tres por día (en lugar de dos por día).

19-2. Extienda la tabla 19-10 hasta 50 ensayos, usando números aleatorios de la tabla 19-2. Represente los resultados en un diagrama semejante al de la figura 19-2. De su muestra de 25 ensayos, ¿cuál es la probabilidad de que el beneficio sea menor que cero? ¿Cuál es el beneficio promedio de su muestra de 25 ensayos? Compare sus respuestas con las que se obtuvieron en la tabla 19-10 y también con el beneficio esperado de 2140 dólares; calcule además la probabilidad *exacta* de que el beneficio sea menor que cero y compárela con el resultado de su muestra.

19-3. Remítase al problema 19-2. Suponga que el precio de venta y el volumen anual de ventas *no* son variables independientes, sino que se distribuyen en forma conjunta con las siguientes probabilidades. Observe que las probabilidades marginales son las mismas que en el capítulo, pero ahora no se aplica la hipótesis de independencia.

Precio \ Volumen de ventas	3 000	4 000	5 000	Suma de las filas
$4	0	0	0.3	0.3
$5	0	0.4	0.1	0.5
$6	0.2	0	0	0.2
Sumas de las columnas	0.2	0.4	0.4	1.0

a ¿Puede predecir, con sólo estudiar la tabla adjunta de probabilidades conjuntas, si el beneficio esperado con la nueva hipótesis será menor o mayor que antes? ¿Por qué?

b. Elabore un esquema similar al de la tabla 19-9 que utilice números aleatorios para producir valores aleatorios para el precio y el volumen cuando se relacionan de esta manera.

c. Use su esquema de (*b*) para generar 25 ensayos de la inversión, como en la tabla 19-10, pero suponga ahora que el precio y el volumen se relacionan en la forma que se especificó.

d. Represente una figura similar a la figura 19-2 para sus datos de (c).

e. Compare su figura de *(d)* con la figura 19-2. ¿Qué inversión prefiere? ¿Por qué?

Problemas

19-4. Extienda la tabla 19-7 a 100 periodos utilizando números aleatorios de la tabla 19-2. Estime el costo anual total (1 año = 50 semanas) si el costo de formulación de pedido es de 10 dólares, el costo de almacenamiento de una unidad de inventario es de 50 centavos por año y el costo de escasez es de tres dólares por unidad de ventas perdidas (utilice el inventario inicial promedio para determinar el costo del almacenamiento de inventario).

19-5. Escoja una regla de inventario que considere buena para la situación que se describe en el problema 19-4 (es decir, elija un número Q y un número R). Simule 100 periodos y compare el costo de su regla con el costo del problema 19-4.

19-6. Remítase al problema 18-7 del capítulo 18. Suponga que ahora las llegadas siguen una distribución de Poison con tasa media $\lambda = 5$ buques por semana, pero que los tiempos de servicio son constantes de 0.1 semanas. Simule dos semanas de operación, rastreando el tiempo de espera de cada buque. *Recomendación:* Los tiempos entre llegadas son variables aleatorias exponenciales con parámetro $\lambda = 5$. Inicie a partir de cero y genere tiempos aleatorios entre llegadas como se describió en el apéndice 1 de este capítulo.

Precio (por quintal)	*Probabilidad*	*Rendimiento (quintales por hectárea)*	*Probabilidad*	*Costo (por hectárea)*	*Probabilidad*
$2	0.10	210	0.10	$400	0.70
3	0.20	220	0.10	500	0.20
4	0.50	230	0.40	600	0.10
5	0.10	240	0.30		1.00
6	0.05	250	0.10		
7	0.05		1.00		
	1.00				

19-7. Remítase al problema 17-9. Describa los pasos necesarios para obtener números aleatorios, para generar demandas aleatorias de acuerdo con la distribución de probabilidad especificada y para evaluar los costos para la política Q = 10 000 unidades de pedido.

19-8. Un granjero de Idaho estudia los riesgos asociados a su cultivo de patatas. Con base en su experiencia, determina que existen las probabilidades de la tabla superior asociadas con el precio de las patatas por quintal, con el rendimiento en quintales por hectárea y con los costos (de fertilizante, agua, semillas y mano de obra) por hectárea.

El beneficio por hectárea es (Precio · Rendimiento) - Costo. Suponga que todas las probabilidades son independientes. Use el método de Montecarlo para 25 ensayos y estime el beneficio esperado por hectárea y la distribución de probabilidad de los beneficios por hectárea. ¿Cuál es la probabilidad estimada de que el granjero obtenga menos de 100 dólares por hectárea en su cultivo?

Problemas más difíciles

19-9. Remítase al problema 19-8. En realidad, el precio y el rendimiento no son variables independientes. Un rendimiento bajo generalmente indica una escasez de patatas y aumenta el precio; un rendimiento elevado significa precios bajos. Pero esta relación no es exacta, ya que, además del rendimiento, hay otros factores que afectan los precios. Suponga que el rendimiento y el costo por hectárea son los mismos que se indicaron en el problema 19-8 y que son independientes. Suponga también que el precio se relaciona con el rendimiento como indica la siguiente ecuación:

$$\text{Precio} = 15.5 - 0.05(\text{Rendimiento}) + D$$

donde D es una variable aleatoria que indica una desviación con respecto a la ecuación. D tiene la siguiente distribución (independiente del rendimiento y del costo):

D	*Probabilidad*
-$1.00	0.10
- 0.50	0.20
0	0.40
0.50	0.20
1.00	0.10
	1.00

Estime el beneficio esperado por hectárea y la distribución de los beneficios por hectárea con 25 ensayos usando el método de Montecarlo.

19-10. Un analista de International Widgets Corp. (IWC) trabajaba en el plan financiero corporativo para el año entrante. IWC tiene dos divisiones principales, una en Estados Unidos y la otra en el Reino Unido. El analista

(para el problema 19-10)

Beneficio neto en Estados Unidos		*Beneficio neto en el Reino Unido*	
Cantidad (millones de dólares)	*Probabilidad de obtener este beneficio o menos*	*Cantidad (convertida en millones de dólares)*	*Probabilidad de obtener este beneficio o menos*
-$1.0	0.00	$0.5	0.00
3.0	0.10	0.7	0.10
6.0	0.25	0.9	0.25
8.0	0.50	1.0	0.50
10.0	0.75	1.3	0.75
15.0	0.90	2.0	0.90
20.0	1.00	3.0	1.00

obtuvo, de la gerencia de cada división, una evaluación de la distribución de probabilidad para el beneficio neto del año entrante. Estas evaluaciones se presentan arriba. Es razonable suponer que las distribuciones son independientes.

a. Establezca un procedimiento, con los métodos de Montecarlo, para estimar la distribución de probabilidad para el beneficio neto combinado de IWC. Aplique el procedimiento en cinco ensayos de Montecarlo para mostrar cómo se hace.

b. Indique cómo obtendría la distribución de probabilidad del beneficio neto combinado a partir de los resultados del método de Montecarlo.

c. Suponga que las distribuciones no son independientes (las condiciones económicas mundiales tienden a afectar en cierta medida a todos los países). Para manejar este problema, el analista propone que se use el mismo número aleatorio para determinar el valor de muestra de Montecarlo para los beneficios en Estados Unidos y en el Reino Unido. ¿Está de acuerdo con este procedimiento? Comente al respecto.

19-11. Acmé Airline Company (AAC) se preocupa por la programación de su taller de reparación de motores. Con la alternativa A, los tiempos de reparación de los motores se distribuirían exponencialmente con tiempo medio de 40 días. Con la alternativa B (un procedimiento más complejo) los tiempos de reparación de motores se distribuirían normalmente con media de 40 días y desviación estándar de cinco días.

Cuando un motor llega para reparación, se envía un motor de repuesto. Después se envía al taller el motor que requiere reparación y se trabaja al mismo tiempo en todos los motores con averías. Al concluir la reparación, el motor entra en el grupo de repuesto con el propósito de que se use para satisfacer una solicitud posterior. Las llegadas de los motores siguen una distribución de Poisson con tasa A = 0.5 por día.

Si llega un motor cuando no hay unidades de repuesto para reemplazarlo, se envía un motor de otro lugar; esto cuesta 10 000 dólares por solicitud. AAC ha comprado 25 motores de repuesto para que sea baja la probabilidad de que se produzca esta situación.

Observe que los tiempos de reparación de motores no son constantes, por lo que un motor que llegó después al taller puede terminarse antes.

Describa con cuidado cómo simularía esta situación; incluya los siguientes puntos:

Llegadas aleatorias de los motores. Tiempos aleatorios de reparación de motores (para cada alternativa).

[6] Para este problema se requiere el conocimiento del material que aparece en el apéndice 1 de este capítulo.

El número de motores de repuesto disponibles en cada instante.
El número de envíos de motores de otro lugar.
Su proceso de inicialización.

19-2. *a.* Remítase al problema 18-1. Suponga que la tasa media de servicio es de 15 por hora pero que no hay variación en el tiempo de servicio; es decir, se requieren exactamente cuatro minutos para atender cada llamada. Use el método de Montecarlo para simular 25 ensayos.

b. Remítase de nuevo al problema 18-1 y suponga ahora que el tiempo de servicio para una llamada se distribuye normalmente, con tiempo medio de servicio de cuatro minutos y desviación estándar de dos minutos. Use el método de Montecarlo para simular 25 ensayos.

c. Compare los resultados de *(a)* y (*b*) con lo que obtuvo en el problema 18-1.

19-13. Un sistema automático de almacenamiento y recuperación (AS/RS, *Automatic Storage/Retrieval System)* es un dispositivo para inventarios, controlado por computador, que puede almacenar plataformas de material, recogiéndolas en un punto de entrega/recepción de una banda transportadora y luego desplazándose horizontal y verticalmente por un pasillo hasta encontrar un espacio de almacenamiento libre para la plataforma. Cuando se presenta una solicitud de recuperación, el AS/RS viaja al lugar donde se almacenó la plataforma indicada, la saca y la entrega en el punto de entrega/recepción.

El AS/RS se puede describir como un cargador de plataformas que puede ascender o descender por un "mástil" que se desplaza por un pasillo de almacenamiento. Hay espacios para almacenamiento a ambos lados del pasillo. Considere un AS/RS con un solo pasillo.

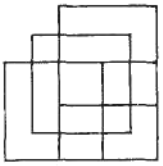
a. Suponga que la llegada de plataformas para almacenamiento sigue una distribución de Poisson, así como las solicitudes de plataformas almacenadas. Suponga también que los "tiempos de servicio" (es decir, el tiempo para que el sistema lleve a cabo un almacena miento o una recuperación) son exponenciales. Suponga que los procesos de almacenamiento y recuperación se efectúan por separado y que existe una sola cola que comprende ambos tipos de solicitudes; además, la prioridad se esta blece con base en el concepto "primero en entrar, primero en salir". ¿Qué *método* usaría para analizar este sistema? *Nota:* La suma de dos procesos de Poisson independientes también es de Poisson.

b. Suponga ahora que se mantienen dos colas distintas: una para las solicitudes de almacenamiento y otra para las de recuperación. Suponga que la política operativa es que se combinen los procesos de almacenamiento y recuperación (mientras las dos colas no estén vacías) de manera que el AS/RS no regrese va cío al punto de entrega/recepción. Por supuesto, esta combinación de almacenamiento y recepción aumenta el rendimiento del sistema. Suponga que los tiempos de servicio aún se distribuyen exponencialmente, pero con media mucho menor. ¿Qué método usaría para analizar este sistema?

c. Considere la situación de *(b),* pero su ponga ahora que el AS/RS puede seleccionar las solicitudes de recuperación "fuera de orden" para tratar de minimizar el desperdicio en el tiempo de viaje. Es decir, después de una decisión de almacenar una plataforma en un lugar específico, puede ser más eficiente efectuar una recuperación en lugar de otra debido a la ubicación de la plata forma para recuperación en los anaqueles. ¿Qué método usaría para analizar este sistema?

[7] Este problema se adaptó de W. H. Hausman, S. C. Graves y L. B. Schwarz, "Simulation Tests of Automatic Warehousing Systems", *AIIE Transactions,* septiembre de 1978.

CAPÍTULO 20



PERT: Técnica de evaluación y revisión de programas

Este capítulo presenta herramientas para administrar la planificación y el control de proyectos de gran magnitud con varias actividades distintas que requieren coordinación. En muchas situaciones empresariales hay que realizar varias actividades diferentes en una secuencia específica, para cumplir con un proyecto de mayor orden. Algunas de las actividades pueden estar en serie (por ejemplo, la investigación de mercado no puede efectuarse antes que la planificación del diseño de investigación), mientras que otras pueden estar en paralelo (por ejemplo, los motores de un buque pueden construirse al mismo tiempo que el casco). En un proyecto grande y complejo, el conjunto total de actividades generalmente contendrá una combinación de elementos en serie y en paralelo. El método PERT *(Program Evaluation and Review Technique,* técnica de evaluación y revisión de programas) está diseñado para ayudar al gerente en la planificación y el control del proyecto. En lo que se refiere a las cuestiones de planificación previas al inicio del proyecto, el método PERT permite que el gerente calcule el tiempo total esperado para concluir el proyecto. El método destaca las actividades del proyecto que son cuellos de botella, para que el gerente les asigne más recursos o las vigile en el transcurso del proyecto. En lo que se refiere al control una vez que inició el proyecto, el método ofrece un medio para supervisar el avance y detectar las demoras en actividades que ocasionarán demoras en la fecha de culminación del proyecto.

Este capítulo presenta los conceptos básicos del PERT en condiciones de tiempos de actividad conocidos e inciertos.

Requisitos de información

En el uso del PERT se requieren dos tipos de información para cada actividad del proyecto.' Es necesario conocer las *condiciones de secuencia* de la actividad; por ejemplo, hay que saber qué conjunto de actividades debe terminar antes de iniciar una actividad específica. También se necesita una estimación del *tiempo* que requiere cada actividad.

Caso I: Tiempos de actividad conocidos

En la primera parte de este capítulo se supondrá que hay una cantidad de tiempo precisa y conocida que cada actividad del proyecto necesitará. En la segunda parte, se supondrá que el tiempo de realización de cada actividad es incierto (es decir, una variable aleatoria).

Diagrama de red

El **diagrama de red** es una representación gráfica de todo el proyecto. Cada actividad del proyecto se representa con un círculo y las flechas indican los requisitos de secuencia.[2]

Ejemplo La tabla 20-1 contiene una lista de seis actividades que constituyen un proyecto, así como los requisitos de secuencia y los tiempos estimados para cada actividad.

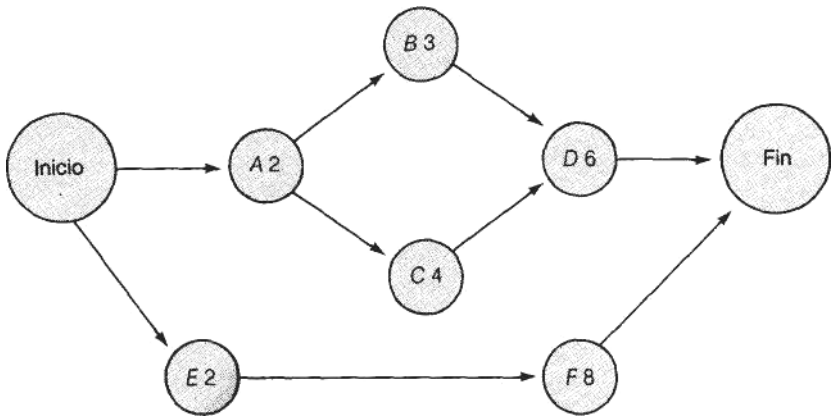
Tabla 20-1

Actividad	*Predecesores inmediatos*	*Tiempo estimado (días)*
A	Ninguno	2
B	A	3
C	A	4
D	B, C	6
E	Ninguno	2
F	E	8

[1] También existe un procedimiento estrechamente relacionado que se llama CPM *(Critical Path Method,* método de la ruta crítica). En este capítulo se emplea la terminología del PERT, aunque el procedimiento de diagrama de red sigue la convención del CPM.

[2] En PERT, las flechas se usan para representar actividades; sin embargo, la convención de CPM que se usa aquí es más fácil de comprender.

Figura 20-1 Diagrama de red



El predecesor inmediato de la actividad B es la actividad A; esto quiere decir que hay que terminar la actividad A antes de que pueda iniciar B. La figura 20-1 muestra el diagrama de red para el ejemplo, donde las actividades se representan con círculos. Las flechas del diagrama de red indican los requisitos o condiciones de secuencia del problema. Por ejemplo, la flecha del círculo A al círculo B indica que la actividad A debe concluir antes de iniciar la actividad B. Así mismo, las actividades B y C deben terminar antes de iniciar la actividad D.

El tiempo estimado para cada actividad se ha incluido en el círculo que representa a la actividad. Una vez terminado, el diagrama de red se puede usar para desarrollar la ruta crítica del proyecto.

Ruta crítica

Un **ruta** se define como una secuencia de actividades enlazadas dentro de un proyecto. En el ejemplo sólo hay tres rutas posibles: *ABD,* con longitud de 11 días; *ACD,* con longitud de 12 días; y *EF,* con longitud de 10 días. La **ruta crítica** es la que tiene mayor duración. En el ejemplo se trata de *ACD,* con longitud de 12 días. La longitud de la ruta crítica determina el tiempo mínimo para la conclusión de todo el proyecto. Las actividades sobre la ruta crítica son cuellos de botella del proyecto.

La ruta crítica es importante por dos razones. Primero, el tiempo de terminación del proyecto no se puede reducir, a menos que pueda concluir por lo menos una de las actividades en la ruta crítica en menor tiempo que el inicialmente estimado. La ruta crítica destaca las actividades que deben efectuarse con mayor rapidez para que sea posible la reducción del tiempo de culminación del proyecto. Segundo, cualquier demora en las actividades de la ruta crítica ocasionará demoras en la conclusión del proyecto, mientras que las demoras en actividades no

críticas quizás no retrasen la culminación del proyecto. En el ejemplo, el tiempo estimado para terminar el proyecto es 12 días. Si queremos reducir este tiempo, hay que reducir el tiempo necesario para completar una de las tres actividades de la ruta crítica: A, C o D. No se obtiene ningún beneficio de la reducción del tiempo requerido para realizar las actividades B, E o F, ya que éstas no están en la ruta crítica. Además, se puede tolerar una demora de hasta un día en el tiempo requerido para la actividad B, pues no afectaría el tiempo de terminación del proyecto. Por otra parte, cualquier demora en las actividades A, C o D alargaría directamente la duración del proyecto. Si la actividad C se demorara tres días, el proyecto duraría 15 días en lugar de 12.

En el caso de proyectos sencillos, como el del ejemplo, se puede detectar la ruta crítica mediante la inspección del diagrama de red. Lo más común es usar el método PERT para la planificación y el control de proyectos complejos, a gran escala (por ejemplo, la construcción de un edificio de 50 pisos, el desarrollo y la implantación de un nuevo sistema de defensa militar o el diseño y la instalación de nuevos procesos de manufactura de gran magnitud). En estos casos, pueden existir cientos o miles de actividades necesarias para completar el proyecto y se requiere una forma sistemática de búsqueda de la ruta crítica.

Algoritmo para la ruta crítica

Un algoritmo es un procedimiento sistemático bien definido. El algoritmo para encontrar la ruta crítica en una red se presenta a continuación. Sea:

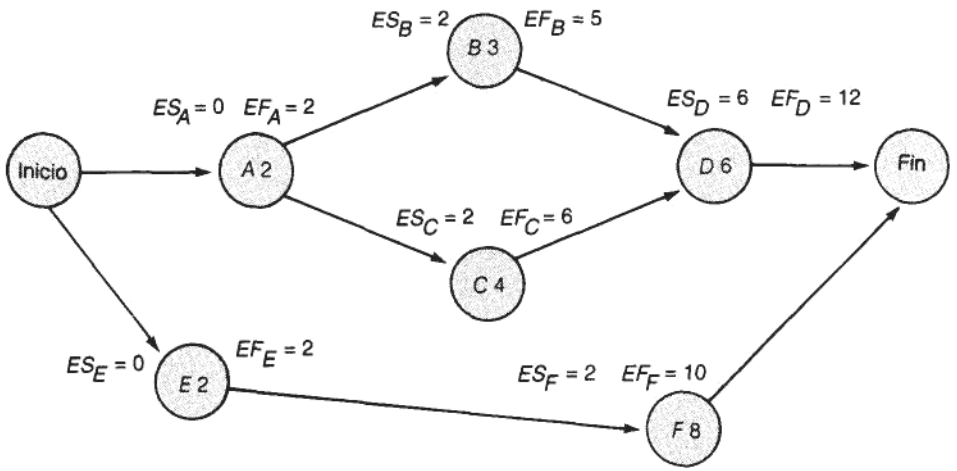
ES_i = Menor tiempo de inicio para la actividad i
EF_i = Menor tiempo de terminación de la actividad i

donde el menor tiempo de inicio de una actividad es el momento más anticipado en el cual puede comenzar la actividad, suponiendo que todos sus predecesores también iniciaron en el instante más anticipado posible. El menor tiempo de terminación de la actividad es la suma del tiempo más anticipado de inicio y el tiempo estimado para realizar la actividad. El tiempo más anticipado de terminación representa el momento más próximo en el cual puede terminar una actividad, suponiendo que todos sus predecesores comenzaron en su tiempo más anticipado de inicio.

El *ES* y el *EF* de cada actividad de la red se obtienen de la siguiente manera: Primero, el *ES* de la primera actividad es igual a cero. Luego sume a *ES* (cero) el tiempo estimado para realizar la primera actividad, para obtener el *EF* de la primera actividad. Considere ahora cualquier actividad cuyos predecesores tengan valores *ES* y *EF*. El *ES* de dicha actividad es igual al mayor de los valores *EF* de sus predecesores inmediatos, ya que es necesario concluir todos antes de que pueda iniciar la actividad. Una vez más, el *EF se* obtiene sumando el tiempo estimado para realizar la actividad a su tiempo *ES*.

La figura 20-2 contiene los tiempos *ES* y *EF* para las actividades del primer ejemplo. Las actividades A y E son las primeras, por lo que el *ES* de A y E es cero.

Figura 20-2 Menor tiempo de inicio y de terminación



Como la actividad A requiere dos días, el *EF* correspondiente es 2. Así mismo, el *EF* para la actividad E es 2. Por lo tanto, el *ES* para las actividades B y C es 2. El *EF* para B es 2 + 3 = 5; y el *EF* para C es 2 + 4 = 6. Puesto que la actividad D requiere que se terminen B y C antes de poder iniciar, el *ES* para la actividad D es el valor mayor de 5 y 6, o sea, 6. El *EF* para D es 6 + 6 = 12. El *ES* para la actividad F es 2 y su *EF* es 10.

Continuando con el algoritmo, defina:

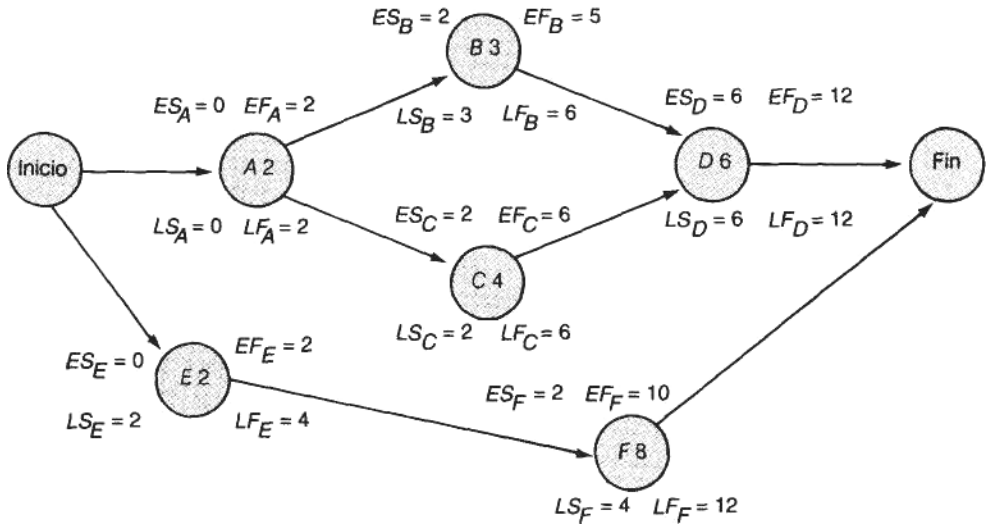
LS_i = Mayor tiempo de inicio para la actividad i

LF_i = Mayor tiempo de terminación para la actividad i

donde el mayor tiempo de terminación para una actividad es el mayor tiempo que puede requerir una actividad para su conclusión sin afectar la fecha límite del proyecto, suponiendo que todas las actividades posteriores se llevan a cabo según lo planificado. El mayor tiempo de inicio para una actividad es la diferencia entre el mayor tiempo de terminación y el tiempo estimado para realizar la actividad. Para obtener el *LS* y el *LF* de cada actividad, se comienza por el final del diagrama de red y se asigna al *LF* de la última actividad el mismo valor que el *EF* de dicha actividad.[3] Después se resta el tiempo estimado para realizar la última actividad para obtener el LS. Considere ahora cualquier actividad para la cual todos sus sucesores tengan valores *LS* y *LF*. El valor *LF* de dicha actividad es igual al menor de los valores *LS* de sus sucesores inmediatos. El LS se obtiene

[3] En la práctica, el *LF* de la última actividad es igual a la fecha límite del proyecto. Sin embargo, también es útil asignar al *LF* de la última actividad el mismo valor de su tiempo *EF,* de manera que la ruta crítica no tenga holgura.

Figura 20-3 Mayor tiempo de inicio y de terminación



entonces restando al tiempo *LF* el tiempo estimado para concluir la actividad. La figura 20-3 contiene los tiempos *LS y LF* para las actividades del ejemplo, suponiendo que la fecha límite para concluir el proyecto es 12 días. Las actividades D y F son las últimas, por lo que el *LF* de D y F es igual al límite de 12 días del proyecto. Como la actividad D requiere seis días, el LS correspondiente es 12 - 6 = 6. La actividad F necesita ocho días, por lo que el LS de F es 12 - 8 = 4. El *LF* para B y C es seis, ya que ambos tienen la misma actividad sucesora. El *LS* para la actividad B es 6 - 3 = 3y para C es 6 - 4 = 2. El *LF* de la actividad A es el menor de los valores *LF* de sus sucesores inmediatos; el menor valor de 2 y 3 es 2. Como la actividad A dura dos días, el *LS* correspondiente es 2 - 2 = 0. Por último, el *LF* de la actividad E es 4 y su LS es 2.

Holgura y ruta crítica

La holgura es el número de días que puede demorarse una actividad sin que el proyecto se extienda más allá de su fecha límite. Después de calcular *ES, EF, LS y LF* para cada una de las actividades del proyecto, se calcula la holgura de cada actividad como la diferencia entre el LS y el *ES* de la actividad (o, lo que es lo mismo, la diferencia entre el *LF y* el *EF).* En el ejemplo se especificó que el límite para el proyecto era la longitud de la ruta crítica: 12 días. Por lo tanto, la holgura será cero para las actividades de la ruta crítica. La tabla 20-2 presenta la holgura para cada una de las actividades del ejemplo. La actividad B tiene holgura de un día; las actividades E y F tienen dos días de holgura; y las actividades A, C y D

Tabla 20-2 Holgura de actividades

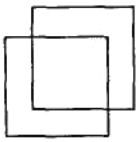
Actividad	*LS*	*ES*	*Holgura*
A	0	0	0
B	3	2	1
C	2	2	0
D	6	6	0
E	2	0	2
F	4	2	2

no tienen holgura. Si se establece que el límite del proyecto es igual a la longitud de la ruta crítica, todas las actividades con holgura cero deben estar en ruta crítica, ya que la definición de ruta crítica implica que cualquier demora en una actividad crítica retrasará el proyecto. Ala inversa: cualquier actividad con holgura positiva puede atrasarse más allá de su *ES* en una cantidad de tiempo menor o igual a la holgura, pues dicha demora no tendrá efecto en la duración del proyecto total.

El concepto de holgura de una actividad supone que todas las demás actividades se cumplen en sus tiempos planificados. Por lo tanto, si hay varias actividades en serie, la holgura se "comparte" entre ellas. Si una de estas actividades utiliza su holgura, las demás actividades de la secuencia ya no tendrán holgura. En el ejemplo, las actividades E y F comparten dos días de holgura.

El algoritmo para calcular la holgura y encontrar la ruta crítica de un diagrama de red se ha programado para cálculos en computador y existen varios paquetes de *software* disponibles para computadores personales o de gran tamaño. Estos paquetes ofrecen varias opciones además del cálculo de la ruta crítica. Por ejemplo, el programa puede presentar en pantalla el diagrama de red o imprimirlo. La mayoría de los programas también incorporan otros aspectos de la dirección de proyectos, como el registro de presupuestos para las tareas y la definición de responsabilidades para cada tarea, así como la función de indicar si se han cumplido los presupuestos y la de crear diagramas que muestren la secuencia de tiempo de los proyectos.

RESUMEN



Un diagrama de red muestra las diversas tareas de un proyecto, con arcos que indican cuáles son las actividades que deben preceder a otras. Los tiempos *ES, EF, LS* y *LF* son el menor y el mayor tiempo de inicio y de terminación de una actividad. Los tiempos *ES* y *EF* se obtienen recorriendo la red, a partir de la primera tarea. En cada una de las actividades, el *ES* es el mayor de los tiempos *EF* de las actividades precedentes y el *EF* es el *ES* más el tiempo de la actividad. El *EF* de la última tarea es el tiempo mínimo para concluir el proyecto.

Los tiempos *LS y LF* se obtienen recorriendo la red hacia atrás. En cada una de las actividades, el *LS* es el *LF* menos el tiempo de la actividad y el *LF* es el menor *LS* de las actividades sucesoras inmediatas.

El tiempo de holgura es la diferencia entre el *ES* y el *LS* de cada actividad. Las actividades con holgura cero están en la ruta crítica.

Tabla 20-3 Tiempos y costos de actividades

	Tiempo requerido		*Costo (dólares)*	
Actividad	*Programa normal*	*Programa urgente*	*Programa normal*	*Programa urgente*
A	2	½	$ 100	$ 150
B	3	2	200	250
C	4	3	300	375
D	6	4 ½	500	740
E	2	1 ½	180	210
F	8	5 ½	1 000	1 200
			$2 280	$2 925

Compensaciones entre tiempo y costo

En el análisis anterior se ha supuesto que el tiempo necesario para completar una actividad era fijo. En ocasiones esto es cierto; pero lo más común es que la gerencia altere el tiempo necesario para concluir la actividad asignando más recursos a la tarea. Por ejemplo, se pueden asignar seis días a una actividad, como pintar una casa; este tiempo se puede reducir si se asignan más pintores a la tarea o se les pide que trabajen tiempo extra. De esta manera se puede reducir el tiempo de la mayoría de las actividades, casi siempre con un incremento en el costo.[4] En esta sección se verá cómo puede un gerente asignar recursos para reducir el tiempo total del proyecto.

Para ello, consideremos el mismo ejemplo que se utilizó antes, pero ahora incorporamos la posibilidad de que cada actividad se pueda realizar en forma "urgente" o rápida.[5] Los tiempos y los costos de los programas normal y urgente se presentan en la tabla 20-3.

Recuerde que la ruta crítica es *ACD* y tiene longitud de 12 días, con base en la hipótesis de que se usan los programas normales para cada actividad. En este caso es posible obtener el costo sumando las cifras de la cuarta columna de la tabla 20-3, siendo un total de 2280 dólares. Suponga ahora que, según el gerente del proyecto, 12 días son demasiados y que el proyecto debe concluir en menos tiempo. Se puede obtener una reducción en el tiempo de terminación del proyecto

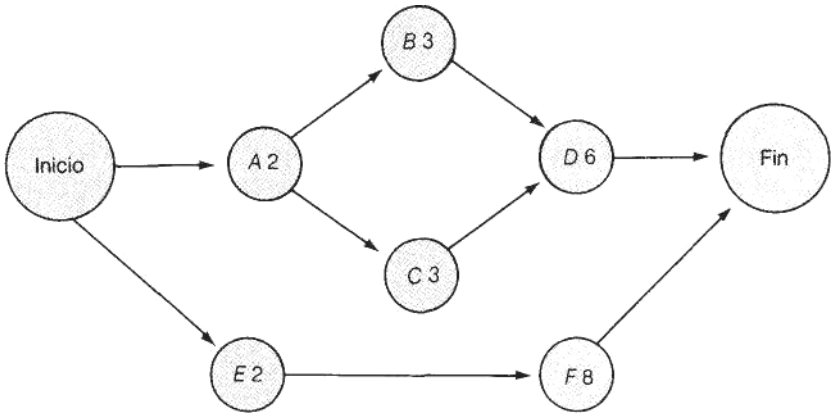
[4] Observe que ahora se supone que los tiempos de actividades son controlables pero aún son deterministas, es decir, no tienen componentes aleatorios. El segundo caso considerará la situación en la cual los tiempos de actividad son variables aleatorias.

[5] Aquí se supondrá que una actividad se realiza en forma urgente o normal. La urgencia de una actividad puede realizarse en forma proporcional (por ejemplo, un esfuerzo de urgencia del 40%) y es entonces posible formular el problema determinista de compensación entre tiempo y costo (caso I) como un problema de programación lineal; véase J. O. McClain *y* L. J. Thomas, *Operations Management: Production of Goods and Services,* segunda edición (Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1985), cap. 3.

Tabla 20-4 Costos increméntales del programa urgente

Actividad	*Días de reducción debidas al programa urgente*	*Costo incremental del programa urgente*	*Costo incremental por día de reducción*
A	½	$ 50	$100
C	1	75	75
D	1½	240	160

Figura 20-4 Red con la actividad C reducida a tres días



si algunas actividades se realizan en forma urgente, incurriendo en el costo correspondiente. ¿Cuáles son las actividades que deben efectuarse de manera urgente?

Las actividades que *no* están en la ruta crítica ya tienen tiempo de holgura, y si se reduce el tiempo necesario para dichas actividades no habrá ningún efecto en el tiempo total del proyecto. Por lo tanto, el gerente sólo tiene que revisar las actividades que se encuentran *en* la ruta crítica. Al reducir el tiempo de cualquier actividad de la ruta crítica se reducirá el tiempo total del proyecto. En la tabla 20-4 se muestran las tres actividades de la ruta crítica, sus ahorros increméntales, en días, correspondientes a programas urgentes y los costos increméntales.

La última columna de la tabla 20-4 contiene el costo incremental por día de reducción. Este costo se obtiene de la división del costo incremental del programa urgente para cada actividad entre el número de días de reducción. A partir de la tabla 20-4 se observa que la actividad que se puede reducir con el menor costo diario es C. El costo por día es sólo de 75 dólares, comparado con 100 y 160 dólares para las actividades A y D, respectivamente. Si la actividad C se realiza en forma urgente, se reduce en un día el tiempo total para la culminación del proyecto. La red es ahora la que se muestra en la figura 20-4. Las dos rutas, *ACD*

Tabla 20-5 Rutas críticas y costos para programas alternativos

Actividades en:			*Tiempo de*	*Costos*
Programa normal	*Programa urgente*	*Ruta(s) críticas*	*terminación del proyecto*	*totales del proyecto*
Todas	Ninguna	*ACD*	12	$2 280
A, B, D, E, F	C	*ABD, ACD*	11	2 355
B, D, E, F	A, C	*ABD, ACD*	10 ½	2 405
B, C, E, F	A, D	*ACD, EF*	10	2 570
A, B, F	C, D, E	*ABD, ACD, EF*	9 ½	2 625
B, E	A, C, D, F	*ABD, ACD*	9	2 845

y *ABD,* son ahora críticas, ambas con longitud de 11 días. El costo de este programa urgente es de 2355 dólares; los 75 dólares adicionales corresponden al costo incremental de poner la actividad C en un programa urgente.

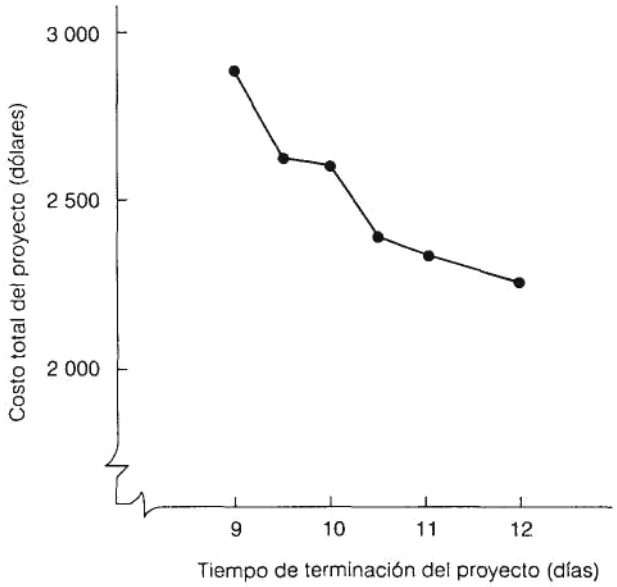
Si el gerente deseara reducir más el tiempo de terminación del proyecto, puede colocar más actividades sobre una base urgente. Las actividades críticas son ahora A, B, C y D. La actividad C no puede reducirse más. Si se reduce B, la ruta *ABD* sería más breve, pero la ruta *ACD* no tendría cambios y seguiría con longitud de 11 días, con lo cual no se reduce el tiempo total del proyecto. La única manera de reducir el tiempo del proyecto sería a través de la reducción de las actividades A o D. En la tabla 20-4 se observa que la actividad A es la menos costosa. La reducción asciende a medio día, con costo adicional de 50 dólares, con lo cual el costo se eleva a 2405 dólares. Las dos reducciones se resumen en la segunda y en la tercera columnas de la tabla 20-5.

Si el gerente quisiera reducir más el tiempo del proyecto, la actividad D se haría en forma urgente. Pero con esto se eliminaría la necesidad de que *tanto* A *como* C fueran urgentes, ya que la ruta crítica cambiaría a *EF;* la ruta *EF* requiere 10 días, mientras que si se efectúan A, C y D en forma urgente, la ruta *ACD* sólo necesita nueve días. Por ello, después de decidir llevar a cabo urgentemente la actividad D para reducir el tiempo del proyecto a menos de 10 ½ días, el gerente debe revisar las actividades urgentes A y C para determinar cuáles deben regresar al programa normal.

Suponiendo que D y C se realizan de manera urgente (pero no A), la ruta *ACD* requiere *9 ½* días y la ruta *EF* con 10 días es la ruta crítica; el costo de realizar D y C de manera urgente es $2280 + $75 + $240 = $2595. Suponga que D y A se hacen en forma urgente y C se restringe al programa normal; entonces, la ruta *ACD* requiere 10 días y hay dos rutas críticas: *ACD y EF.* El costo del programa urgente para A y D es $2280 + $50 + $240 = $2570. Por lo tanto, para un objetivo de 10 días de proyecto, esta alternativa lo cumple con menor costo. Este ejemplo ilustra la complejidad de determinar las compensaciones óptimas entre tiempo y costo.

Como ahora hay dos rutas críticas (*ACD* y *EF),* el gerente debe reducir al mismo tiempo *ambas* rutas para reducir aun más el tiempo del proyecto. Consi-

Figura 20-5 Compensaciones entre tiempo y costo



dere las rutas una por una. Para la ruta *EF,* la actividad *E* se puede reducir en medio día a un costo de 60 dólares por día; o bien, se puede reducir F en 2 ½ días a un costo de 80 dólares por día. La actividad E es la menos costosa y el gerente, tentativamente, considera colocar la actividad E en un programa urgente. Como esto reduce la ruta *EF* a 9 ½ días, el gerente considera la manera de reducir la *mtaACD* a 9 Vi días (o menos). La ruta *ACD* requerirá exactamente 9 ½ días si las actividades C y D se efectúan en forma urgente. Ahora hay que revisar si alguna otra ruta resulta ahora crítica. Si las actividades C, D y E se colocan en un programa urgente, entonces la ruta *ABD* resulta crítica con un tiempo de 9 Vi días. La quinta columna de la tabla 20-5 muestra esta situación. Ahora las tres rutas son críticas; de el tiempo total del proyecto es 9 ½ días y el costo total es de 2625 dólares.

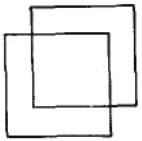
Para reducir más el tiempo del proyecto, es necesario reducir simultáneamente las tres rutas críticas. Esto se puede lograr si las actividades A y F se realizan en forma urgente. Observe que una vez que se reduce la actividad F, la actividad E puede regresar al programa regular. La sexta línea de la tabla 20-5 indica esta situación. El tiempo total del proyecto es de nueve días, con costo total de 2845 dólares. Ya no es posible reducir más el tiempo del proyecto. Las actividades B y E están en programas regulares; todas las demás son urgentes.

La figura 20-5 resume los resultados del análisis. La curva se puede llamar **curva de compensaciones entre tiempo y costo,** ya que indica que el gerente

puede tener distintos tiempos de conclusión del proyecto dependiendo de cuánto esté dispuesta a pagar la empresa.[6]

La determinación de las concesiones entre tiempo y costo se ha simplificado, a propósito, para aumentar el conocimiento de lo que sucede. Pero no hay ninguna razón para considerar sólo dos programas para cada actividad. Es posible tener varios niveles alternativos, además de los programas normal y urgente. De hecho, se puede suponer que hay un continuo de posibilidades, expresado con una línea recta o con cualquier otra curva situada entre el costo y el tiempo de los programas normal y urgente. Algunos programas de computación para PERT o ruta crítica permiten que el usuario encuentre estas alternativas de concesión o asignación de recursos como parte de la solución de la red de la ruta crítica.

RESUMEN



La gerencia puede asignar recursos e incurrir en gastos adicionales para reducir el tiempo total del proyecto. Al reducir selectivamente el tiempo de las actividades de la ruta crítica con el menor costo incremental, se puede desarrollar la función óptima de compensación que relaciona el tiempo y el costo del proyecto.

Caso II: Tiempos de actividad inciertos

Ahora haremos una hipótesis más realista acerca de los tiempos de actividad: que no son conocidos (o controlables) con certeza. Suponga que los tiempos de actividades se tratan como variables aleatorias. Entonces, será necesario obtener información acerca de las funciones de densidad de probabilidad de estas variables aleatorias antes de poder manipularlas. Una técnica para obtener esta información se denomina: método de estimación múltiple o de varias estimaciones.

Estimaciones múltiples para tiempos inciertos de actividad

En lugar de pedir directamente una estimación del tiempo esperado para una actividad, se solicitan tres estimaciones, de la siguiente manera:

a_i = Tiempo más optimista para la actividad i
b_i = Tiempo más pesimista para la actividad i
m_i = Tiempo más probable para la actividad i (es decir, la moda)

Después se usa la ecuación 20-1 para estimar el tiempo esperado (media) para la actividad:

$$t_i = (1/6)(a_i + 4m_i + b_i) \qquad \textbf{(20–1)}$$

[6] Con la hipótesis de que una actividad está en un programa urgente o en uno normal, las únicas alternativas factibles son los puntos que se indican en la figura 20-5. Las líneas que unen los puntos se representan únicamente para dar un efecto adecuado al gráfico.

donde t_i es el tiempo esperado de la actividad. Por ejemplo, suponga que las estimaciones para la actividad B son:

$$a_B = 1$$
$$b_B = 8$$
$$m_B = 3$$

El tiempo esperado para la actividad B es entonces:

$$t_B = (1/6)(1 + 4 \cdot 3 + 8) = (1/6)(21) = 3.5$$

La estimación modal o más probable para la actividad B es 3, pero el tiempo esperado para su terminación es 3.5. Esto se debe a que la estimación del tiempo pesimista es bastante grande. Se usa la fórmula para el tiempo esperado de la ecuación 20-1 porque aproxima la media de una distribución beta cuyos extremos son a_i y b_i y cuya moda es m_i. No es posible justificar la utilización de la distribución beta en forma rigurosa, pero la distribución tiene las siguientes características: es unimodal, es continua y tiene un intervalo finito. Intuitivamente, la fórmula de la ecuación 20-1 otorga cierto peso a los extremos (a_i y b_i) y a la moda (m_i) al calcular la media del tiempo de terminación.[7]

El método de estimaciones múltiples supuestamente produce mejores estimaciones del tiempo esperado para concluir una actividad. En la práctica, no parece que este método lleve a un mejor valor esperado que el de una sola estimación; sin embargo, permite considerar la variabilidad en el tiempo de conclusión de una actividad. La ecuación 20-2 se usa para estimar la desviación estándar del tiempo requerido para completar una actividad, con base en las estimaciones de tiempo optimista y pesimista:

$$\sigma_i = (1/6)(b_i - a_i) \qquad \textbf{(20–2)}$$

donde σ_i representa la desviación estándar del tiempo requerido para concluir la actividad *i*. Una vez más, esta fórmula es sólo una aproximación que se usa si el tiempo para completar la actividad tiene una distribución beta. La desviación estándar es importante porque se puede calcular para cada actividad de una ruta y así obtener una estimación de la desviación estándar de la duración de la ruta. Suponga, por ejemplo, que se efectúan las estimaciones de la tabla 20-6 para el proyecto del ejemplo. Las cifras de la tabla se eligieron de forma que el tiempo estimado, t_i, fuera el mismo que el de las estimaciones iniciales de la figura 20-1. De esta manera, la ruta crítica aún es *ACD,* con una duración esperada de 12 días. La ruta *ABD* tiene una duración esperada de 11 días; y la ruta *EF,* de 10 días. La tabla 20-6 contiene el tiempo esperado para cada actividad y la desviación estándar del tiempo para cada una.

---

[7] Sasieni demostró hace poco que la conocida fórmula de la ecuación 20-1 no puede derivarse en forma general de la distribución beta; véase M. W. Sasieni, "A Note on PERT Times", *Management Science* 32, núm. 12, diciembre de 1986, págs. 1652-1653. Por lo tanto, la ecuación 20-1 debe interpretarse como un modo razonable de estimar el tiempo de actividad esperado a partir de tres estimaciones distintas, a_1, b_1, y m_1.

Tabla 20-6 Estimaciones múltiples de tiempo

Actividad	a_i	b_i	m_i	t_i	$\sigma_i = (1/6)(b_i - a_i)$	σ_i^2
A	1	3	2	2	0.33	0.11
B	1	5	3	3	0.67	0.45
C	2	6	4	4	0.67	0.45
D	4	8	6	6	0.67	0.45
E	1	3	2	2	0.33	0.11
F	1	15	8	8	2.33	5.43

Algunos autores recomiendan que se calcule la desviación estándar de la longitud de cada ruta. Si comenzamos por la ruta crítica y suponemos que los tiempos de actividades son variables aleatorias independientes, la varianza del tiempo para concluir la ruta crítica se puede calcular como la suma de las varianzas de las actividades en la ruta crítica.[8] En el ejemplo, la ruta crítica es *ACD*. Si se suman las varianzas de las actividades de la ruta, se obtiene:

$$\sigma^2_{ACD} = 0.11 + 0.45 + 0.45 = 1.01$$

La desviación estándar de la longitud de la ruta *ACD* es:

$$\sigma_{ACD} = \sqrt{1.01} = 1.005$$

Si la ruta crítica contiene gran número de actividades independientes, se puede suponer que la distribución del tiempo total de la ruta es normal.[9] El ejemplo sólo tiene tres actividades, por lo que no sería muy apropiada la hipótesis de la normalidad; sin embargo, a efectos ilustrativos, los resultados se pueden interpretar de la siguiente manera: El tiempo que se requiere para completar la ruta *ACD* es una variable aleatoria normalmente distribuida con media de 12 días y desviación estándar de 1.005 días. Con base en esta información, es posible usar tablas de la distribución normal acumulada para formular enunciados de probabilidad acerca de los distintos tiempos de terminación de la ruta crítica.[10] Por ejemplo, la probabilidad de que la ruta *ACD* termine en 14 días es:

$$F\left(\frac{X - \mu}{\sigma}\right) = F\left(\frac{14 - 12}{1.005}\right) = F(2) = 0.977 \text{ de la tabla A}$$

Pero hay un grave problema al efectuar este tipo de análisis en la ruta crítica. Además de las dificultades que se presentan al suponer que todos los tiempos de

[8] La varianza de una suma de variables aleatorias equivale a la suma de las variables de cada variable aleatoria, si dichas variables son independientes. Véase capítulo 3.

[9] La suma de *n* variables aleatorias independientes con media y varianza finitas tiende a la normalidad por el teorema central del límite cuando *n* tiene a infinito. Véase capítulo 3.

[10] Véase el capítulo 7 para una revisión de la variable normal estandarizada:

$$Z = \frac{X - \mu}{\sigma}$$

actividades son independientes y tienen distribución beta, no siempre es cierto que la ruta *esperada* más larga (es decir, la ruta crítica) sea la mayor *ruta* real. En el ejemplo, la ruta *EF,* no crítica, tiene longitud esperada de 10 días. La varianza de la ruta es:

$$\sigma^2_{EF} = 0.11 + 5.43 = 5.54$$

La desviación estándar es:

$$\sigma_{EF} = \sqrt{5.54} = 2.35$$

Si suponemos que la distribución de la longitud de la ruta *EF* es normal, la probabilidad de que la ruta *EF* concluya en 14 días es:

$$F\left(\frac{14 - 10}{2.35}\right) = F(1.70) = 0.955 \text{ de la tabla A.}$$

Hay que concluir la ruta *ACD y* la ruta EF en 14 días para que el proyecto concluya en 14 días, ya que el proyecto no termina hasta completar todas las actividades. La probabilidad de que las dos rutas *(ACD y EF)* concluyan en 14 días es:

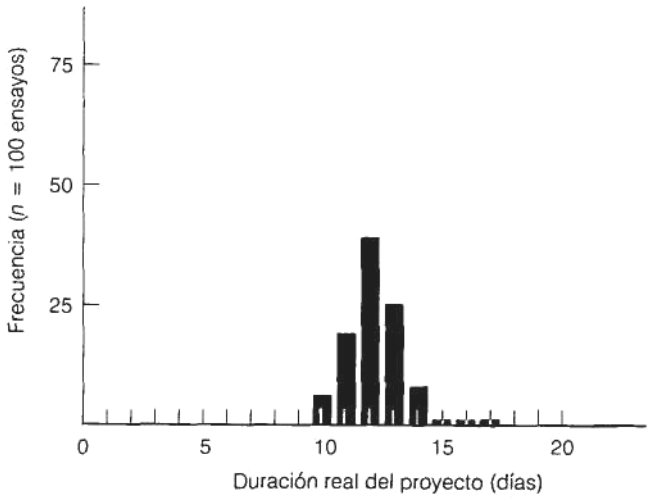
$$(0.977)(0.955) = 0.933$$

Si sólo hubiéramos considerado la ruta crítica, la probabilidad de no terminar el proyecto en 14 días habría sido 1 - 0.977 = 0.023. Después de considerar la ruta *EF,* la probabilidad de no concluir el proyecto en 14 días es 1 - 0.933 = 0.067, lo cual representa casi tres veces la probabilidad de que la ruta crítica no termine en dicho periodo. Otra manera de describir la situación es decir que si el proyecto tarda más de 14 días, la ruta *EF* tiene mayor probabilidad de ser la causante de la demora que la ruta *ACD.*

Hay otra dificultad. La ruta *ABD* podría también ser la más restrictiva y se podría calcular su varianza, como se hizo con las rutas *ACD y EF.* Pero hay dos actividades comunes en las rutas *ABD y ACD* (las actividades A y D) y por lo tanto las longitudes de ambas no son variables independientes. Para poder calcular la probabilidad de que *ABD y ACD* terminen en menos de 14 días hay que considerar la probabilidad conjunta de sucesos dependientes, lo cual está fuera del alcance de los métodos de cálculo que se presentan en este capítulo. Los problemas que han surgido en un ejemplo de proyecto con seis actividades aumentan considerablemente si se considera un proyecto real con cientos de actividades. En consecuencia, hay peligro al usar la media y la varianza de la longitud de la ruta crítica para estimar la probabilidad de que el proyecto termine en un periodo de tiempo específico. Debido a la posibilidad de que algunas rutas "no críticas" sean restrictivas, la estimación media del tiempo de terminación del proyecto que se obtiene al estudiar únicamente la ruta crítica es *demasiado optimista;* tiene sesgo y siempre tiende a *subestimar* el tiempo promedio de conclusión del proyecto.

Aunque el cálculo analítico de la distribución del tiempo de terminación de proyecto es muy difícil en una red de tamaño real, es bastante fácil usar la técnica

Figura 20-6 Distribución de frecuencias de la duración del proyecto



de la simulación de Montecarlo (véase Cap. 19) para obtener información acerca de la verosimilitud de la duración del proyecto cuando los tiempos de actividad son inciertos.

Simulación de redes PERT

Para superar el problema que se describió antes, es posible simular cualquier red PERT. En términos generales, los pasos serían:

1. Usar (por ejemplo) una distribución normal de los tiempos de cada actividad y la media y la desviación estándar de cada actividad, calculadas con las ecuaciones 20-1 y 20-2, para generar una variable aleatoria (una realización) del tiempo necesario para completar cada actividad de la red.
2. Tratar los tiempos generados como tiempos reales para cada actividad y usar el algoritmo de la ruta crítica que se describió previamente para encontrar la "ruta crítica real" *(ex post)* y la duración real del proyecto.
3. Repetir los pasos 1 y 2 para un gran número de ensayos, registrando un histograma de los tiempos de conclusión del proyecto y del porcentaje de tiempo que cada actividad estuvo en la ruta crítica *ex post.*

Ejemplo Suponga que se lleva a cabo una simulación 100 veces para la red muestral que se usó como ejemplo en el capítulo, con medias y desviaciones estándar de la tabla 20-6. La figura 20-6 contiene un histograma representativo de los que se podrían obtener de la simulación. Aunque la información que contiene la figura 20-6 sería útil para decidir si el riesgo de retraso del proyecto es tolerable, no sirve directa-

Tabla 20-7 Porcentaje del tiempo en el cual las actividades fueron críticas

A	71%
B	5
C	66
D	71
E	30
F	30

Tabla 20-8 Porcentaje del tiempo en el cual las actividades fueron críticas, dada una duración de proyecto mayor de 12 días

A	49%
B	3
C	46
D	49
E	54
F	54

mente para decidir cómo reducir las actividades de forma que se acelere el proyecto. Para ello, la simulación puede registrar el porcentaje de veces que cada actividad estuvo en la ruta crítica *expost* (es decir, la ruta que ciertamente resultó crítica en una sesión de simulación). La tabla 20-7 es un ejemplo de este registro.

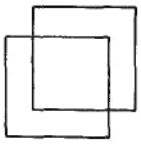
Las actividades E y F constituyen un ruta crítica potencial y, por consiguiente, tienen porcentajes idénticos en la tabla 20-7. Las actividades A y D están en serie en dos rutas *(ABD y ACD),* por lo que también tienen porcentajes idénticos. Las actividades B y C están en paralelo y, por lo tanto, la suma de sus porcentajes (5% + 66%) debe dar 71%, el porcentaje de las actividades A y D en serie con el enlace paralelo B-C.[11]

La tabla 20-7 se calculó con los resultados de toda la simulación. Al decidir cuáles actividades deben realizarse en forma urgente para reducir el tiempo de terminación del proyecto, tiene sentido considerar únicamente los resultados de la simulación para los que el proyecto se retrasó más allá de la meta deseada. Si se consideran 12 días (la longitud esperada de la "ruta crítica") como objetivo, la tabla 20-8 contiene datos ilustrativos del porcentaje de tiempo en el que cada actividad fue crítica, *si el proyecto requirió más de 12 días para terminar.* Observe que estos porcentajes serán diferentes de los de la tabla 20-7. Como no interesa reducir un proyecto si termina antes de la fecha esperada, los resultados de la tabla 20-8 serían más útiles para determinar cuáles actividades se podrían colocar en programas urgentes para obtener la mayor reducción en las demoras que superasen los 12 días.

[11] Esta situación sólo es verdadera si no es posible que ambas rutas, *ABD* y *ACD,* sean críticas.

En el caso de una red de gran tamaño, una simulación del programa normal produciría un histograma como el de la figura 20-6. Si fuera necesario mejorar el rendimiento del proyecto, el estudio de una tabla semejante a la 20-8 indicaría el conjunto de actividades que, en promedio, ocasionan demoras en diversos porcentajes del tiempo. Entonces, después de reducir algunas de las "actividades críticas", se podría repetir la simulación para ver si ha mejorado lo suficiente el rendimiento del proyecto.

RESUMEN



Si los tiempos de actividad de una red PERT son inciertos, la longitud de la ruta crítica calculada con estimaciones deterministas subestimará el tiempo esperado verdadero del proyecto. Mediante la simulación se pueden obtener la distribución de probabilidad del tiempo real del proyecto y la probabilidad de que cada actividad esté en la ruta crítica real *ex post.* Si se condiciona al retraso del proyecto, la simulación también puede indicar el porcentaje del tiempo que cada actividad estuvo en la ruta crítica real.

Evaluación de PERT

El método PERT obliga al planificador a especificar con detalle el conjunto de actividades que constituyen un proyecto, a estimar sus tiempos y a establecer sus requisitos de secuencia. La construcción del diagrama de red muchas veces puede señalar problemas en el proyecto. Si la ruta crítica es mayor que lo deseado, se puede planificar de nuevo el proyecto y asignar más recursos a las actividades críticas. Una vez iniciado el proyecto, el método PERT puede servir para proporcionar informes periódicos acerca del estado del proyecto, incluyendo los cambios en la ruta crítica. Si hay una ruta que sea casi crítica, el método PERT puede facilitar esta información al señalar las actividades con poca holgura.

Las estimaciones de tiempo para la realización de actividades constituyen un problema potencial en el método PERT. Si las estimaciones de tiempo son deficientes, el diagrama de red inicial y la ruta crítica inicial tendrán poco significado real al comenzar el proyecto. Así mismo, si hay incertidumbre con respecto al tiempo que tardaría la conclusión de las tareas, hay que considerar esta incertidumbre al estimar la probabilidad de terminación del proyecto en un periodo determinado. Como se vio, se puede calcular la probabilidad de terminar la "ruta crítica" en un tiempo determinado si los tiempos de actividad son aleatorios; pero con estos tiempos, la ruta crítica real *ex post* puede ser distinta de la ruta crítica *ex ante.* La mejor forma de tratar esta complejidad es la simulación de la red. En la simulación se pueden estimar la probabilidad del retraso del proyecto y la probabilidad de que cada actividad sea "crítica", lo cual sirve como guía para el planificador del proyecto.

Por último, el método PERT sencillo no considera los recursos que se requieren en distintas etapas del proyecto. Por ejemplo, si hay que emplear cierto recurso para efectuar las actividades B y C del ejemplo, y sólo puede usarse en una actividad a la vez, el diagrama de la figura 20-3 no es factible porque la actividad C no se puede llevar a cabo en paralelo con la actividad B. Se han desarrollado

varias extensiones de el método PERT que permiten las restricciones de recursos y que llevan el control de los costos y el tiempo conforme avanza el proyecto.

Varios gerentes de proyecto con experiencia en el uso de PERT y CPM opinan que las ventajas principales del método se encuentran en la etapa de planificación del proyecto. Para usar PERT como control activo de un proyecto es necesario actualizar y ejecutar de nuevo los cálculos PERT con mucha frecuencia, a la vez que una sencilla gráfica de barras que registre el avance puede ser un registro adecuado para fines de control, con costo mucho menor.

Bibliografía

Cleland, D. I. y W. R. King, editores, *Project Management Handbook,* Nueva York, Van Nostrand Reinhold, 1983.

Elmaghraby, S. E., *Activity Networks: Project Planiiing and Control by Network Flows,* Nueva York, John Wiley & Sons, 1977.

McClain, J. O. y L. J. Thomas, *Operations Management: Production ofGoods and Services,* segunda edición, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1985.

Moder, J., C. R. Phillips y E. W. Davis, *Project Management with CPM, PERT, and PRECEDENCE Diagramming,* tercera edición, Nueva York, Van Nostrand Reinhold, 1983.

Wiest, J. D. y F. K. Levy, *A Management Guide to PERT/CPM,* segunda edición, Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1977.

Problemas con respuestas

20-1. Considere los siguientes datos para las actividades de un proyecto:

Actividad	*Predecesores inmediatos*	*Tiempo estimado (días)*
A	—	5
B	A	4
C	—	7
D	B, C	3
E	B	4
F	D, E	2

a. Elabore un diagrama de red para el proyecto.

b. Calcule *ES, EF, LS* y *LF* de cada actividad, suponiendo que el *EF y* el *LF* de la última actividad son iguales. ¿Cuál es el tiempo mínimo para la termina ción del proyecto?

c. Elabore una lista de las actividades que se encuentran en la ruta crítica.

20-2. Considere los datos del problema 20-1, pero suponga ahora que la actividad C requiere nueve días en lugar de siete.

a. ¿Cambia la ruta crítica?

b. Si la actividad C requiriera 11 días para terminar, ¿cambiaría la ruta crítica?

20-3. Usted recibe los siguientes datos que se relacionan con las actividades de un proyecto (los números se refieren a días):

Actividad	*Predecesor inmediato*	a_i	b_i	m_i
A		2	6	4
B	—	6	10	8
C	A	1	15	5
D	C	1	9	5
E	B	6	10	8

a. Calcule el valor esperado (t_i) y la varianza $(\sigma,^2)$ del tiempo necesario para completar cada actividad.
b. Elabore un diagrama de red y encuentre la ruta crítica, por inspección. ¿Cuál es la longitud esperada de la ruta crítica?
c. Suponga que el tiempo requerido para completar una ruta se distribuye normalmente. Calcule la probabilidad de que la ruta *ACD* termine en menos de 16 días. Calcule también la probabilidad de que la ruta *BE* termine en menos de 16 días.
d. ¿Cuál es la probabilidad de que el proyecto concluya en menos de 16 días?

Problemas

20-4. La tabla siguiente contiene una lista de las actividades y los requisitos de secuencia, las cuales comprenden las actividades necesarias para la elaboración de una tesis.

a. Dibuje un diagrama de red que ilustre los requisitos de secuencia para el conjunto de actividades de la tabla. Asegúrese de representar las actividades con círculos y los requisitos de secuencia con flechas.
b. Calcule *ES, EF, LS y LF* de cada actividad, suponiendo que el *EF* y el *LF* de la última actividad con iguales. ¿Cuál es el tiempo mínimo para concluir el proyecto?
c. Indique cuáles son las actividades que se encuentran en la ruta crítica.

(para el problema 20-4)

Actividad	*Descripción*	*Actividad previa requerida*	*Tiempo esperado (semanas)*
A	Investigación literaria	Ninguna	6
B	Formulación de temas	Ninguna	**5**
C	Selección de comité	B	**2**
D	Propuesta formal	C	**2**
E	Selección de la compañía y contacto	A, D	**2**
F	Informe de avances	D	1
G	Investigación formal	A, D	**6**
H	Recopilación de datos	E	**5**
I	Análisis de datos	G, H	6
J	Conclusiones	I	**2**
K	Borrador (sin conclusiones)	G	**4**
L	Versión final	J, K	**3**
M	Examen oral	L	**1**

20-5. Considere los siguientes datos para un proyecto:

Actividad	*Predecesor inmediato*	t_i *(días)*	σ_i
A	-	4.0	0
B	**A**	6.0	1.0
C	**A**	3.0	0
D	**C**	7.0	1.0
E	**B, C**	2.0	2.0

a. Dibuje un diagrama de red para el proyecto.

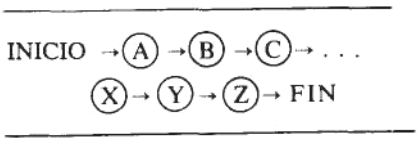
b. Encuentre la "ruta crítica" *(ex ante)* por inspección. ¿Cuál es su longitud esperada?

c. ¿Cuál es la probabilidad de que la ruta *ABE* termine en un máximo de 15 días, suponiendo que hay independencia en tre los tiempos de actividades?

d. ¿Cuál es la probabilidad de que todo el proyecto concluya en un máximo de 15 días?

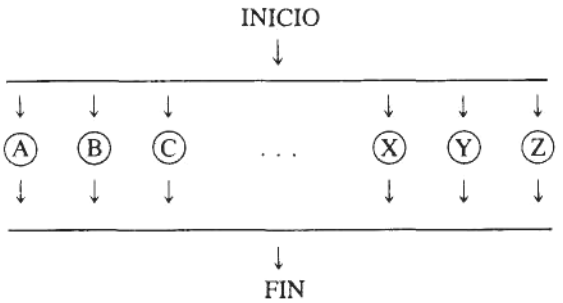
20-6. Considere la estimación de la duración total del proyecto de acuerdo con los cálculos del algoritmo PERT habitual (sumar las estimaciones de tiempo esperado de todas las actividades que se encuentran en la ruta crítica).

a. Suponga que trabaja una red "en serie" pura:



¿Puede plantear lógicamente que la estimación PERT de la duración total del proyecto no tiene sesgo? *Recomendación:* Recuerde que el valor esperado de una suma es igual a la suma de los valores esperados.

b. Suponga que trabaja con una red "en paralelo" pura (figura de la derecha). Suponga que todas las actividades de la red tienen el mismo tiempo esperado



de terminación. ¿Puede plantear lógicamente que la estimación PERT de la duración total del proyecto tiene sesgo en este caso? ¿Qué dirección tiene el sesgo?

c. A partir de su conclusión de *(a) y (b),* haga una generalización válida acerca del sesgo (o de la carencia de sesgo) inherente en una estimación de duración de proyecto PERT cuando se trata de una red grande y compleja que combine actividades en serie y en paralelo.

20-7. Un proyecto se caracteriza por las actividades A a F. Las actividades predecesores y los tiempos requeridos, así como los costos de un programa normal o urgente para cada actividad, se presentan en la tabla de abajo.

a. Use únicamente los tiempos para los programas de actividad normales y di buje una red PERT para este problema. ¿Cuál es la ruta crítica? ¿Cuánto tarda rá en terminar todo el proyecto?

b. ¿Cuál es el costo del proyecto de acuerdo con (∧)?

(para el problema 20-7)

		Tiempo (semanas)		*Costo (miles de dólares)*	
Actividad	*Actividades predecesoras*	*Programa normal*	*Programa urgente*	*Programa normal*	*Programa urgente*
A (inicio)	_____	0	__	0	__
B	A	5	3	10	22
C	A	2	1	6	15
D	B, C	3	2	6	15
E	B	4	2	10	25
F (fin)	D, E	0	—	0	—

c. Encuentre los puntos posibles de compensación entre tiempo y costo. ¿Cuál es el tiempo mínimo para concluir el proyecto? ¿Cuál es el costo de este programa?

Problemas más difíciles

20-8. Ocean Hardware Company era una cadena de tiendas de ferretería y artículos domésticos al por menor. La compañía quería introducir un nuevo sistema de computación para elaborar la nómina de la compañía, para realizar la contabilidad de ventas (pago de compras y envío de facturas) y el control de inventarios. El controlador de la compañía trataba de establecer un programa para las diversas tareas necesarias para poner en marcha el nuevo sistema de computación. La compañía pensaba contratar programadores para desarrollar los programas de nómina y contabilidad. Sin embargo, se contrataría una empresa de consultoría externa para elaborar el programa de control de inventarios. Algunos aspectos del programa de control de inventarios dependían del programa de contabilidad y, por lo tanto, tenía que desarrollarse después de completar el programa de contabilidad.

Para concluir un programa se requería trabajo preliminar, trabajo final, pruebas, revisión, elaboración de manuales e implantación. El nuevo gerente de operaciones de cómputo identificó la lista de tareas

(para el problema 20-8)

Actividad	*Descripción*	*Actividad predecesora*	*Tiempo de terminación (meses)*
A	Analizar sistemas de computación alternativos y pedir el computador al fabricante		2
B	Esperar la entrega del computador	A	4
C	Contratar programadores	A	1
D	Realizar el trabajo preliminar del programa de nómina	C	1 ½
E	Realizar el trabajo preliminar del programa de contabilidad	C	2 ½
F	Efectuar el trabajo final de los programas de nómina y contabilidad	D, E	2
G	Contratar al consultor externo para trabajar en el programa de control de inventarios	A	1
H	Realizar el trabajo preliminar del programa de control de inventarios	E, G	2
I	Efectuar el trabajo final del programa de control de inventarios	F, H	2
J	Pruebas preliminares de los programas de nómina y contabilidad en una máquina alquilada	F	½
K	Modificar los programas de nómina y contabilidad	J	½
L	Instalar y probar el computador al recibirlo del fabricante	B	½
M	Probar los programas de nómina y contabilidad en el computador instalado	K, L	½
N	Preparar manuales que describan los programas de nómina y contabilidad	J	1
0	Implantar los programas de nómina y contabilidad	M, N	½
P	Probar el programa de control de inventarios en el computador instalado	1, L	½
Q	Preparar manuales que describan el programa de control de inventarios	I	1
R	Implantar el programa de control de inventarios	P.Q	½
S	Fin	0, R	0

(actividades) necesarias que se muestra en la tabla anterior, así como los tiempos requeridos para llevar a cabo cada una de las tareas y las actividades que tendrían que concluir antes de poder comenzar otra (actividades predecesoras).

a. ¿Cuánto tiempo se necesitará para que esté completo el sistema de computación con los tres programas? ¿Qué actividades son críticas para hacerlo en ese tiempo?

b. Suponga que a la dirección sólo le preocupa la minimización del tiempo para implantar los programas de nómina y contabilidad. ¿Cuánto tardaría? ¿Qué actividades son críticas en este caso?

20-9. Remítase al problema 20-3. Suponga, para fines de este, ejercicio, que el tiempo de actividad es igualmente probable entre sus estimaciones de tiempo a_i y b_i (es decir, no tome en cuenta la columna m_i, y considere que los tiempos de actividad se distribuyen uniformemente en el intervalo). Con base en una tabla de dígitos aleatorios (Tabla 19-2), realice una simulación manual de la red para 10 ensayos, registrando para cada uno de éstos el tiempo de terminación del proyecto y las actividades que eran críticas. ¿Cuáles actividades fueron críticas la mayor parte del tiempo? Calcule también el porcentaje de tiempo que fue crítica cada actividad, con la condición de que el proyecto se atrasará a más de 16 días.

20-10. En la figura adjunta se presenta la red para un proyecto. La t_i y la σ, que se indican entre paréntesis para cada nudo representan el tiempo esperado y la desviación estándar respectivos, en meses, de este segmento del proyecto.

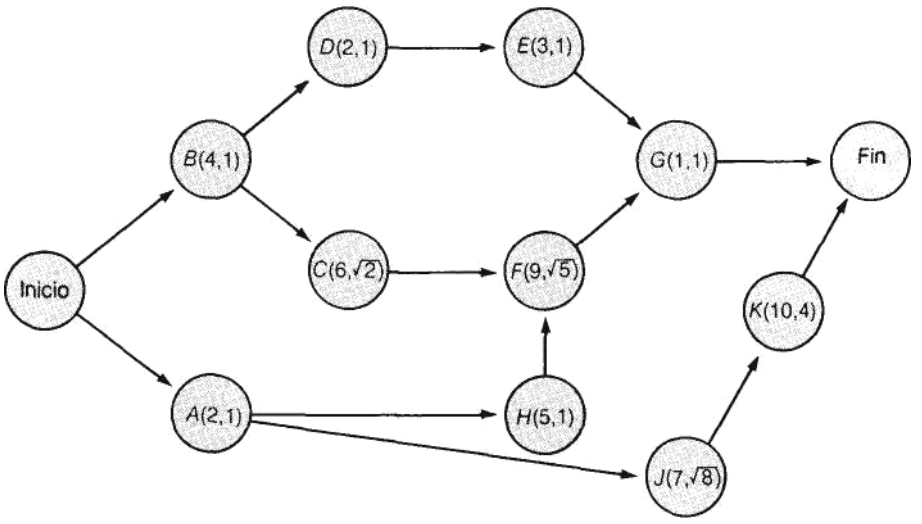
a. Identifique la ruta crítica y calcule su longitud esperada.

b. Suponiendo que la longitud de la "ruta crítica" se distribuye normalmente, calcule la probabilidad de que la *ruta* de (a) concluya en menos de 23 meses.

c. Terminará el *proyecto* en 23 meses
(1) ¿Con la misma probabilidad de (*b*)
(2) ¿Con menor probabilidad?
(3) ¿Con mayor probabilidad? ¿Por qué?

d. Suponga que quiere reducir la probabilidad de que el proyecto requiera más de 23 meses. Puede reducir *una* de las siguientes actividades, *y sólo una,* en un mes: A, C, E o H. ¿Cuál colocaría en un programa urgente? ¿Por qué? *Nota:* Suponga que la reducción disminui-

(para el problema 20-10)



ría el tiempo *medio* de la actividad en un mes y no alteraría la varianza.

20-11. En este proyecto, la reducción de actividades se puede aplicar en una amplia gama de tiempos de reducción. El costo por día de reducción es:

Actividad	*Predecesor inmediato*	*Normal normal (días)*	*Costo por día de reducción*	*Límite inferior del tiempo*
A	Ninguno	3	$450	1
B	Ninguno	4	300	2
C	A	3	200	I
D	E	2	100	1
E	A, B	2	500	1
F	C, D	4	600	3

Por ejemplo, la actividad C se puede reducir de su tiempo normal de tres días hasta un día, o a cualquier valor intermedio, con un costo de 200 dólares por día de reducción.

a. Dibuje un diagrama de red para este proyecto. ¿Cuál es la ruta crítica? ¿Cuánto duraría el proyecto si no hubiera actividades urgentes?

b. Determine la manera menos costosa de reducir las actividades para completar el proyecto en 11 días, en diez días, en nueve días y en ocho días. Dibuje sus resultados en un diagrama de compensaciones entre tiempos y costos.

c. Suponga que el tiempo límite para concluir el proyecto es de cinco días, y que se deberá pagar una multa de 500 dólares por cada día de retraso. ¿Cuál es el número de días óptimo para reducir el proyecto? ¿Por qué?

20-12. Una empresa construye una planta para producir un nuevo alimento congelado. Se han identificado las actividades y los tiempos estimados en la tabla de abajo y se han establecido las relaciones de precedencia. ¿Cuánto durará el proyecto? ¿Qué actividades están en las rutas críticas?

20-13. Un proyecto se compone de las cinco actividades mostradas en la tabla de la página 616.

(para el problema 20-12)

Actividad	*Descripción*	*Predecesores inmediatos*	*Tiempo estimado (meses)*
A	Diseño de ingeniería del edificio	Ninguno	1.5
B	Diseño de la línea productiva	Ninguno	1.0
C	Diseño del horno	B	2.0
D	Diseño del congelador	B	1.0
E	Diseño del equipo de empaquetado	C, D	1.0
F	Pedido y manufactura del horno	C	9.0
G	Pedido y manufactura del congelador	D	8.0
H	Pedido y manufactura del equipo de empaquetado	E	3.0
I	Envío y aceptación de propuestas para la construcción del edificio	A	2.0
J	Construcción del edificio (primera fase)	I	9.0
K	Construcción del edificio (segunda fase)	J	1.5
L	Instalación del horno	F, J	2.0
M	Instalación del congelador	J, L	0.5
N	Instalación del equipo de empaquetado	H, J	0.5
O	Pruebas de horneado	K, L	1.0
P	Pruebas de congelación	M, O	0.5
Q	Pruebas al sistema total	N, P	0.5
R	Inspección gubernamental	N, P	0.5

(para el problema 20-13)

	Tiempo en semanas							*Tiempo*	*Actividades*
Actividad	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	9	*10*	*esperado*	*predecesoras*
A	0.6	0.1	0.1	0.1	0.1			5	Ninguna
B		0.1	0.2	0.4	0.2	0.1		7	Ninguna
C		0.1	0.1	0.1	0.3	0.2	0.2	8	A, B
D	0.1	0.4	0.2	0.1	0.1	0.1		6	A, B
E	0.1	0.8	0.1					5	C, D

Se han determinado las probabilidades de duración en semanas para cada actividad, como se indica en la tabla. Así, por ejemplo, hay una probabilidad de 0.6 de que la actividad A tarde cuatro semanas; de 0.1 de que termine en cinco; de 0.1 de que concluya en seis; etcétera.

a. Dibuje la red del proyecto. Observe que hay cuatro rutas. Utilice los tiem pos esperados para calcular el tiempo de cada ruta. ¿Cuál es la ruta más larga o crítica que se espera?

b. Asigne números aleatorios a cada resultado (número de semanas) de las actividades de acuerdo con las probabilidades de la tabla (véase Cap. 19).

c. Utilice la tabla de números aleatorios (tabla 19-2) y seleccione al azar un tiempo para cada actividad. Calcule el tiempo para cada una de las cuatro rutas de la red y registre el tiempo de la ruta más larga y las actividades de dicha ruta.

d. Repita (c) 25-veces (o el número que le indique su instructor). Calcule el tiempo promedio para la ruta más larga. ¿Difiere de lo que calculó en *(a)*? ¿Por qué?

e. Calcule el porcentaje de tiempo durante el cual cada actividad estuvo en la ruta más larga.

f. Condicionado a que el proyecto dure más de 21 días, calcule el porcentaje de tiempo durante el cual cada actividad estuvo en la ruta más larga. Este problema requiere

20-14. comprender la formulación de un problema de programación lineal (véase Cap. 10). Considere el problema 20-11, en el cual las actividades se pueden colocar en programas urgentes en cualquier punto ubicado entre el tiempo normal y el límite inferior, en forma continua. Use la siguiente notación para formular el problema 20-11 como un problema de programación lineal. Notación:

N_i = Tiempo normal para la actividad i, $i = A, B, \ldots, F$

L_i = Límite inferior del tiempo para la actividad i

z_i = Costo por día para reducir el tiempo de la actividad i

X_i = Variable de decisión = tiempo permitido para la actividad i

ES_i = Menor tiempo de inicio para la actividad i

ES_G = Límite del proyecto (días) (trátese como una constante dada).

CAPÍTULO 21

Procesos de Markov

Algunas situaciones empresariales se pueden modelizar describiendo clases o estados separados, de manera que el sistema esté en un solo estado cada vez y que el cambio entre estados sea probabilístico. Por ejemplo, un cliente puede comprar detergente de la marca A, B o C, pero una compra comprenderá sólo una de las marcas. Si la probabilidad de que la siguiente compra sea de la marca A, B o C depende exclusivamente de la compra más reciente y no de las anteriores, se puede modelizar el comportamiento de compra del cliente como un proceso de Markov. Los procesos de Markov se pueden analizar para encontrar el comportamiento futuro a corto y a largo plazo, una vez que se ha especificado el proceso. En el ejemplo 1 se ilustra un proceso de Markov sencillo.

Ejemplo 1 Una máquina que produce piezas puede estar ajustada o desajustada. Si está ajustada, suponga que la probabilidad de que esté ajustada al día siguiente es de 0.7 y que la probabilidad de que no lo esté es 0.3. Si la máquina está desajustada, la probabilidad de que esté ajustada el día siguiente es 0.6 y la probabilidad de que no lo esté es de 0.4.[1] Si el estado 1 representa la situación en que la máquina *está ajustada* y el estado 2 representa el caso en que está *desajustada,* las probabilidades de cambio son las que se indican en la tabla 21-1. Observe que la suma de probabilidades de una fila es igual a 1.

El proceso se representa en la figura 21-1 con dos árboles de probabilidades, cuyas ramas ascendentes indican el paso al estado 1 y la ramas inferiores el cambio al estado 2.

Análisis a corto plazo

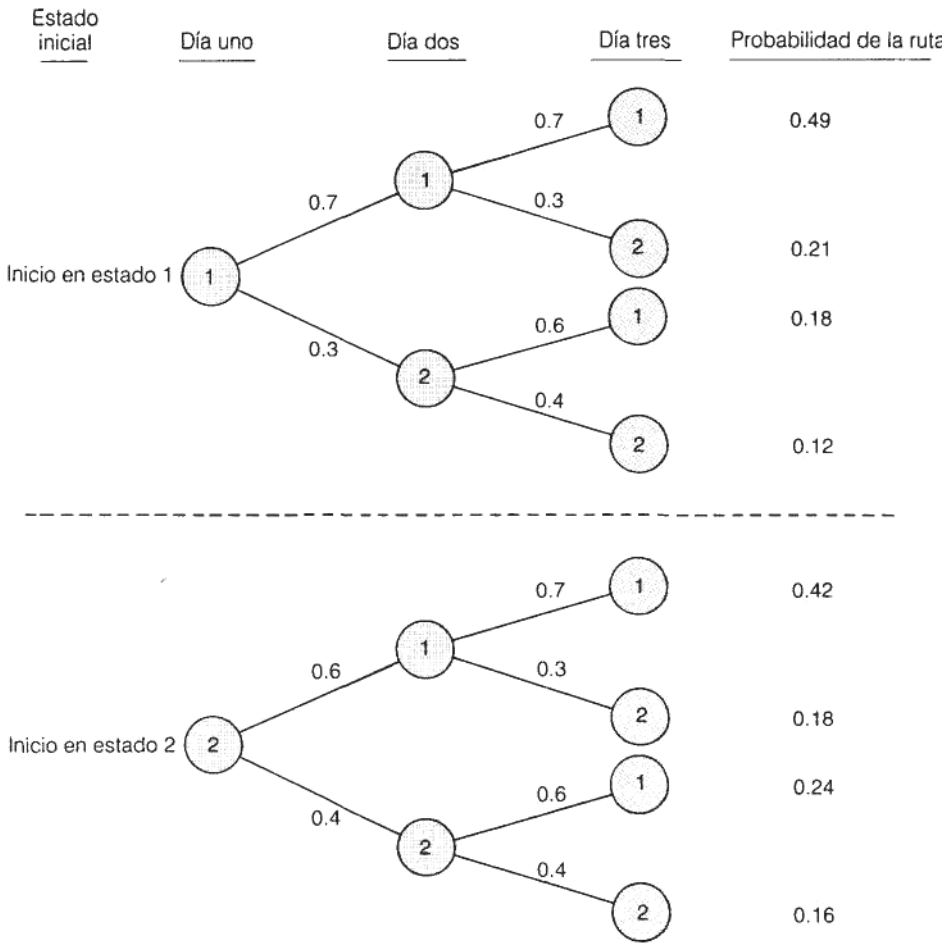
Suponga que la máquina inicia en el estado 1 (ajustada). La tabla 21-1 y la figura 21-1 indican que hay una probabilidad de 0.7 de que la máquina se encuentre en

[1] Suponga que la máquina tine un mecanismo de ajuste automático que no funciona correctamente.

Tabla 21-1 Probabilidades de cambio

De \ *A*	*Ajustada (estado 1)*	*No ajustada (estado 2)*
Ajustada (estado 1)	0.7	0.3
No ajustada (estado 2)	0.6	0.4

Figura 21-1



el estado 1 en el segundo día. Considere ahora el estado de la máquina en el tercer día. La probabilidad de que la máquina se halle en el estado 1 el tercer día es 0.49 + 0.18 = 0.67 (véase la mitad superior de la figura 21-1). Esta probabilidad también se puede calcular de la siguiente manera: Sea:

$$P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 3}\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) = \begin{array}{l}\text{Probabilidad de que la máquina}\\ \text{esté en el estado 1 el día 3, } \textit{si}\\ \text{estuvo en el estado 1 el día 1}\end{array}$$

Como:

$$P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 3}\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 2}\end{array}\right) = 0.7$$

y:

$$P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 3}\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 2}\\ \text{en el día 2}\end{array}\right) = 0.6$$

se obtiene:

$$\begin{aligned}P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 3}\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) &= (0.7)P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 2}\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right)\\ &\quad + (0.6)P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 2}\\ \text{en el día 2}\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) \qquad \textbf{(21–1)}\\ &= (0.7)(0.7) + (0.6)(0.3)\\ &= 0.49 + 0.18\\ &= 0.67\end{aligned}$$

La probabilidad correspondiente de que la máquina esté en el estado 2 el día 3, si comenzó en el estado 1 el día 1, es 0.21 + 0.12 = 0.33 (véase Fig. 21-1). La probabilidad de que esté en el estado 1 más la probabilidad de estar en el estado 2 suman 1, ya que sólo hay dos posibles estados en este ejemplo.

Con base en esta información, las probabilidades de estado para el día 4 se pueden calcular como sigue (véase Fig. 21-2):

$$\begin{aligned}P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 4}\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) &= (0.7)P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 3}\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right)\\ &\quad + (0.6)P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 2}\\ \text{en el día 3}\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) \qquad \textbf{(21–2)}\\ &= (0.7)(0.67) + (0.6)(0.33)\\ &= 0.469 + 0.198\\ &= 0.667\end{aligned}$$

Figura 21-2

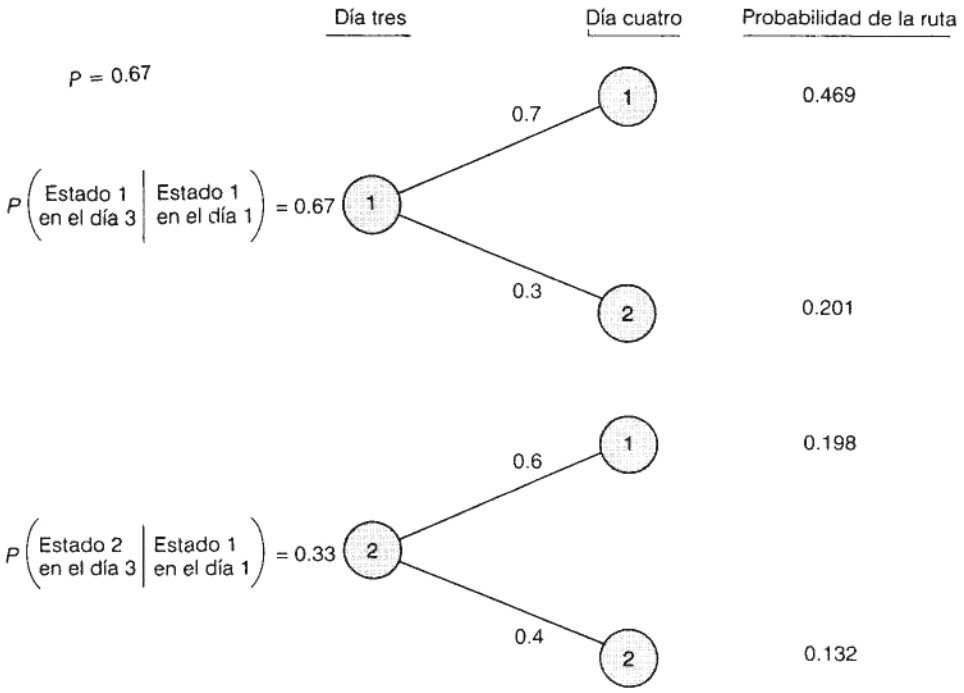


Tabla 21-2

Número de día	*Probabilidad de que la máquina esté en el estado I en un día futuro, si comenzó en el estado 1 el día 1*
1	1.0
2	0.7
3	0.67
4	0.667
5	0.6667
6	0.66667
7	0.666667
8	0.6666667

La probabilidad correspondiente de que la máquina esté en el estado 2 el día cuatro, si comenzó en el estado 1 el día 1, es 1 - 0.667 = 0.333. Este procedimiento puede continuar hasta calcular la probabilidad de que la máquina esté en el estado 1 en cualquier día futuro si comenzó en el estado 1 el día 1. La tabla 21-2 contiene los resultados de los cálculos adicionales.

La tabla 21-2 muestra que la probabilidad de que la máquina 1 esté en el estado 1 en un día futuro, si comenzó en el estado 1 el día 1, tiende al valor $^2/_3$ al aumentar el número de día.

Considere ahora el conjunto de cálculos para la probabilidad de que la máquina esté en el estado 1 en días futuros, si comenzó en el estado 2, esto es, desajustada. La probabilidad de que la máquina esté en el estado 1 el día 3, si comenzó en el estado 2 el día 1, es 0.42 + 0.24 = 0.66 (véase la mitad inferior de la Figura 21-1); también es posible calcularla de la siguiente manera:

$$\begin{aligned} P\left(\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 3}\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}\text{Estado 2}\\ \text{en el día 1}\end{matrix}\right) &= (0.7)P\left(\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 2}\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}\text{Estado 2}\\ \text{en el día 1}\end{matrix}\right) \\ &\quad + (0.6)P\left(\begin{matrix}\text{Estado 2}\\ \text{en el día 2}\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}\text{Estado 2}\\ \text{en el día 1}\end{matrix}\right) \qquad \textbf{(21–3)} \\ &= (0.7)(0.6) + (0.6)(0.4) \\ &= 0.42 + 0.24 \\ &= 0.66 \end{aligned}$$

La probabilidad correspondiente de que la máquina esté en el estado 2 el día 3, si comenzó en el estado 2 el día 1, es 0.18 + 0.16 (véase Fig. 21-2). Las probabilidades de estado del día 4 pueden calcularse de la siguiente manera, suponiendo una vez más que la máquina inició en el estado 2 el día 1:

$$\begin{aligned} P\left(\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 4}\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}\text{Estado 2}\\ \text{en el día 1}\end{matrix}\right) &= (0.7)P\left(\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 3}\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}\text{Estado 2}\\ \text{en el día 1}\end{matrix}\right) \\ &\quad + (0.6)P\left(\begin{matrix}\text{Estado 2}\\ \text{en el día 3}\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}\text{Estado 2}\\ \text{en el día 1}\end{matrix}\right) \qquad \textbf{(21–4)} \\ &= (0.7)(0.66) + (0.6)(0.34) \\ &= 0.462 + 0.204 \\ &= 0.666 \end{aligned}$$

La probabilidad correspondiente de que la máquina esté en el estado 2 el día 4, si comenzó en el estado 2 el día 1, es 1 - 0.666 = 0.334. La tabla 21-3 contiene los resultados de los cálculos adicionales.

Análisis de estado estacionario

Las tablas 21-2 y 21-3 muestran que la probabilidad de que la máquina esté en el estado 1 en un día futuro tiende a $^2/_3$, *sin importar* el estado inicial de la máquina el día 1. Ésta se denomina probabilidad a largo plazo o de estado

Tabla 21-3

Número de día	*Probabilidad de que la máquina esté en el estado 1 en un día futuro, si inició en el estado 2 el día 1*
1	0.0
2	0.6
3	0.66
4	0.666
5	0.6666
6	0.66666
7	0.666666
8	0.6666666

estacionario* de hallarse en el estado 1; la probabilidad correspondiente de encontrarse en el estado 2 ($1 - {}^{2}/_{3} = {}^{1}/_{3}$) se denomina probabilidad de estado estacionario de hallarse en el estado 2. Las probabilidades de estado estacionario muchas veces son importantes a efectos de toma de decisiones. Por ejemplo, si la decisión fuera alquilar esta máquina o alguna otra, la probabilidad de estado estacionario del estado 2 indicaría la fracción del tiempo que la máquina estaría fuera de ajuste a largo plazo y esta fracción (${}^{1}/_{3}$ en el ejemplo), sería de interés para tomar la decisión con respecto a la elección de la máquina.

Cálculo de probabilidades de estado estacionario

Las probabilidades de estado estacionario para un proceso de Markov se pueden obtener en forma más eficiente que calculando tablas como la 21-2 y 21-3. Se escribe primero una ecuación general que relaciona las probabilidades de estado del día n y del día siguiente, $n + 1$, de acuerdo con el patrón de la ecuación 21-1:

$$P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día } n+1\end{array}\,\middle|\,\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) = (0.7)P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día } n\end{array}\,\middle|\,\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) + (0.6)P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 2}\\ \text{en el día } n\end{array}\,\middle|\,\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) \qquad \textbf{(21–5)}$$

Después se aplica el siguiente razonamiento: Al aumentar el número de días *(n)* a una cantidad muy grande, las probabilidades de estado del día n y el día $n + 1$ son casi idénticas. Conforme n se aproxima a infinito, la probabilidad de estar en el estado 1 después de n periodos debe ser la misma que estar en el estado 1 después de $n + 1$ periodos. Por lo tanto, se escribe:

* *N. de la R.T:* Debe distinguirse entre *estado estacionario,* caracterizado porque la probabilidad de hallarse en él después de un número de transiciones tiende a un valor constante, cualquiera que sea la distribución inicial de probabilidad definida sobre los estados, y *proceso estacionario,* en el que las probabilidades de transición entre estados son constantes e iguales en todo tiempo. Si un proceso posee probabilidad límite o de estado estacionario, para todo estado posible, recibe el nombre de *proceso ergódico.*

$$P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día } n+1\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) = P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día } n\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) \text{ cuando } n \to \infty \quad \textbf{(21–6)}$$

Al sustituir la ecuación 21-6 en la ecuación 21-5, se obtiene:

$$P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día } n+1\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 2}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) = (0.7)P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día } n\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 2}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) + (0.6)P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 2}\\ \text{en el día } n\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 2}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) \quad \textbf{(21-7)}$$

Al resolver:

$$P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día } n\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) = \frac{0.6}{1 - 0.7 + 0.6} = \frac{0.6}{0.9} = \frac{2}{3} \text{ cuando } n \to \infty \quad \textbf{(21–8)}$$

No tiene importancia suponer que la máquina inició en el estado 1*;en el estado estacionario, desaparece el efecto de las condiciones iniciales.* Para demostrarlo, se repiten los cálculos, esta vez suponiendo que la máquina inició en

$$P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día } n\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 2}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) = (0.7)P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día } n\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 2}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) + (0.6)\left\{1 - P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día } n\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 2}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right)\right\} \quad \textbf{(21-9)}$$

y:

$$P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día } n+1\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 2}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) = P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día } n\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 2}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) \text{ cuando } n \to \infty \quad \textbf{(21–10)}$$

Al sustituir la ecuación 21-10 en la ecuación 21-9, se obtiene:

$$P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día } n\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) = (0.7)P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día } n\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) + (0.6)\left\{1 - P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día } n\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right)\right\} \quad \textbf{(21-11)}$$

Al resolver:

$$P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día } n\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 2}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) = \frac{0.6}{1 - 0.7 + 0.6} = \frac{0.6}{0.9} = \frac{2}{3} \text{ cuando } n \to \infty \quad \textbf{(21–12)}$$

Para que la notación sea más sencilla, sea P_i la probabilidad de estado estacionario para el estado *i.* Es decir:

$$P_1 = P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día } n\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) = P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día } n\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 2}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) \text{ cuando } n \to \infty$$

$$P_2 = P\left(\begin{array}{l}\text{Estado 2}\\ \text{en el día } n\end{array}\middle|\begin{array}{l}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) = P\left(\begin{array}{l}\text{Estado 2}\\ \text{en el día } n\end{array}\middle|\begin{array}{l}\text{Estado 2}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) \text{ cuando } n \to \infty$$

y así consecutivamente.

Características de un proceso de Markov

El ejemplo 1 demuestra algunas de las propiedades de un proceso de Markov. La hipótesis básica de un proceso de este tipo es que *las probabilidades de llegar a uno de los estados dependen exclusivamente del estado actual y no de la manera en que se llegó a él.* Por ejemplo, si la máquina está en el estado 1 en el día 2, la probabilidad de cambiar al estado 2 el día 3 es 0.3, sin importar el estado de la máquina el día 1. A ésta se le conoce como la propiedad de *no tener memoria.* No hay que recordar cómo llegó el proceso a un estado específico en un periodo determinado; el estado del proceso en un periodo específico contiene toda la información necesaria acerca del proceso y la probabilidad de cambios futuros.

Otra característica de los procesos de Markov es que hay condiciones iniciales que se hacen cada vez menos importantes conforme opera el proceso, hasta "desaparecer" cuando el proceso llega al estado estacionario.[2] *Las probabilidades de estado estacionario son las probabilidades a largo plazo de estar en estados específicos,* después de que el proceso ha estado en funcionamiento lo suficiente para que desaparezcan las condiciones iniciales. En teoría, nunca se llegaría al estado estacionario, pero el concepto es útil. Por ejemplo, si se desconoce el estado inicial de la máquina y ésta ha estado en funcionamiento bastante tiempo, es adecuado asignar probabilidades de estado inicial que sean iguales a las probabilidades de estado estacionario. Si el proceso inicia con la asignación de las probabilidades de estado estacionario a las probabilidades de estado inicial, las probabilidades de los estados futuros serán iguales a las de estado estacionario.

Es importante distinguir el comportamiento estable en probabilidad del proceso, de los valores reales de estado que se obtienen durante la realización del proceso. La máquina seguirá un patrón de estados, uno cada día, para un conjunto determinado de días o periodos. Si se analiza el proceso antes de que opere, las

---

[2] Suponemos que no hay "estados absorbentes", donde la probabilidad de quedar en el mismo estado es 1. En un estado absorbente, el estado inicial puede ser importante. Así mismo, suponemos que el proceso no es cíclico. Un ejemplo de un proceso cíclico es:

De \ A	1	2
1	0	1.0
2	1.0	0

Observe que en esta caso el proceso alterna regularmente entre el estado 1 y el estado 2.

probabilidades de estado estacionario son importantes. Cuando se observa la máquina y se registra el estado actual, éste se convierte en el estado inicial y las tablas 21-2 y 21-3 indican las probabilidades a corto plazo de los cambios en el futuro. Sin embargo, las probabilidades de estado estacionario son de interés a largo plazo.

El ejemplo 1 tiene un número discreto de estados (dos) y ocurren cambios potenciales una vez cada periodo (una vez por día, en el ejemplo). Podemos describir estas características diciendo que el proceso es discreto en el espacio de estados (un número discreto de estados posibles) y en el tiempo (los cambios potenciales sólo ocurren una vez cada periodo). En ocasiones se emplea el término *cadena de Markov* para distinguir de manera precisa este proceso de otros procesos de Markov en los cuales el espacio de estados o los periodos entre cambios pueden ser continuos en lugar de discretos. En este capítulo usaremos el término general *proceso de Markov,* aunque todos los ejemplos serán discretos en el espacio de estados y en los periodos entre cambios.

Comportamiento en estado estacionario de un proceso de Markov de dos estados

En el caso de un proceso de Markov de dos estados, es conveniente obtener fórmulas generales para las probabilidades de estado estacionario, en función de las probabilidades de cambio. Sea:

p_{12} = Probabilidad de pasar del estado 1 al estado 2
p_{21} = Probabilidad de pasar del estado 2 al estado 1
P_i = Probabilidad de estado estacionario de hallarse en el estado i

Entonces, de acuerdo con la ecuación 21-7, se puede escribir:

$$P_1 = (1 - p_{12})P_1 + p_{21}(1 - P_1) \qquad \textbf{(21–13)}$$

Al resolver para P_1 se obtiene:

$$P_1 = \frac{p_{21}}{p_{12} \quad p_{21}} \qquad \textbf{(21–14)}$$

Análogamente, como $P_2 = 1 - P_1$, se puede demostrar que:

$$P_2 = \frac{p_{12}}{p_{12} \quad p_{21}} \qquad \textbf{(21–15)}$$

Las ecuaciones 21-14 y 21-15 son las fórmulas generales para las probabilidades de estado estacionario de un proceso de Markov de dos estados.

Ejemplo Considere el ejemplo 1 (al inicio del capítulo), en el que se considera una máquina que puede estar ajustada (estado 1) o desajustada (estado 2). Las probabilidades de cambio de un estado a otro se indicaron en la tabla 21-1. Si se sustituyen estos

valores en la ecuación 21-14 se obtiene la probabilidad de estado estacionario para el estado 1:

$$P_1 = \frac{p_{21}}{p_{12} + p_{21}} = \frac{0.6}{0.3 + 0.6} = \frac{2}{3} \qquad \textbf{(21–16)}$$

Para el estado 2:

$$P_2 = 1 - P_1 = \frac{1}{3} \qquad \textbf{(21–17)}$$

Estas respuestas son idénticas a las probabilidades de estado estacionario que se calcularon antes.

Utilización de procesos de Markov en problemas de decisión

Algunos problemas de decisión se pueden resolver si se formula un modelo de proceso de Markov para la situación y se calculan las probabilidades de estado estacionario a partir de las probabilidades de cambio. Ampliemos el primer ejemplo para suponer que existe la alternativa de alquilar la máquina A (la que se analizó) o la máquina B con el mismo costo anual. Suponga que las probabilidades de cambio de la máquina B son las que se muestran en la tabla 21-4.

Al comparar la tabla 21-4 con la tabla 21-1, se observa que la máquina B tiene menor probabilidad de cambiar del estado "Ajustada" al estado "Desajustada" (0.2 contra 0.3). Por otra parte, también hay menor probabilidad de que el mecanismo automático de ajuste se corrija y regrese al estado de ajuste si se encuentra fuera de ajuste (0.5 contra 0.6). No se sabe a primera vista cuál de las dos máquinas conviene alquilar. Sin embargo, se pueden calcular las probabilidades de estado estacionario para la máquina B. Con la ecuación 21-14 se obtiene:

$$P_1 = \frac{0.5}{0.2 + 0.5} = \frac{0.5}{0.7} = \frac{5}{7} = 0.714 \qquad \textbf{(21–18)}$$

Ahora se pueden comparar las probabilidades de estado estacionario correspondiente al estado 1 para las máquinas A y B. La máquina B tiene probabilidad de

Tabla 21-4 Probabilidades de cambio para la máquina B

De \ *A*	*Ajustada (estado 1)*	*Desajustada (estado 2)*
Ajustada (estado 1)	0.8	0.2
Desajustada (estado 2)	0.5	0.5

$^5/_7$ de estar ajustada en el estado estacionario, mientras que la máquina A tiene probabilidad de $^2/_3$, por lo cual escogeríamos la máquina B (0.714 es mayor que 0.667).

Ejemplo 2 Suponga que un fabricante quiere emprender una gran campaña publicitaria para que los consumidores prueben su marca de café. A partir de los datos obtenidos en la investigación de mercado, la empresa pudo estimar las probabilidades actuales de que los consumidores cambien de "Nuestra marca" a "Otra marca" y viceversa, como se indica en la tabla 21-5. Suponga además que los investigadores de mercado han estimado las probabilidades correspondientes que existirán después de realizar la campaña publicitaria y de considerar cualquier reacción competitiva esperada (véase Tabla 21-6). Observe que la probabilidad de que los clientes cambien de "Otra marca" a "Nuestra marca" ha aumentado de 0.2 a 0.3, pero no ha cambiado la probabilidad de conservar nuestros clientes.

Suponga que la campaña publicitaria costará 12 millones de dólares anuales y que hay 50 millones de compradores de café en el mercado. El beneficio promedio anual por cliente, antes de pagar impuestos, es de dos dólares. ¿Debe realizarse la campaña publicitaria?

Para resolver este problema de decisión, lo primero es calcular las probabilidades de estado estacionario de que un cliente compre nuestra marca en las condiciones actuales (sin la campaña publicitaria). Si el estado 1 representa nuestra marca y el estado 2 representa las demás, con base en la tabla 21-5 y en la ecuación 21-14 se calculan las probabilidades de estado estacionario sin publicidad de la siguiente manera:

$$P_1 = \frac{0.2}{0.2 + 0.2} = \frac{0.2}{0.4} = \frac{1}{2} \qquad \textbf{(21–19)}$$

Después de llevar a cabo la campaña publicitaria:

$$P_1 = \frac{0.3}{0.2 + 0.3} = \frac{0.3}{0.5} = \frac{3}{5} \qquad \textbf{(21–20)}$$

Las probabilidades de estado estacionario se pueden usar para efectuar una evaluación económica de la campaña publicitaria. Si se lleva a cabo la campaña se incurrirá en gastos de 12 millones de dólares anuales. Debido a la campaña, la

Tabla 21-5 Probabilidades de cambiar de marca de café (sin campaña publicitaria)

De \ *A*	*Nuestra marca (estado 1)*	*Otras marcas (estado 2)*
Nuestra marca (estado 1)	0.8	0.2
Otras marcas (estado 2)	0.2	0.8

Tabla 21-6 Probabilidades de cambiar de marca de café (después de la campaña publicitaria)

De \ A	*Nuestra marca (estado 1)*	*Otras marcas (estado 2)*
Nuestra marca (estado 1)	0.8	0.2
Otras marcas (estado 2)	0.3	0.7

probabilidad de estado estacionario de que un cliente compre nuestra marca de café aumenta del 50 al 60%.[3] Si tenemos un 10% adicional del mercado total, esto representa cinco millones de clientes. Cada cliente representa un beneficio anual promedio de dos dólares, por lo cual obtendremos beneficios adicionales de \$2 · 5 millones = 10 millones de dólares cada año. El valor de los beneficios es menor que el de los costos (12 millones de dólares) y no deberá emprenderse la campaña publicitaria.

Ampliación del ejemplo 2. Suponga ahora que el fabricante tiene la alternativa de una campaña que también cuesta 12 millones de dólares al año, pero que alteraría las probabilidades de cambio que se muestran en la tabla 21-7. Esta campaña publicitaria aumenta la probabilidad de retener los clientes, de 0.8 a 0.9, pero no varía la probabilidad de cambio de otra marca a la nuestra.

Para evaluar esta segunda campaña publicitaria, se calculan primero las probabilidades de estado estacionario después de la campaña, de la siguiente manera, con la ecuación 21-14:

$$P_1 = \frac{0.2}{0.1 + 0.2} = \frac{0.2}{0.3} = \frac{2}{3} \qquad \textbf{(21–21)}$$

Como la probabilidad de estado estacionario de que un cliente compre nuestra marca aumenta de ½ a $^2/_3$, esperamos obtener $^1/_6$ adicional del mercado total de 50 millones de personas, o sea, $8^1/_3$ millones de personas, con lo cual se obtiene un flujo de pagos de 16.67 millones de dólares anuales (\$2 · $8^1/_3$ millones). En este caso, el valor de los beneficios (16.67 millones de dólares anuales) excede el costo anual (12 millones de dólares) de la segunda campaña publicitaria y su realización es una decisión rentable.

Ejemplo 3 Una empresa debe decidir si almacena existencias de dos productos de poca demanda. La demanda en una semana puede ser de cero, de una o de dos unidades, con las probabilidades que se recogen en la tabla 21-8.

[3] Hay un problema al decidir con qué rapidez tendrá efecto la campaña. Aquí supondremos que el cambio es instantáneo; pero si las decisiones de compra se hacen una vez por mes, se podrían requerir tres o cuatro meses de "transición" antes de acercamos al nuevo estado estacionario. Los cálculos se podrían modificar para considerar esta complejidad (véanse tablas 21-2 y 21-3 como ejemplos de cómo calcular las probabilidades de transición a corto plazo).

Tabla 21-7 Probabilidades de cambiar de marca de café (después de la segunda campaña publicitaria)

De \ A	*Nuestra marca (estado 1)*	*Otras marcas (estado 2)*
Nuestra marca (estado 1)	0.9	0.1
Otras marcas (estado 2)	0.2	0.8

La empresa pretende utilizar la siguiente política de pedidos si almacena el producto: Pedir una unidad cuando el inventario disponible llegue a cero. Suponga que el costo de almacenamiento por unidad de inventario es de 100 dólares por semana y que el beneficio de una venta es de 500 dólares. Se pierde toda demanda que no pueda cubrirse con las existencias. Las unidades se piden al final de una semana y llegan al inicio de la siguiente. La empresa tiene que calcular los beneficios esperados del almacenamiento de inventario para tomar la decisión.

Para resolver este problema, lo primero es especificar las siguientes probabilidades de estado:

Estado 1: Cero unidades disponibles al final de la semana y una en pedido (0,1)
Estado 2: Una unidad disponible al final de la semana y cero en pedido (1,0)

Estos dos estados abarcan las alternativas factibles si la empresa sigue su política de pedidos; nunca tendría cero unidades en pedido si el inventario fuera cero y nunca tendría más de una unidad disponible. Ahora, al usar las probabilidades de la demanda que se indican en la tabla 21-8, supongamos que almacena el producto. Entonces, las probabilidades de cambiar de un estado a otro de una semana a la siguiente son las que se incluyen en la tabla 21-9. El lector debe estudiar las probabilidades de la tabla 21-9 y determinar cómo se calculan. Por ejemplo, si estamos en el estado 1 (cero disponibles y una en pedido) y la demanda es de cero unidades (probabilidad 0.8), se tendrá una unidad disponible y cero unidades en pedido una semana después (estado 2). Así, la probabilidad de pasar del estado 1 al estado 2 es de 0.8. Si la demanda es de una unidad (probabilidad 0.1), entonces se usará la unidad en pedido para satisfacer la demanda y no habrá unidades

Tabla 21-8

Demanda de unidades por semana	*Probabilidad*
0	0.8
1	0.1
2	0.1

Tabla 21-9 Probabilidades de cambio

De \ A	*Estado 1 (0,1)*	*Estado 2 (1,0)*
Estado 1 (0, 1)	0.2	0.8
Estado 2 (1, 0)	0.2	0.8

disponibles. Sin embargo, la regla de decisión es efectuar un pedido cuando el inventario llegue a cero. Esta acción ocurrirá si existe la demanda de una unidad y regresaremos al estado 1 (cero unidades disponibles y una en pedido). Así mismo, regresaremos al estado 1 si la demanda es de dos unidades (probabilidad 0.1), aunque sólo cubrirá la demanda de una de las unidades. Por lo tanto, la probabilidad de permanecer en el estado 1 es 0.1 +0.1 = 0.2.

Las probabilidades de cambio del estado 2 son similares a las del estado 1. La demanda cero nos obliga a permanecer en el estado 2, mientras que la demanda de una o dos unidades ocasiona un movimiento del estado 2 al estado 1.

Solución: Las probabilidades de estado estacionario se obtienen de la siguiente manera:

$$P_1 = \frac{0.2}{0.8 + 0.2} = 0.2$$

Las probabilidades de estado estacionario para el estado 1 y el estado 2 son 0.2 y 0.8, respectivamente.[4]

Ahora podemos calcular el beneficio esperado por semana. Cuando el proceso está en el estado 1, acabamos de vender una unidad con beneficio de 500 dólares. Si el proceso está en el estado 2, acabamos de tener demanda cero y hemos incurrido en un cargo de almacenamiento de 100 dólares. Por lo tanto, el beneficio semanal esperado es:

$$EP = (0.2)(\$500) + (0.8)(-\$100) = \$100 - \$80 = \$20$$

Como el beneficio esperado es positivo, el gerente debe almacenar el producto.

Solución de estado estacionario para problemas mayores

Todos los ejemplos que se han resuelto hasta ahora han supuesto la existencia de sólo dos estados. No obstante, se puede emplear el mismo método para solucionar

[4] Como se muestra en la tabla 21 -9, las probabilidades de pasar al estado 1 y de pasar al estado 2 son las mismas en cada fila. Por lo tanto, estas probabilidades deben ser las probabilidades de estado estacionario. Cuando todas las filas de una tabla de probabilidades de transición sean iguales, se pueden obtener por inspección las probabilidades de estado estacionario.

Tabla 21-10 Probabilidades diarias de cambio

De \ A	*Estado 1*	*Estado 2*	*Estado 3*
Estado 1	0.6	0.3	0.1
Estado 2	0.7	0.2	0.1
Estado 3	0.2	0.4	0.4

problemas con tres estados o más. La única complicación es que en lugar de tener una sola ecuación como la 21-14, en los problemas mayores habrá dos o más ecuaciones lineales simultáneas que, al resolverse, facilitarán las probabilidades de estado estacionario.[5]

Ejemplo 4 Considere el proceso de Markov cuyas probabilidades de cambio se recogen en la tabla 21-10.

Se trata de un proceso de tres estados; para encontrar las probabilidades de estado estacionario, se escriben dos ecuaciones similares a la ecuación 21-7:

$$P\left(\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el día } n\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{matrix}\right) = (0.6)P\left(\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el día } n\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{matrix}\right) + (0.7)P\left(\begin{matrix}\text{Estado 2}\\ \text{en el día } n\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{matrix}\right) + (0.2)P\left(\begin{matrix}\text{Estado 3}\\ \text{en el día } n\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{matrix}\right) \quad \textbf{(21–22)}$$

$$P\left(\begin{matrix}\text{Estado 2}\\ \text{en el día } n\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{matrix}\right) = (0.3)P\left(\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el día } n\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{matrix}\right) + (0.2)P\left(\begin{matrix}\text{Estado 2}\\ \text{en el día } n\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{matrix}\right) + (0.4)P\left(\begin{matrix}\text{Estado 3}\\ \text{en el día } n\end{matrix}\,\middle|\,\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{matrix}\right) \quad \textbf{(21–23)}$$

La ecuaciones 21-22 y 21-23 tienen tres incógnitas. No obstante, como la suma de probabilidades debe ser 1.0, podemos sustituir la tercera incógnita de la siguiente manera:

[5] El numero de ecuaciones simultáneas que habrá que resolver siempre será igula al número de estados menos uno, ya que las probabilidades de estado suman la unidad y, por lo tanto, una de las probabilidades de estado desconocidas siempre podrá escribirse como I menos la suma de las demás.

$$P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 3}\\ \text{en el día } n\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) = 1 - P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día } n\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) - P\left(\begin{array}{c}\text{Estado 2}\\ \text{en el día } n\end{array}\middle|\begin{array}{c}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{array}\right) \quad \textbf{(21–24)}$$

Si P_1, P_2 y P_3 representan las probabilidades de estado estacionario y se sustituye la ecuación 21-24 en las ecuaciones 21-22 y 21-23, se obtiene:

$$P_1 = 0.6P_1 + 0.7P_2 + 0.2(1 - P_1 - P_2) \quad \textbf{(21–25)}$$

$$P_2 = 0.3P_1 + 0.2P_2 + 0.4(1 - P_1 - P_2) \quad \textbf{(21–26)}$$

Al agrupar los términos se obtiene:

$$0.6P_1 - 0.5P_2 = 0.2 \quad \textbf{(21–27)}$$

$$0.1P_1 + 1.2P_2 = 0.4 \quad \textbf{(21–28)}$$

Las ecuaciones 21-27 y 21-28 se pueden resolver en forma simultánea para obtener las probabilidades de estado estacionario. Al multiplicar la segunda ecuación por seis y restarla a la primera para eliminar el término P_1, se obtiene:

$$-7.7P_2 = -2.2 \quad \textbf{(21–29)}$$

o sea:

$$P_2 = \frac{2.2}{7.7} = \frac{2}{7}$$

y al sustituir $P_2 = 2/7$ en la ecuación 21-27, se obtiene:

$$0.6P_1 - 0.5(2/7) = 0.2 \quad \textbf{(21–30)}$$

o sea:

$$0.6P_1 = 24/70$$

de manera que:

$$P_1 = 4/7$$

Por último, al aplicar el hecho de que las probabilidades de estado estacionario deben sumar 1.0, $P_3 = 1 - P_1 - P_2 = 1 - 6/7 = 1/7$.

Este método se puede usar para resolver las probabilidades de estado estacionario de los procesos de Markov con gran número de estados. La solución de ecuaciones lineales simultáneas es un proceso relativamente sencillo incluso si el número de ecuaciones es grande. Los computadores pueden resolver con rapidez estos sistemas de ecuaciones.

RESUMEN

En un proceso de Markov, las probabilidades de cambio dependen exclusivamente del estado actual y no de la forma en que se llegó a dicho estado. Se puede analizar el comportamiento a corto y a largo plazo y emplearse para resolver problemas de decisión empresariales. Cuando hay más de dos estados, las probabilidades de estado estacionario a largo plazo se obtienen por medio de la resolución de ecuaciones lineales simultáneas.

Bibliografía

Cinlar, E., *Introduction to Stochastic Processes,* Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1975.

Howard, R. A., *Dynamic Probabilistic Systems,* dos vols., Nueva York, John Wiley & Sons, 1971.

Karlin, S. y H. Talyor, *A First Course in Stochastic Processes,* ed. rev., Nueva York, Academic Press, 1975.

Kemeny, J. G., A. Schleifer, Jr., J. L. Snell y G. L. Thompson,*Finite Mathematics with Business Applications,* 2da. ed., Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1972.

Ross, S., *An Introduction to Probability Models,* 3ra. ed., Nueva York, Academic Press, 1985.

Taylor, H. y S. Karlin, *An Introduction to Stochastic Modeling,* Nueva York, Academic Press, 1984.

Wolff, R. W., *Stochastic Modeling and the Theory of Queues,* Englewood, Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1989.

Problemas con respuestas

21-1. Hay dos máquinas, A y B, que pueden alquilarse. Tienen distintas probabilidades de cambiar de un estado de desajuste (estado 1) a uno de desajuste (estado 2), como se indica a continuación.

Obtenga las probabilidades de estado estacionario para cada máquina. ¿Cuál sería más deseable alquilar? La tabla de probabilidades

21-2. de transición que se presenta en la siguiente columna representa el comportamiento de los clientes de una tienda de departamentos con respecto al pago de sus facturas mensuales.

a. ¿Cuáles son las probabilidades de estado estacionario?

De \ A	*Pagó (estado 1)*	*No pagó (estado 2)*
Pagó (estado 1)	0.95	0.05
No pagó (estado 2)	0.95	0.05

Probabilidades de cambio: Máquina A (problema 21-1)

De \ A	*Ajustada (estado 1)*	*Desajustada (estado 2)*
Ajustada (estado 1)	0.9	0.1
Desajustada (estado 2)	0.6	0.4

Probabilidades de cambio: Máquina B (problema 21-1)

De \ A	*Ajustada (estado 1)*	*Desajustada (estado 2)*
Ajustada (estado 1)	0.8	0.2
of Adjustment (state 2)	0.7	0.3

b. ¿Debería cancelar el director el crédito de los clientes que no han pagado? ¿Por qué?

21-3. Ajax Car Rental Company alquila automóviles en tres aeropuertos: A, B y C. Los clientes devuelven los automóviles a los aeropuertos con las probabilidades de la tabla de al lado.

De \ A	*A (estado 1)*	*B (estado 2)*	*C (estado 3)*
A (estado 1)	0.8	0.2	0.0
B (estado 2)	0.2	0.0	0.8
C (estado 3)	0.2	0.2	0.6

a. Calcule las probabilidades de estado estacionario.

b. La compañía Ajax quiere construir instalaciones de mantenimiento en uno de los tres aeropuertos. ¿Cuál recomendaría? ¿Por qué?

21-4. Considere el problema 21-3. Suponga que hay 100 automóviles en cada uno de los lugares, A, B y C.

a. ¿Cuál sería la distribución esperada de los automóviles un periodo después?

b. ¿Dos periodos después?

Problemas

21-5. El centro de esquí ABC ha descubierto que después de un día soleado la probabilidad de mal tiempo es de 0.3, mientras que la probabilidad de buen tiempo después de mal tiempo es de 0.8. Escriba la tabla de probabilidades de transición. ¿Cuáles son las probabilidades de estado estacionario para los días buenos y malos?

De \ A	*Piso 1*	*Piso 2*	*Piso 3*
Piso 1	0.0	0.4	0.6
Piso 2	0.8	0.0	0.2
Piso 3	0.8	0.2	0.0

21-6. La tabla de la columna izquierda contiene las probabilidades de que un director se desplace entre los tres pisos de una tienda de departamentos. Calcule las probabilidades de estado estacionario. La

21-7. compañía Acmé ha obtenido la siguiente tabla de probabilidades de transición para los clientes de alquiler de automóviles:

De \ A	*Núm.1*	*Acme*	*Otros*
Número 1	0.6	0.2	0.2
Acmé	0.2	0.6	0.2
Otros	0.4	0.2	0.4

Un cliente típico alquila un automóvil una vez cada seis meses. Obtenga las probabilidades de estado estacionario. Durante 100

21-8. días se observó el precio de las acciones de la compañía XYZ. Cada día el precio sube un punto o baja un punto, de acuerdo con las siguientes probabilidades:

De \ A	*Sube uno (estado 1)*	*Baja uno (estado 2)*
Sube uno (estado 1)	0.4	0.6
Baja uno (estado 2)	0.6	0.4

¿Cuáles son las probabilidades de estado estacionario?

21-9. Considere las acciones de la compañía XYZ del problema 218. Suponga ahora que si las acciones suben un día, la probabilidad de que suban al siguiente es de 0.6; si las acciones bajan, la probabilidad de que bajen el día siguiente es 0.5. Escriba la tabla de probabilidades de transición y calcule las probabilidades de estado estacionario.

21-10. Considere un proceso de Markov con la siguiente tabla de transición:

De \ A	*Estado 1*	*Estado 2*	*Estado 3*
Estado 1	0.7	0.3	0.0
Estado 2	0.8	0.2	0.0
Estado 3	0.0	0.2	0.8

a. Si el proceso inicia en el estado 1 y ocurre un gran número de transiciones, ¿qué fracción de dichas transiciones es del estado 1 ai estado 2? *Recomendación:* Calcule primero la probabilidad de estado estacionario de hallarse en el estado 1.

b. Repita *(a)* suponiendo que el proceso inicia en el estado 2.

21-11. Un taxista se dio cuenta de que si está en el pueblo 1, hay una probabilidad de 0.8 de que su siguiente viajero vaya al pueblo 2, y una probabilidad de 0.2 de que permanezca en el mismo pueblo. Si está en el pueblo 2, hay una probabilidad de 0.4 de que su siguiente viajero vaya al pueblo 1 y de 0.6 de que permanezca en el pueblo 2. El beneficio promedio de cada tipo de viaje es:

En el pueblo 1: $1
En el pueblo 2: $1
Entre los pueblos: $2

a. Escriba la tabla de probabilidades de transición entre los dos estados y calcule las probabilidades de estado estacionario de hallarse en el pueblo 1 y en el pueblo 2.

b. Use las dos probabilidades de estado es tacionario de (í7) junto con las probabilidades de transición para calcular el beneficio esperado por viaje.

c. Establezca el proceso como uno de cuatro estados, definiendo los estados como el tipo de viaje en vez del lugar. Escriba la tabla de probabilidades de transición para la formulación con cuatro estados. ¿Es más fácil este método para calcular la rentabilidad esperada que el que empleó en (*b*)?

Problemas más difíciles

21-12. Remítase al problema 21-2. Suponga que un conjunto de clientes (llamados "imprevisibles") tiene la tabla de probabilidades de transición de este problema, y otro conjunto (llamado "previsibles") tiene la tabla de la siguiente página:

a. ¿Cuáles son las probabilidades de esta do estacionario para los clientes previsibles? ¿Cómo se comparan con las de los clientes imprevisibles?

b. Suponga ahora que la tienda de departa mentos ha determinado que "hay equili-

Probabilidades de cambio:
Clientes previsibles

De / A	*Pagó (estado 1)*	*No pagó (estado 2)*
Pagó (estado 1)	0.99	0.01
No pagó (estado 2)	0.49	0.51

brio" cuando la probabilidad de pago es de 0.949. Si es posible clasificar a un cliente nuevo como "imprevisible", ¿debe aceptarse para crédito? ¿Por qué?

c. Dada la posibilidad de equilibrio de *(b),* ¿debe aceptar la tienda a un cliente nuevo clasificado como "previsible" cu yo estado se desconoce?

d. Dados (*b*) y (c), suponga que un cliente nuevo solicita crédito y es previsible. Suponga también que se conoce el último estado (pagó o no pagó). ¿Debe aceptar la tienda al cliente, dependiendo del último estado? ¿Por qué?

21-13. Remítase al ejemplo 3 de este capítulo. Considere la siguiente política de pedidos: pedir dos unidades si no hay existencias disponibles; no pedir en caso contrario. Establezca una tabla de probabilidades de transición para este caso y calcule las probabilidades de estado estacionario y el beneficio esperado. *Recomendación:* Hay tres estados: (1) cero unidades disponibles y dos en pedido; (2) una disponible y cero en pedido; y (3) dos disponibles y cero en pedido.

21-14. Remítase al ejemplo 3 y al problema 21-13. Considere la siguiente política: pedir dos unidades si no hay existencias disponibles; pedir una unidad si hay una disponible; no pedir si hay dos unidades disponibles. Establezca la tabla de probabilidades de transición para este caso y calcule las probabilidades de estado estacionario y el beneficio esperado.

21-15. Ajax Novelty Company distribuye pedidos por correo de artículos de regalo y novedades. La compañía tiene una lista de correo de 100 000 clientes potenciales. La política actual de Ajax requiere que envíe su catálogo a toda la lista cada seis meses. Hasta ahora, cerca del 50% de los clientes anteriores hace un pedido después de recibir el catálogo (un cliente anterior es uno que efectuó un pedido en el periodo de seis meses anterior). Por otra parte, sólo hacen pedidos un 10% de las personas que no eran clientes anteriores. Por lo general, un cliente hace un pedido cada periodo de seis meses y Ajax obtiene beneficios de ocho dólares por pedido.

Ajax pretendía cambiar las políticas actuales, de acuerdo con dos alternativas.

La primera posibilidad implicaba usar un catálogo más elegante que el actual. El costo adicional sería de 25 centavos por catálogo (25 000 dólares para el envío total). No se esperaba que este cambio afectara el porcentaje de clientes anteriores que pedían de nuevo; pero sí se esperaba un aumento del 10 al 15% en los pedidos de nuevos clientes.

La otra alternativa era ofrecer descuentos especiales a los clientes anteriores. Con esto se reduciría el beneficio promedio de 8 a 7.50 dólares para estos clientes, pero se esperaba que el plan aumentara el número de clientes del 50 al 60%. El plan no tendría efecto sobre los nuevos clientes (el porcentaje de pedidos permanecería en el 10% y el beneficio sería de ocho dólares por pedido).

a. Considere los tres planes que se presen taron. Formule cada uno como un pro ceso de Markov (es decir, defina los estados y elabore las tablas de probabi lidades de transición).

b. Estime la rentabilidad de cada plan. ¿Cuál debe adoptar Ajax?

21-16. Una revista obtuvo beneficios de dos dólares en sus suscripciones normales de un año. Se renovó el 80% de las suscripciones. La empresa discutía los métodos para obtener nuevas suscripciones. Un método implicaba una campaña por correo dirigida a clientes potenciales obtenidos de listas de correo seleccionadas. El costo de la campaña por correo sería de 25 centavos por persona. Se estimaba que el 5% de dichas personas se convertirían en suscriptores normales.

(para el problema 21-17)

De / A	*0 a 4 años*	*5 a 8 años*	*9 años o más*	*Fuera de servicio*
0 a 4 años	0.75	0.05	0	0.20
5 a 8 años	0	0.75	0.10	0.15
9 años o más	0	0	0.90	0.10
Fuera de servicio	0	0	0	1.00

Otro método comprendía una campaña personal con un grupo de clientes potenciales seleccionados. El costo sería de un dólar por persona, pero se esperaba que el 25% se convirtieran en clientes regulares. ¿Qué método debe adoptar la revista? *Recomendación:* Piense si las probabilidades de estado estacionario o de transición son relevantes para este problema.

21-17. Suponga que el Ministerio de Defensa ha obtenido estimaciones del porcentaje anual de individuos que se ofrecen de nuevo para periodos de servicio más largos, como se muestra en la tabla de arriba.

En otras palabras, cada año, el 75% de los individuos con cero a cuatro años de servicio permanecen en dicha categoría, un 20% se van, 5% pasan a la categoría de 5-8 años, etcétera.

a. Calcule las probabilidades de estado estacionario para cada uno de los cuatro estados.

b. Con base en su respuesta en (a), ¿puede proponer una modificación a la formulación de proceso de Markov que haga más útiles, para fines de planificación, los resultados de estado estacionario del modelo?

21-18. Se ha modelizado como proceso de Markov a los fumadores y a los no fumadores de diversas edades y se han estimado las probabilidades de cambio anual que se presentan a continuación.

a. Calcule las probabilidades de estado es tacionario para cada uno de los cinco estados.

b. Con base en su respuesta de *(a),* ¿pue de proponer una modificación de la for mulación de proceso de Markov que haga más significativos los resultados de estado estacionario del modelo?

c. Suponga que el estado 5 se define como "otros", con las siguientes probabilidades de cambio en la fila:

(para el problema 21-18)

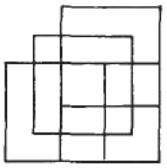
De / A	*Estado 1*	*Estado 2*	*Estado 3*	*Estado 4*	*Estado 5*
Estado 1: No fumadores, edad 10-19	0.8	0.1	0.1	0	0
Estado 2: Fumadores, edad 10-19	0.05	0.85	0	0.1	0
Estado 3: No fumadores, ≥ edad 20	0	0	0.98	0	0.02
Estado 4: Fumadores, ≥ edad 20	0	0	0.10	0.85	0.05
Estado 5: Fallecidos	0	0	0	0	1

1, 0, 0, 0 y 0. Explique lo que representan estas cifras con respecto al balance de nacimientos y fallecimientos y a la probabilidad de que un niño de 10 años se convierta en fumador.

d. Calcule las probabilidades de estado estacionario de los cinco estados utilizando los datos modificados que se indican en (*c*).

e. Hay una fuerte campaña publicitaria para reducir el número de fumadores entre los adolescentes; esta campaña alterará la fila superior de las probabilidades a 0.85, 0.05, 0.1, 0 y 0. Calcule las nuevas probabilidades de estado estacionario (con la última fila que se especificó en (*c*)). ¿Cree usted que las consecuencias de las probabilidades de la fila de (*c*) son válidas para (*e*)? ¿Por qué?

CAPÍTULO 22



Programación dinámica

En algunos problemas de decisión puede existir una secuencia de decisiones relacionadas. La programación dinámica es una técnica matemática diseñada para resolver estos problemas. El método de solución consiste en dividir el problema total en varios subproblemas y resolver cada subproblema de manera que se obtenga la solución óptima global.

Las ideas básicas que se utilizan en la programación dinámica se ilustran con el siguiente ejemplo.

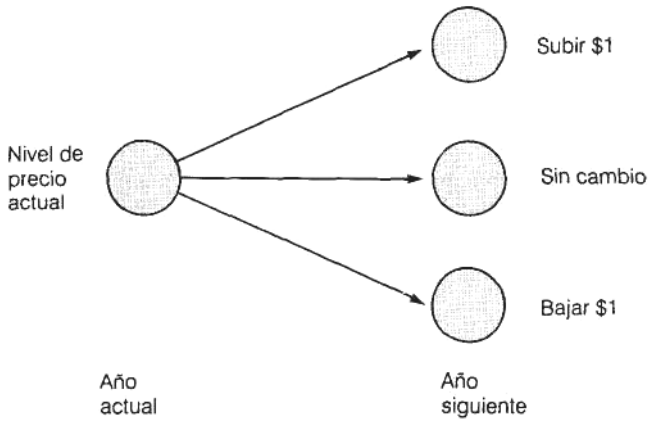
Ejemplo 1: Problema de precio

Considere un problema que comprende una estrategia de precios. Una empresa debe decidir cuál será su nivel de precio para un producto en los próximos cinco años. Se consideran cuatro precios: 5, 6, 7 y 8 dólares por unidad. Después de evaluar las posibles estrategias de precio de sus competidores, elaboraron una tabla de resultados que relaciona su precio en un año con el valor actual del beneficio esperado para dicho año. Los valores de resultados se presentan en la tabla 22-1.

Tabla 22-1 Tabla de resultados (millones de dólares)

Precio \ Año	*1*	*2*	*3*	*4*	5
$5	9	2	4	5	8
$6	1	4	8	2	1
$7	6	5	9	6	4
$8	8	7	1	7	3
	↑ Decisión 1	↑ Decisión 2	↑ Decisión 3	↑ Decisión 4	↑ Decisión 5

Figura 22-1 Movimientos permitidos



En estas circunstancias, la empresa debe tratar cada año por separado y elegir el precio para cada año de manera que maximice el valor actual de su beneficio. Suponga, sin embargo, que la empresa quiere evitar cambios drásticos en el precio de un año al siguiente, por lo cual ha decidido que el cambio máximo en precio de un año a otro sea de un dólar. Por ejemplo, si el precio en el año 1 es de seis dólares, en el año dos deberá ser de cinco, seis o siete dólares; no puede ser de ocho dólares. La figura 22-1 ilustra los movimientos de precio permitidos. El problema se puede formular de nuevo de la siguiente manera: La empresa debe decidir la manera de modificar su precio de un año al siguiente. El objetivo es escoger un conjunto de precios en los próximos cinco años que maximice el valor actual de los beneficios.[1] Se pueden emplear los conceptos básicos de la programación dinámica para resolver este problema.

Conceptos básicos

Los tres conceptos básicos que se usan en la programación dinámica son:

1. El problema global se divide en varios subproblemas.
2. Se resuelve cada subproblema, comenzando por el fin natural del problema.
3. Después de resolver cada subproblema, se registra la respuesta, así como los resultados (beneficio, costo, etcétera) a partir de esa etapa hasta el final del problema.

[1] Este ejemplo es muy sencillo y el lector podría obtener la respuesta correcta si estudia la tabla 22-1. Para ilustrar la complejidad de un problema tan pequeño como este, considere cómo cambia la solución si los beneficios en el año 2 con precio de seis dólares fueran 6 en lugar de 4; si los beneficios del año 4 con precio de cinco dólares fueran 7 en lugar de 5; o si el resultado del año tres con precio de cinco dólares fuera 7 en lugar de 4. Es difícil determinar la consecuencia de estos cambios sin usar el método de programación dinámica.

Para aplicar el primer concepto al ejemplo, el problema global se divide en una serie de cinco subproblemas. En el ejemplo, los cinco subproblemas representan las cinco decisiones acerca de cómo mover el nivel de precio. La parte inferior de la tabla 22-1 indica las cinco decisiones que se tomarán con respecto al movimiento.

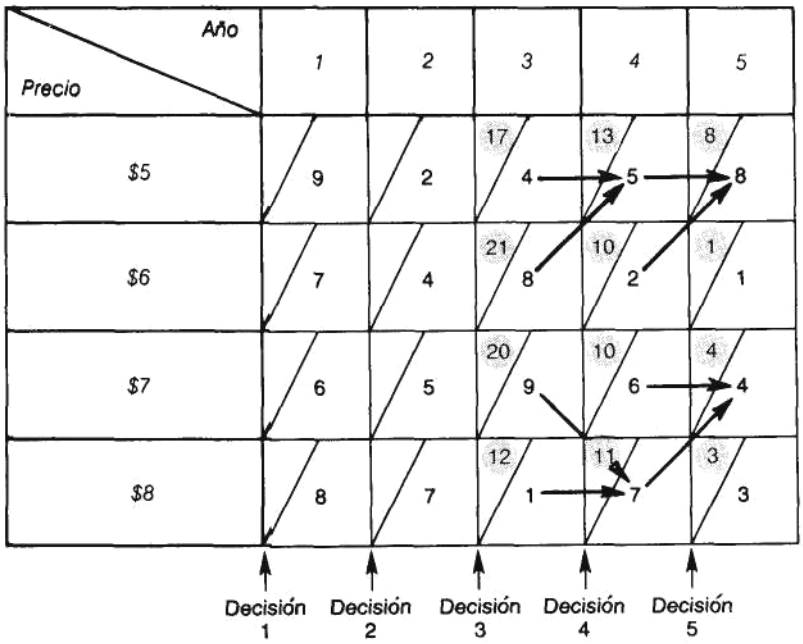
El segundo concepto se aplica resolviendo primero el último subproblema y trabajando hacia atrás a partir de allí, de derecha a izquierda de la tabla. Por ejemplo, el último subproblema es *cómo moverse si se encuentra en uno de los niveles de precio del cuarto año.* Este subproblema se puede resolver analizando los movimientos permitidos a partir de cada nivel de precio y eligiendo el movimiento con mayor resultado. Por ejemplo, a partir del nivel de precio de cinco dólares del año 4, es mejor mover directamente a un resultado de 8 que a un resultado de 1. A partir del nivel de precio de ocho dólares en el año 4, es mejor subir al resultado de 4 que pasar al resultado de 3.

El tercer concepto se aplica al registrar un número en la esquina superior izquierda de cada casilla, para representar la suma de los resultados de la *mejor* ruta de esa casilla en adelante. Considere la casilla superior del cuarto año (la que contiene cinco). Como el mejor movimiento a partir de esta casilla es a 8, se suma 8 a 5 y se registra 13 en círculo con pantalla de la esquina superior izquierda de la casilla. Si llega a esa casilla, la mejor ruta a partir de allí hasta el final de la tabla tiene suma de 13. También se registra la mejor decisión dibujando una flecha que parte de la casilla hasta el valor de ocho. La tabla 22-2 muestra este procedimiento aplicado a todas las casillas de la columna 4. Se han registrado también los números en la esquina superior izquierda de las casillas de la columna cinco, para que la tabla esté completa

Se trabaja hacia atrás y se considera la decisión 4, el precio al iniciar el año 4. Si se considerara esta decisión sin preparación previa, la respuesta sería: "dependería de lo que se haya planificado para después de este movimiento". Sin embargo, como ya resolvió la última decisión, se pueden usar los números en círculo con pantalla de la esquina superior izquierda de las casillas de la columna 4 para representar el atractivo relativo de las casillas. Considere, por ejemplo, la casilla superior de la columna 3 (la que contiene un cuatro). Al estudiar los números en círculo con pantalla de la columna 4, se observa que es mejor moverse a la derecha y obtener un resultado de 13 que bajar a un resultado de 10. Al repetir el procedimiento de registro que se empleó antes, el valor de 13 más 4, o 17, se registra en círculo con pantalla de la esquina superior izquierda de la casilla superior de la columna 3. También se registra la mejor decisión con una flecha que parte de dicha casilla a la casilla superior de la columna 4. Al aplicar el mismo procedimiento a las demás casillas de la columna 4, es posible resolver la decisión 4 (véase Tabla 22-2).

Nos movemos de nuevo hacia atrás y comenzamos a resolver la decisión 3. Si usted aplica el procedimiento anterior, puede llenar las esquinas de la parte superior izquierda de las casillas de la columna 2 de la tabla 22-2 y dibujar flechas que indiquen el mejor movimiento. Después se aplica el mismo procedimiento para la decisión 2 y, por último, la decisión 1 implica escoger el mayor de los valores en la esquina superior izquierda de las casillas de la columna 1. En la tabla 22-3 se presenta la solución completa. A partir de esta tabla, la estrategia óptima es comenzar con un

Tabla 22-2

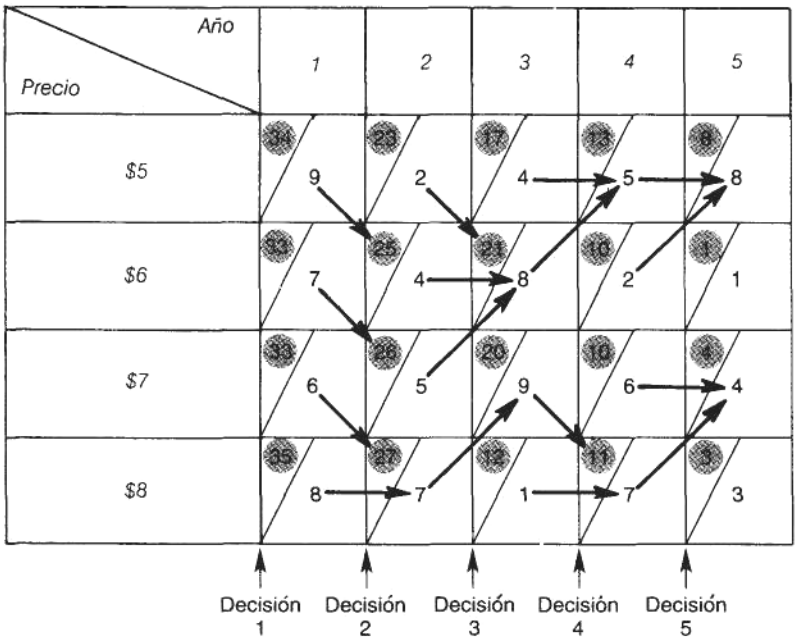


precio de ocho dólares en el año 1, mantenerlo en ocho dólares durante el año 2, cambiarlo a siete dólares en el tercer año, regresar a ocho dólares en el año 4 y cambiarlo **a** siete dólares en el quinto año. El beneficio de esta estrategia está registrado en círculo con pantalla de la esquina superior izquierda de la cuarta casilla de la primera columna y es igual a 35. Ninguna otra estrategia genera un resultado tan grande. Si, por alguna razón, el gerente no quiere fijar un precio de ocho dólares para el primer año, la mejor alternativa sería comenzar con precio de cinco dólares. El resultado que se obtiene al iniciar con precio de cinco dólares y tomar las decisiones óptimas del año 1 en adelante es 34, lo cual se registra en círculo con pantalla de la primera casilla de la columna 1 de la tabla 22-3.

Formalización de la técnica de programación dinámica

La técnica de programación dinámica se formaliza haciendo referencia a etapas, variables de estado, reglas de decisión óptima y política óptima. La **etapa** se refiere a la decisión a la cual nos enfrentamos; en el ejemplo 1 hay cinco etapas de decisión (véase Tabla 22-1). Una **variable de estado** es una variable que define la situación actual en cualquier etapa. La variable de estado para el ejemplo 1 sería el nivel de precio actual en una de las etapas. Una **regla de decisión óptima** especifica cuál es la decisión que hay que tomar, en función de la variable de

Tabla 22-3



estado y el número de etapa. La regla de decisión óptima para la decisión 5 (etapa 5) del ejemplo especificaría: "Mantener el precio constante si el precio es cinco dólares; bajarlo si el precio es seis dólares; mantenerlo constante si el precio es siete dólares; y reducir el precio si es ocho dólares" (véase Tabla 22-3). Una **política óptima** es un **conjunto** de reglas de decisión óptimas que guían las decisiones por todas las etapas del problema. La política óptima para el ejemplo 1 es el conjunto de flechas de la tabla 22-3 que especifican los movimientos óptimos en el periodo de cinco años.

Principio de optimalidad

El principio subyacente en el desarrollo de la técnica de programación dinámica se denomina **principio de optimalidad:**

> Una política óptima tiene la propiedad de que, cualesquiera que sean el estado y la decisión iniciales, las decisiones restantes deben constituir una política óptima con respecto al estado que resulta de la primera decisión.[2]

[2] R. E. Bellman, *Dynamic Programining,* Princeton, Princetoii University Press, 1957, pág. 83.

Tabla 22-4 Demanda requerida

Periodo n	*Unidades requeridas* D_n
1	2
2	3
3	2
4	4

El principio de optimalidad nos permite dividir el problema global y resolver la última etapa de decisión, para luego trabajar hacia atrás y resolver la penúltima decisión, etcétera, hasta resolver la primera decisión.

Ejemplo 2: Prohlema de inventario y producción

Suponga que una empresa se enfrenta a la demanda de su producto durante cuatro periodos que se presenta en la tabla 22-4. Debe decidir acerca de un programa de producción que permita cumplir con esta demanda. En un periodo cualquiera, el costo de producción es un dólar por unidad más un costo de preparación de tres dólares. No se presenta el costo de preparación si no se producen unidades. No es posible producir más de seis unidades en un periodo. Los requerimientos se pueden resumir como sigue:

$$\text{Costo de producción} = \begin{cases} \$3 + 1 \cdot X & \text{si } 0 < X \leq 6 \\ 0 & \text{si } X = 0 \end{cases}$$

donde X es el número de unidades producidas.

Además, hay un costo de almacenamiento de inventario de 50 centavos por unidad cada periodo. La empresa tiene inventario disponible de cero al iniciar el periodo 1 y desea tener inventario cero al final del periodo 4. El problema es encontrar un programa de producción que cumpla con los requisitos de la demanda con un mínimo de costos de producción más costos de inventario).

Formulación del problema

Formulamos este problema como uno de programación dinámica, de la siguiente manera:

Etapas *Cada* periodo es una etapa; $n = 1, 2, 3, 4$.

Variable de estado La cantidad de inventario al *inicio* del periodo, designada con I_n.

Variable de decisión El nivel productivo de cada periodo, designado con X_n

Regla de decisión óptima (por determinarse) Esto especificará la producción óptima X_n^* como función del inventario inicial; es decir:

$$X_n^* = X_n(I_n)$$

para cada periodo.

Observe que los periodos se unen con la ecuación de equilibrio de inventario que relaciona el inventario de un periodo con el del siguiente:

$$I_{n+1} = I_n + X_n - D_n \tag{22-1}$$

Es decir, el inventario inicial en el siguiente periodo es igual al inventario inicial del periodo anterior más la producción menos la demanda del periodo, donde D_n es la demanda del *n*ésimo periodo (Tabla 22-4).

El costo en un periodo es la suma de los costos de inventario y de producción:

$$\text{Costo del periodo} = C_n(X_n, I_n) = \left\{ \begin{array}{ll} 3 + 1X_n & \text{si } X_n > 0 \\ 0 & \text{si } X_n = 0 \end{array} \right\} + 0.5I_n \tag{22–2}$$

Por último, sea $f_n(I_n)$ la representación del costo óptimo (mínimo) del *n*ésimo periodo hasta el final, dado un inventario /„ al iniciar el periodo *n*. **Por** ejemplo, $f_2(3)$ sería el costo del programa óptimo de la producción del segundo al cuarto periodo, con inventario inicial de tres unidades en el periodo 2. A esta función $f_n(I_n)$ se le llama **función de beneficios.**

Ahora se puede escribir una serie de ecuaciones que defina la función de beneficios para cada periodo. Comencemos por el último periodo del proceso *(n* = 4):

$$\begin{array}{c} f_4(I_4) = \text{mínimo } \{C_4(X_4, I_4)\} \\ 0 \le X_4 \le 6 \\ \text{y } X_4 + I_4 \ge D_4 \end{array} \tag{22-3}$$

Observe las restricciones para X_n que se deben a las limitaciones de producción $(0 \le X_n \le 6)$ y a la necesidad de cumplir con la demanda del periodo con la producción y el inventario$(X_n + I_n \ge D_n)$.

Al retroceder un periodo, la función de beneficios del periodo $n = 3$ es:

$$\begin{array}{c} f_3(I_3) = \text{mínimo } \{C_3(X_3, I_3) + f_4(I_3 + X_3 - D_3)\} \\ 0 \le X_3 \le 6 \\ \text{y } X_3 + I_3 \ge D_3 \end{array} \tag{22-4}$$

Para un periodo general *n,* la función de beneficios sería:

$$\begin{array}{c} f_n(I_n) = \text{mínimo } \{C_n(X_n, I_n) + f_{n+1}(I_n + X_n - D_n)\} \\ 0 \le X_n \le 6 \\ \text{y } X_n + I_n \ge D_n \end{array} \tag{22-5}$$

Solución del problema

Este problema se resuelve comenzando con el último periodo y trabajando hacia atrás. En cada etapa se determina la decisión óptima que minimice el costo para

dicho periodo más los costos de los periodos posteriores. Esto se ajusta al principio de optimalidad que se indicó antes. Para cada etapa hay que encontrar un valor óptimo de X_n para cada I_n

Para encontrar la solución numérica real para el problema, comenzamos con el periodo 4. Como la empresa no quiere tener inventario al final del periodo, es fácil determinar las cantidades de producción (Tabla 22-5). Recuerde que la demanda en el periodo 4 es cuatro unidades, por lo cual sólo hay que producir lo suficiente para satisfacer esta demanda. No es necesario considerar los valores de inventario inicial mayores que cuatro.

Pasamos ahora al periodo 3. El inventario inicial en el periodo tres puede estar entre cero y seis unidades disponibles. Más de seis unidades sería un exceso, ya que la demanda en los periodos 3 y 4 suma seis unidades. Se elabora la tabla 22-6, que contiene todos los planes de producción factibles.

Observe que en la tabla 22-6 se marca la cantidad óptima de producción con * para cada nivel de inventario inicial. Los costos en la columna "Costos posteriores" se obtienen de la tabla 22-5.

Los resultados del análisis de la tabla 22-6 se pueden resumir en la tabla 22-7. Así, se ha determinado el programa de producción óptimo de los periodos 3 y 4 para cualquier inventario inicial.

Pasamos ahora al periodo 2. El inventario inicial puede estar entre cero y cuatro unidades. El límite superior de cuatro se debe a que, a lo sumo, se pueden producir seis unidades en el periodo 1 y dos de esas unidades deben usarse para satisfacer la demanda del periodo 1. El análisis para el periodo 2 se muestra en la tabla 22-8. Observe que los valores en la columna "Costos posteriores" son los costos de los periodos 3 *y* 4 y se obtienen de la tabla 22-7. En la tabla 22-9 se proporciona un resumen del periodo 2.

Por último llegamos al periodo 1. El análisis para este periodo se muestra en la tabla 22-10. Es una tabla breve, ya que se sabe que el inventario inicial es de cero unidades.

A partir de la tabla 22-10 se puede ver que la producción óptima en el periodo 1 es de cinco unidades y que el costo total de los cuatro periodos es de 20.5 dólares. El programa óptimo para los periodos 2, 3 y 4 se puede determinar con base en las tablas 22-9, 22-7 y 22-5:

Periodo	*Inventario inicial*	*Producción óptima*	*Inventario final = inventario inicial del siguiente periodo*
1	0	5	3
2	3	0	0
3	0	6	4
4	4	0	0

Podemos verificar el costo de la solución óptima. Hay dos sesiones de producción (en los periodos 1 y 3) que cuestan (3 + 5) y (3 + 6) con un total de 17 dólares.

Tabla 22-5 Solución del periodo 4

Inventario inicial I_4	*Producción óptima* $X_4^* = X_4(I_4)$	*Costo Producción*	*Inventario*	*Costo total* $f_4(I_4)$
0	4	$7	$0	$7.0
1	3	6	0.5	6.5
2	2	5	1.0	6.0
3	1	4	1.5	5.5
4	0	0	2.0	2.0

Tabla 22-6 Periodo 3: Determinación de la producción óptima

Inventario inicial I_3	*Cantidades de producción posibles* X_3	*Inventario final* I_4	*Costo en el periodo 3*			*Costos posteriores* $f_4(I_4)$	*Costos totales* $C_3(X_3, I_3) + f_4(I_4)$
			Producción	*Inventario*	*Total* $C_3(X_3, I_3)$		
0	2	0	$5	$0	$5.0	$7.0	$12.0
	3	1	6	0	6.0	6.5	12.5
	4	2	7	0	7.0	6.0	13.0
	5	3	8	0	8.0	5.5	13.5
	6*	4	9	0	9.0	2.0	11.0*
1	1	0	4	0.5	4.5	7.0	11.5
	2	1	5	0.5	5.5	6.5	12.0
	3	2	6	0.5	6.5	6.0	12.5
	4	3	7	0.5	7.5	5.5	13.0
	5*	4	8	0.5	8.5	2.0	10.5*
2	0*	0	0	1.0	1.0	7.0	8.0*
	1	1	4	1.0	5.0	6.5	11.5
	2	2	5	1.0	6.0	6.0	12.0
	3	3	6	1.0	7.0	5.5	12.5
	4	4	7	1.0	8.0	2.0	10.0
3	0*	1	0	1.5	1.5	6.5	8.0*
	1	2	4	1.5	5.5	6.0	11.5
	2	3	5	1.5	6.5	5.5	12.0
	3	4	6	1.5	7.5	2.0	9.5
4	0*	2	0	2.0	2.0	6.0	8.0*
	1	3	4	2.0	6.0	5.5	11.5
	2	4	5	2.0	7.0	2.0	9.0
5	0*	3	0	2.5	2.5	5.5	8.0*
	1	4	4	2.5	6.5	2.0	8.5
6	0*	4	0	3.0	3.0	2.0	5.0*

* Indica el óptimo para el inventarío inicial dado.

Tabla 22-7 Resumen del periodo 3

Inventario inicial I_3	*Producción óptima* X_3*	*Inventario final* I_4	*Costo total para los periodos 3 y 4* $f_3(I_3)$
0	6	4	$11.0
1	5	4	10.5
2	0	0	8.0
3	0	1	8.0
4	0	2	8.0
5	0	3	8.0
6	0	4	5.0

Tabla 22-8 Periodo 2: Determinación de la producción óptima

Inventario inicial I_2	*Cantidades de producción posibles* X_2	*Inventario final* I_3	*Costo en el periodo 2*			*Costos posteriores* $f_3(I_3)$	*Costos totales* $C_2(X_2, I_2) + f_3(I_3)$
			Producción	*Inventario*	*Total* $C_2(X_2, I_2)$		
0	3	0	$6	$0	$6.0	$11.0	$17.0
	4	1	7	0	7.0	10.5	17.5
	5*	2	8	0	8.0	8.0	16.0*
	6	3	9	0	9.0	8.0	17.0
1	2	0	5	0.5	5.5	11.0	16.5
	3	1	6	0.5	6.5	10.5	17.0
	4*	2	7	0.5	7.5	8.0	15.5*
	5	3	8	0.5	8.5	8.0	16.5
	6	4	9	0.5	9.5	8.0	17.5
2	1	0	4	1.0	5.0	11.0	16.0
	2	1	5	1.0	6.0	10.5	16.5
	3*	2	6	1.0	7.0	8.0	15.0*
	4	3	7	1.0	8.0	8.0	16.0
	5	4	8	1.0	9.0	8.0	17.0
	6	5	9	1.0	10.0	8.0	18.0
3	0*	0	0	1.5	1.5	11.0	12.5*
	1	1	4	1.5	5.5	10.5	16.0
	2	2	5	1.5	6.5	8.0	14.5
	3	3	6	1.5	7.5	8.0	15.5
	4	4	7	1.5	8.5	8.0	16.5
	5	5	8	1.5	9.5	8.0	17.5
	6	6	9	1.5	10.5	5.0	15.5
4	0*	1	0	2.0	2.0	10.5	12.5*
	1	2	4	2.0	6.0	8.0	14.0
	2	3	5	2.0	7.0	8.0	15.0
	3	4	6	2.0	8.0	8.0	16.0
	4	5	7	2.0	9.0	8.0	17.0
	5	6	8	2.0	10.0	5.0	15.0

• Indica el óptimo para el inventario inicial dado.

Tabla 22-9 Resumen del periodo 2

Inventario inicial I_2	*Producción óptima* X_2^*	*Inventario final* I_3	*Costo total para los periodos 2, 3 y 4* $f_2(I_2)$
0	5	2	\$16.0
1	4	2	15.5
2	3	2	15.0
3	0	0	12.5
4	0	1	12.5

Tabla 22-10 Periodo 1: Determinación de la producción óptima

Inventario inicial I_1	*Cantidades de producción posibles* X_1	*Inventario final* I_2	*Costo en el periodo 1*			*Costos posteriores* $f_2(I_2)$	*Costos totales* $C_1(X_1, I_1) + f_2(I_2)$
			Producción	*Inventario*	*Total* $C_1(X_1, I_1)$		
0	2	0	\$5	\$0	\$5.0	\$16.0	\$21.0
	3	1	6	0	6.0	15.5	21.5
	4	2	7	0	7.0	15.0	22.0
	5*	3	8	0	8.0	12.5	20.5*
	6	4	9	0	9.0	12.5	21.5

* Indica el óptimo para el inventario inicial dado.

Así mismo, las cargas finales por almacenamiento de inventario (al final de los periodos 1 y 3) son $0.50 \cdot 3$ y $0.50 \cdot 4$, con un total de 3.50 dólares. Por lo tanto, los costos totales de producción, preparación y almacenamiento son \$17 H \$3.50 = \$20.50; esto es igual a la solución óptima de la tabla 22-10.

Ejemplo 3: Problema de crianza

Considere el problema al que se enfrenta un criador de ganado. Debe decidir cuántas reses debe vender en el mercado cada año y cuántas debe conservar para fines de reproducción. Suponga que el criador comienza con un hato de 200 reses. Si se reproducen, al final del año habrá 1.4 veces más reses que al principio. El costo de crianza es de 30 dólares por cada cabeza que no se venda. La crianza tiene lugar una vez al año y el costo de 30 dólares incluye todos los gastos para mantener un animal y su cría. El ganadero también puede vender las reses en el mercado, a un precio que depende de la cantidad de cabezas que venda. Si Y representa el número de reses que se venden en un año, el precio, P, se determina con la ecuación 22-6:

$$P = 200 - 0.2Y, \quad 0 \leq Y \leq 1\,000 \tag{22–6}$$

Suponga que el ganadero piensa vender todo el hato dentro de 10 años y jubilarse, y que el comprador del ganado pagará 150 dólares por cabeza en ese momento.

El ganadero debe decidir cuánto ganado vender en el mercado cada año y cuántas reses criar, de manera que maximice el beneficio. En este ejemplo se omite el valor del dinero con el paso del tiempo, para que sea más claro.

Formulación

Este problema se puede resolver con programación dinámica. Definamos lo siguiente:

X_n = Tamaño del hato al iniciar el año n (la variable de estado)

$f_n(X_n)$ = Beneficio máximo del año n al año 10 cuando hay X_n reses en el hato al iniciar el año n y se toman las decisiones óptimas desde el año n hasta el año 10 (la función de beneficios)

Y_n = Número de reses que se venderán al iniciar el año n (la variable de decisión)

$Y_n^*(X_n)$ = Número óptimo de reses para vender al iniciar el año n, dado un hato de tamaño X_n (la regla de decisión óptima)

Observe que n, el número de etapa, se refiere al año en el cual se toma la decisión; $n = 1, 2, \ldots, 10$. Observe también que el beneficio máximo, $f_n(X_n)$, es una función del número de etapa (n) y de la variable de estado actual (X_n) que representa el tamaño del hato.

Al comenzar por el final del proceso de decisión, el tamaño del hato en el año 10 se representa con X_{10}. Como las reses se venderán a 150 dólares cada una al iniciar el año 10, se puede escribir:

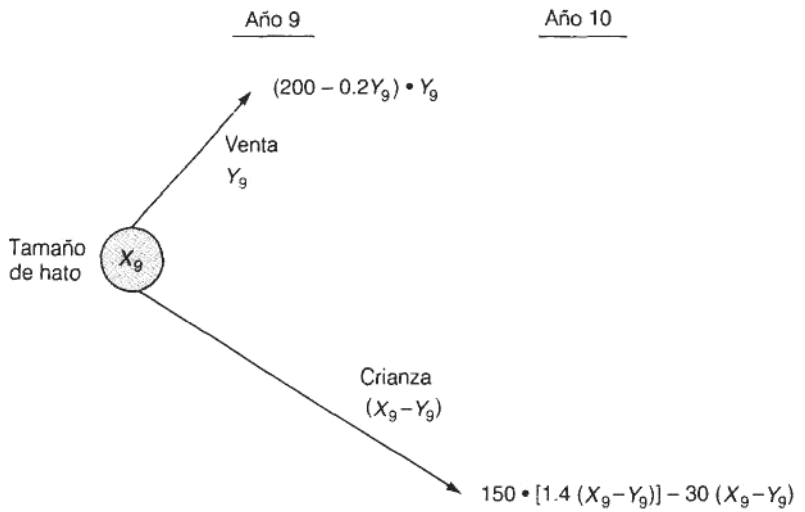
$$F_{10}(X_{10}) = 150X_{10} \tag{22–7}$$

Trabajando hacia atrás, la decisión al iniciar el año 9 y el beneficio máximo correspondiente del año 9 en adelante sería:

$$f_9(X_9) = \text{Max}\{\overbrace{(200 - 0.2Y_9) \cdot Y_9}^{\textit{Venta } Y_9} + \overbrace{[f_{10}(1.4(X_9 - Y_9)) - 30(X_9 - Y_9)]}^{\textit{Crianza } (X_9 - Y_9)}\} \qquad 0 \le Y_9 \le X_9 \tag{22–8}$$

La ecuación 22-8 indica que el beneficio máximo disponible del año 9 en adelante, si el tamaño actual del hato es X_9, es igual a la cantidad máxima que se puede obtener de la venta de Y_g reses y la crianza de las restantes $(X_9 - Y_g)$. Los términos entre corchetes { } de la ecuación 22-8 representan el beneficio de la venta de Y_g reses más el rendimiento bruto de criar $(X_9 - Y_9)$ reses, menos el costo de crianza de $(X_9 - Y_9)$ reses. Observe que el beneficio bruto de criar $(X_9 - Y_g)$ reses se escribe como $f_{10}(1.4(X_9 - Y_9))$ y no como $150(1.4)(X_9 - Y_9)$. Esto se hace para subrayar que se desarrolla una **relación de recurrencia** entre el beneficio máximo en una etapa (n) y el beneficio máximo de la etapa siguiente $(n + 1)$. La figura 22-2 ilustra la decisión en el año 9. La decisión óptima en el año 9, indicada con $K_9^*(X_9)$ será típicamente una función del tamaño del hato, X_9.

Figura 22-2



Trabajando hacia atrás, se obtiene una ecuación similar para el problema de decisión del año 8:

$$f_8(X_8) = \text{Max}_{0 \le Y_8 \le X_8} \{\underbrace{(200 - 0.2Y_8) \cdot Y_8}_{\textit{Venta } Y_8} + [\underbrace{f_9(1.4(X_8 - Y_8))}_{\textit{Crianza } (X_8 - Y_8)} - 30(X_8 - Y_8)]\} \quad \textbf{(22–9)}$$

Es posible escribir una ecuación general para el año *n:*

$$f_n(X_n) = \text{Max}_{0 \le Y_n \le X_n} \{\underbrace{(200 - 0.2Y_n) \cdot Y_n}_{\textit{Venta } Y_n} + [\underbrace{f_{n+1}(1.4(X_n - Y_n))}_{\textit{Crianza } (X_n - Y_n)} - 30(X_n - Y_n)]\} \quad \textbf{(22–10)}$$

$$\text{para } n = 1, 2, \ldots, 9$$

La ecuación 22-10 ilustra la relación de recurrencia básica para este problema de programación dinámica.

Solución

El conjunto de ecuaciones que representan las ecuaciones 22-7 y 22-10 se puede resolver *recursivamente,* comenzando con la ecuación 22-7 y trabajando hacia atrás. Al resolver cada ecuación hay que registrar la regla de decisión óptima que relaciona Y_n^* con X_n y el beneficio máximo que se obtiene como función de X_n.

Resuelva primero la ecuación 22-7:

$$f_{10}(X_{10}) = 150X_{10}$$

Se venderá todo el hato al iniciar el año 10, sin importar su tamaño. La solución de la ecuación 22-7 es trivial, ya que el problema establece que el ganadero venderá todas sus reses en el año 10. Por lo tanto, $Y_{10}^{*}(X_{10}) = X_{10}$.

Luego considere la ecuación 22-8 para el año 9, sustituyendo la solución de la ecuación 22-7 en la ecuación 22-8:

$$f_9(X_9) = \underset{0 \le Y_9 \le X_9}{\text{Max}} \{\underbrace{(200 - 0.2Y_9) \cdot Y_9}_{\textit{Venta } Y_9} + [\underbrace{150(1.4)(X_9 - Y_9) - 30(X_9 - Y_9)}_{\textit{Crianza } (X_9 - Y_9)}]\} \quad \textbf{(22–11)}$$

o sea:

$$f_9(X_9) = \underset{0 \le Y_9 \le X_9}{\text{Max}} \{200Y_9 - 0.2(Y_9)^2 + 210(X_9 - Y_9) - 30(X_9 - Y_9)\} \quad \textbf{(22–12)}$$

Al simplificar se obtiene:

$$f_9(X_9) = \underset{0 \le Y_9 \le X_9}{\text{Max}} \{-0.2(Y_9)^2 + 20Y_9 + 180X_9\} \quad \textbf{(22–13)}$$

El conjunto de términos que aparece entre llaves { } en la ecuación 22-13 es una ecuación cuadrática. Para encontrar el valor de Y_9 que maximice el beneficio se puede aplicar el cálculo.[3] Tome la primera derivada e iguale a cero:

$$\frac{d\{\ \}}{dY_9} = -0.2(2)Y_9 + 20 = 0 \quad \textbf{(22–14)}$$

de manera que:

$$Y_9^{*} = \frac{20}{0.4} = 50 \quad \textbf{(22–15)}$$

Poi lo tanto, el ganadero debe vender 50 cabezas de ganado y criar las demás en el año 9.[4] El beneficio máximo del año 9 al año 10 se puede calcular sustituyendo el valor de la decisión óptima en la ecuación 22-11:

$$\begin{aligned} f_9(X_9) &= [200 - 0.2(50)] \cdot 50 + 210(X_9 - 50) - 30(X_9 - 50) \\ &= [190] \cdot 50 + 180(X_9 - 50) \\ &= 9{,}500 + 180X_9 - 9{,}000 \\ &= 180X_9 + 500 \end{aligned} \quad \textbf{(22–16)}$$

[3] También se podría hacer por tanteo, pero el cálculo es mucho más eficiente para este problema en particular.

[4] Observe que en este ejemplo la decisión óptima en el año 9 no es una función del tamaño del hato si $X \ge 50$. Los ingresos marginales de la venta del quincuagésimo animal son de 180.20 dólares. El beneficio incrementa! de no venderlo en el periodo 9 es de 180 dólares (es decir, 1.4 · $ 150 - $30). Si $X_9 < 50$, entonces $Y_9^{*} = X_9$;o sea, hay que vender todo el ganado en el año 9 si hay menos de 50 cabezas.

suponiendo que X_9 es mayor que 50. Si hay menos de 50 reses en el hato en el año 9, hay que vender todas.

Considere ahora la decisión para el año 8. Se puede escribir:

$$f_8(X_8) = \text{Max}\ \{\underbrace{(200 - 0.2Y_8) \cdot Y_8}_{\textit{Venta } Y_8} + [\underbrace{f_9(1.4(X_8 - Y_8))}_{\textit{Crianza } (X_8 - Y_8)} - 30(X_8 - Y_8)]\} \qquad \textbf{(22–17)}$$
$$0 \le Y_8 \le X_8$$

Como $X_9 = 1.4(X_8 - Y_8)$ y se ha establecido que $f_9(X_9) = 180X_9 + 500 = 180(1.4)(X_8 - Y_8) + 500$ por la ecuación 22-16, se puede sustituir esto[5] en la ecuación 22-17 para obtener:

$$f_8(X_8) = \text{Max}\ \{(200 - 0.2Y_8) \cdot Y_8 + [180(1.4)(X_8 - Y_8) + 500 - 30(X_8 - Y_8)\} \qquad \textbf{(22–18)}$$
$$0 \le Y_8 \le X_8$$

o sea:

$$f_8(X_8) = \text{Max}\ \{200Y_8 - 0.2(Y_8)^2 + 252(X_8 - Y_8) + 500 - 30(X_8 - Y_8)\} \qquad \textbf{(22–19)}$$
$$0 \le Y_8 \le X_8$$

Al simplificar se obtiene:

$$f_8(X_8) = \text{Max}\ \{-0.2(Y_8)^2 - 22Y_8 + 222X_8 + 500\} \qquad \textbf{(22–20)}$$
$$0 \le Y_8 \le X_8$$

Una vez más, el valor de Y_s que maximiza el beneficio se obtiene al igualar a cero la derivada del término que aparece entre llaves en la ecuación 22-20 y resolver para determinar Y_8^*:

$$\frac{d\{\ \}}{dY_8} = -0.2(2)Y_8 - 22 = 0 \qquad \textbf{(22–21)}$$

de manera que:

$$Y_8^* = \frac{-22}{0.4} = -55 \qquad \textbf{(22–22)}$$

El valor de Y_s que maximiza el beneficio es negativo, pero no se permiten los valores negativos. Por lo tanto, hacemos Y_s^* igual a cero para el beneficio máximo factible. Entonces:

$$f_8(X_8) = 222X_8 + 500 \qquad \textbf{(22–23)}$$

La razón por la cual no se deben vender reses a 200 dólares es que cualquier animal que se retenga dará lugar a 1.96 animales en dos periodos, que al venderse

[5] Estrictamente, la ecuación 22-16 sólo es válida para $X_9 \ge 50$. Si X_9 es menor que 50, lo óptimo es hacer $Y_9 = X_9$ y se podría escribir la función de beneficios para ese intervalo. Se obtiene la misma solución para Y_8 que en la ecuación 22-22.

generarán 294 dólares (es decir, 1.96 · $150). El costo de mantener el animal durante el primer periodo es de 30 dólares y el mantenimiento de 1.4 animales en el segundo periodo es de 42 dólares. Por lo tanto, el beneficio de no vender ahora es $294 - $72 = $222, comparado con los 200 dólares que se obtienen de la venta en este momento.

El proceso de solución podría continuar para el año 7 y los anteriores, obteniendo cada vez la decisión óptima Y_n*. Así se obtendría la política óptima o el conjunto de reglas de decisión. En este ejemplo, la política óptima comprende criar todo el hato cada año hasta el año 9 y vender entonces 50 cabezas. El valor de $f_1(X_1)$ para X_1 igual a 200 indicaría el beneficio máximo para el ganadero, suponiendo que se sigue la política óptima en los 10 años.

Formulación y solución de problemas de programación dinámica

Para formular un problema de decisión empresarial como uno de programación dinámica, es necesario dividir el problema en varios subproblemas o etapas de decisión, como se hizo en los ejemplos que se presentaron. También es necesario poder describir el estado del sistema con una variable de estado.[6] Por último, hay que escribir la relación de recurrencia general entre el beneficio máximo en una etapa y el beneficio máximo de la siguiente; véanse las ecuaciones 22-5 y 22-10 como ejemplos. La etapa muchas veces se refiere a un periodo de tiempo, pero no siempre tiene que representar tiempo.

Es poco común resolver a mano un problema de programación dinámica; generalmente se requiere un computador para realizar los cálculos. En ocasiones, la estructura el problema permitirá obtener la maximización o la minimización de la relación de recurrencia con cálculo, como en el tercer ejemplo, o por métodos analíticos. Otras veces, será necesario programar un computador para que efectúe una búsqueda en una matriz de valores permitidos para poder determinar la decisión óptima por tanteos. Este procedimiento de búsqueda se empleó en los dos primeros ejemplos, donde se observaron todas las posibilidades y se eligió la que tenía mayor beneficio en cada etapa.

Aunque los conceptos básicos de la programación dinámica están presentes en toda formulación y solución de programación dinámica, los procedimientos numéricos que se utilizan para obtener la solución son muy variables, dependiendo del problema. Por ello, no existe un programa de computación para la resolución de problemas de programación dinámica, como sucede para resolver problemas de programación lineal. De hecho, un problema de programación dinámica no está tan bien definido como uno de programación lineal; lo único que se sabe es que están presentes las etapas de decisión, que existe una variable de estado y que se han registrado las relaciones de recurrencia. La complejidad de las relaciones de recurrencia determina en gran parte si es fácil, difícil o imposible resolver el problema de programación dinámica.

[6] La variable de estado puede ser más de una variable, pero si su dimensionalidad excede dos o tres, es muy difícil obtener soluciones numéricas.

Programación dinámica en condiciones de incertidumbre

Es posible ampliar la gama de problemas que se pueden formular como problemas de programación dinámica para incluir aquellos donde hay incertidumbre (en el sentido de una distribución de probabilidad conocida). La maximización o minimización de las relaciones de recurrencia puede contener variables aleatorias. El ejemplo siguiente ilustra el uso de la programación dinámica en condiciones de incertidumbre.

Ejemplo 4: Problema de compras

Una empresa debe obtener materia prima en cinco semanas. El precio de la materia prima varía cada semana, de acuerdo con las probabilidades de la siguiente tabla, siendo el precio en una semana independiente del precio en las demás. Si la empresa decide comprar la materia prima al final de la semana, paga el precio que prevalece en la semana.

Precio	*Probabilidad*
$500	0.3
600	0.3
700	0.4

Si decide posponer su compra, deberá obtener la materia prima en una semana posterior, al precio que exista cuando decida comprar la materia prima. Si la empresa no ha comprado el material antes de la semana 5, se verá obligada a comprarla al final de la semana 5, ya que requiere el material para la producción. El objetivo es encontrar una política de compras que minimice el costo esperado del material.

Formulación

Este problema se puede resolver con programación dinámica. Sea:

n = Número de semana; $n = 1, 2, \ldots, 5$ (el número de etapa)
X_n = Precio observado en la semana n (la variable de estado)
$f_n(X_n)$ = Costo mínimo esperado si el precio que se observa en la semana n es X_n y se sigue una política óptima de la semana n al final del proceso (la función de beneficios)

Se trabaja hacia atrás y se considera la última semana (semana 5):

$$f_5(X_5) = X_5 \qquad \textbf{(22–24)}$$

ya que la empresa debe comprar el material en la semana 5 si no la ha hecho antes.

Ahora, en la penúltima semana (semana 4):

$$f_4(X_4) = \text{Min}\{\overbrace{X_4}^{\textit{Actuar}};\ \overbrace{(500)\cdot(0.3) + (600)\cdot(0.3) + (700)\cdot(0.4)}^{\textit{Esperar}}\} \quad \textbf{(22–25)}$$

Es decir, la empresa puede actuar y obtener el precio X_4 o esperar y obtener el valor esperado del precio en la última semana. Reescribamos la ecuación 22-25 en función de $f_5(X_5) = X_5$:

$$f_4(X_4) = \text{Min}\{\overbrace{X_4}^{\textit{Actuar}};\ \overbrace{f_5(500)\cdot(0.3) + f_5(600)\cdot(0.3) + f_5(700)\cdot(0.4)}^{\textit{Esperar}}\} \quad \textbf{(22–26)}$$

La figura 22-3 ilustra las alternativas en la semana 4.

La situación en la semana 3 es:

$$f_3(X_3) = \text{Min}\{\overbrace{X_3}^{\textit{Actuar}};\ \overbrace{f_4(500)\cdot(0.3) + f_4(600)\cdot(0.3) + f_4(700)\cdot(0.4)}^{\textit{Esperar}}\} \quad \textbf{(22–27)}$$

y en términos generales, para la semana n:

$$f_n(X_n) = \text{Min}\{\overbrace{X_n}^{\textit{Actuar}};\ \overbrace{f_{n+1}(500)\cdot(0.3) + f_{n+1}(600)\cdot(0.3) + f_{n+1}(700)\cdot(0.4)}^{\textit{Esperar}}\} \quad \textbf{(22–28)}$$

$$n = 1, 2, \ldots, 4$$

Solución

Las ecuaciones 22-24 y 22-28 se pueden resolver en forma recursiva, comenzando con la ecuación 22-24 y trabajando hacia atrás. En la semana 5 es necesario comprar el material si no se ha comprado antes. En la semana 4, se mantiene la ecuación 22-25. Para llevar a cabo la minimización de la ecuación 22-25, se igualan los valores de las dos alternativas ("actuar" y "esperar") y se resuelve para el valor de equilibrio de X_4, representado con X_{4b}:

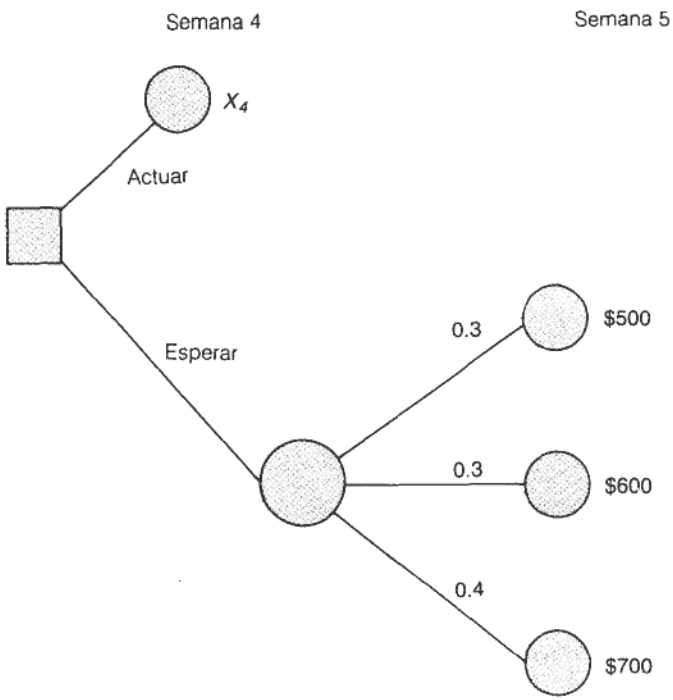
$$\begin{aligned} X_{4b} &= 500(0.3) + 600(0.3) + 700(0.4) \\ &= 150 + 180 + 280 = 610 \end{aligned} \quad \textbf{(22–29)}$$

Si el precio en la semana 4 es menor que 610 dólares, se debe efectuar de inmediato la compra; si el precio es mayor que esa cantidad, hay que posponer la compra. Es necesario registrar el costo mínimo esperado en la semana 4:

$$f_4(X_4) = \begin{cases} 500 \text{ si } X_4 = 500 \\ 600 \text{ si } X_4 = 600 \\ 610 \text{ en otro caso} \end{cases} \quad \textbf{(22–30)}$$

La ecuación 22-30 establece que el costo mínimo esperado en la semana 4 es de 500 dólares si el precio es de 500 dólares, 600 dólares si el precio es de 600 dólares o 610 dólares si el precio es de 700 dólares. Observe que el valor de 610 dólares representa el precio esperado en la semana 5.

Figura 22-3



Considere ahora la semana 3:

$$f_3(X_3) = \text{Min}\ \{X_3;\ \overbrace{f_4(500)(0.3) + f_4(600)(0.3) + f_4(700)(0.4)}^{Esperar}\} \qquad \textbf{(22–31)}$$

Al sustituir la ecuación 22-30 en la ecuación 22-31

$$f_3(X_3) = \text{Min}\ \{X_3;\ \overbrace{(500)(0.3) + (600)(0.3) + (610)(0.4)}^{Esperar}\} \qquad \textbf{(22–32)}$$

Una vez más, se encuentra el valor de equilibrio para X_3, representado con X_{36}, en el cual las dos alternativas tienen el mismo valor:

$$\begin{aligned} X_{3b} &= 500(0.3) + 600(0.3) + 610(0.4) \\ &= 150 + 180 + 244 = 574 \end{aligned} \qquad \textbf{(22–33)}$$

Si el precio en la semana 3 es menor de 574 dólares, hay que efectuar la compra de inmediato; pero si el precio es mayor de 574 dólares, hay que posponer la

compra. El costo mínimo esperado en la semana 3 se registra de la siguiente manera:

$$f_3(X_3) = \begin{cases} 500 \text{ si } X_3 = 500 \\ 574 \text{ en otro caso} \end{cases} \quad \textbf{(22–34)}$$

En la semana 2:

$$f_2(X_2) = \text{Min}\{\overbrace{X_2}^{Actuar};\ \overbrace{(500)(0.3) + (574)(0.3) + (574)(0.4)}^{Esperar}\} \quad \textbf{(22–35)}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} X_{2b} &= 500(0.3) + 574(0.3) + 574(0.4) \\ &= 150 + 172.2 + 229.6 = 551.8 \end{aligned} \quad \textbf{(22–36)}$$

y:

$$f_2(X_2) = \begin{cases} 500 \text{ si } X_2 = 500 \\ 551.8 \text{ en otro caso} \end{cases} \quad \textbf{(22–37)}$$

Por último, en la semana 1:

$$f_1(X_1) = \text{Min}\{\overbrace{X_1}^{Actuar};\ \overbrace{(500)(0.3) + (551.8)(0.3) + (551.8)(0.4)}^{Esperar}\} \quad \textbf{(22–38)}$$

Por lo tanto:

$$\begin{aligned} X_{1b} &= 500(0.3) + 551.8(0.3) + 551.8(0.4) \\ &= 150 + 166.54 + 220.72 = 536.26 \end{aligned} \quad \textbf{(22–39)}$$

y:

$$f_1(X_1) = \begin{cases} 500 \text{ si } X_1 = 500 \\ 536.26 \text{ en otro caso} \end{cases} \quad \textbf{(22–40)}$$

La política óptima para el director de compras se podría resumir de la siguiente manera: Si el precio en la semana 1, 2 o 3 es de 500 dólares, hacer la compra de inmediato; esperar en caso contrario. Si el precio en la semana 4 es de 500 o 600 dólares, hacer la compra de inmediato; esperar en caso contrario. Si no se ha efectuado la compra antes de la semana 5, hay que comprar al precio vigente en esa semana. Si se sigue la política óptima, la ecuación 22-40 indica que el costo mínimo esperado es de 500 dólares si X_1 = 500 dólares y 536.26 dólares si X_1 es mayor que 500 dólares. El costo mínimo esperado antes de conocer X_1 es \$500(0.3) + 536.26(0.7) = \$525.38.

RESUMEN

La programación dinámica se puede emplear para resolver problemas que comprenden secuencias de decisiones relacionadas. La formulación de un problema de programación dinámica requiere la definición de etapas, variables de estado, funciones de beneficios y reglas de decisión óptima. Se trabaja hacia atrás, se resuelve cada etapa y se registra el resultado y la decisión óptima. La técnica también se puede aplicar a problemas que implican incertidumbre.

Tabla 22-11

De \ A	*Ajustada (estado 1)*	*Desajustada (estado 2)*
Ajustada (estado 1)	0.9	0.1
Desajustada (estado 2)	0.7	0.3

Apéndice Uso de programación dinámica en procesos de Markov[7]

Es posible usar una técnica de programación dinámica para optimizar el comportamiento a corto plazo de un proceso de Markov con decisiones. El siguiente ejemplo ilustra la aplicación de la programación dinámica para resolver un modelo de proceso de Markov en el cual la solución depende del estado inicial. En este tipo de problema, el comportamiento a corto plazo es relevante para la decisión.

Ejemplo Considere la máquina que se describió en el ejemplo 1 del capítulo 21. Suponga que la máquina pasa del estado 1 (ajustada) al estado 2 (desajustada) y viceversa, con las probabilidades de cambio que se indican en la tabla 22-11:

Suponga que cuando la máquina se halla en el estado 1 durante un día se obtiene un beneficio de 200 dólares; si la máquina se encuentra en el estado 2 durante un día, se incurre en una pérdida de 600 dólares. Si el decisor se preocupa por lo que puede suceder a largo plazo, se procedería como se indicó en el capítulo 21 y se calcularían las probabilidades de estado estacionario de la siguiente manera, con la ecuación 21-14:

$$P_1 = \frac{0.7}{0.1 + 0.7} = \frac{0.7}{0.8} = \frac{7}{8} \qquad \textbf{(22–41)}$$

El beneficio diario esperado a largo plazo sería:

$$\text{Beneficio} = (\tfrac{7}{8})\$200 + (\tfrac{1}{8})(-\$600) = \$100$$

Ahora tiene la opción de añadir personal de reparación para atender la máquina cuando se encuentre en el estado 2 (desajustada). Usted observa la máquina al iniciar el día y el personal la repara rápidamente, de manera que se logra un día completo de funcionamiento en el estado 1 después de la reparación (suponga que después de la reparación la máquina opera perfectamente todo el día). Suponga que las transiciones de estado ocurren al final del día de trabajo. El costo de reparar la máquina cada vez es de 850 dólares. ¿Debe añadirse el personal de reparación?

[7] Antes de estudiar este capítulo hay que leer el capítulo 21 acerca de los procesos de Markov.

Tabla 22-12

De \ A	*Ajustada (estado 1)*	*Desajustada (estado 2)*
Ajustada (estado 1)	0.9	0.1
Desajustada (estado 2)	1.0	0

Solución de estado estacionario

Si lo que nos interesa es lo que sucede a largo plazo, el comportamiento de estado estacionario del sistema, este problema se puede resolver especificando una tabla de probabilidades de transición que represente la opción de añadir el personal de reparación (véase Tabla 22-12).

Como la reparación se realiza rápidamente, se interpreta el estado 2 como la ganancia de 200 dólares que se obtiene normalmente en el estado 1, *menos* el costo de la reparación (850 dólares), con un costo neto de 650 dólares. La probabilidad de estado estacionario del estado 1 es ahora:

$$P_1 = \frac{1.0}{0.1 + 1.0} = \frac{10}{11} \qquad \textbf{(22–42)}$$

El beneficio diario esperado a largo plazo, suponiendo que las reparaciones se efectúan cuando sea necesario, sería:

$$\text{Beneficio esperado} = (^{10}/_{11})\$200 + (^{1}/_{11})(-650) = \$122.73$$

Como esto excede los 100 dólares que se obtienen sin las reparaciones, hay que agregar el personal de reparación.

Suponga ahora que sólo nos interesan los próximos cinco días de funcionamiento, después de los cuales se piensa vender la máquina. Ahora necesitamos saber cuál es el uso óptimo de la capacidad de reparación en eí periodo de cinco días. Hay que tomar en cuenta que el valor incremental de hallarse en el estado 1 o en el estado 2 dependerá de las decisiones futuras de reparación. Muchas veces la programación dinámica ofrece una respuesta para este tipo de problema.

Formulación de programación dinámica

Sea:

n = Número de día; n = 1, 2, . . ., 5 (el número de etapa)
X_n = Variable de estado que indica el estado del proceso (1 o 2) en el día n
$f_n(X_n)$ = Beneficio máximo que se obtiene del día n al día 5 cuando el proceso está en el estado X_n en el día n y se toman las decisiones óptimas desde el día n hasta el día 5 (la función de beneficios)

En el día 5:

$$f_5(1) = 200$$

$$\begin{array}{rcl} f_5(2) & = & \text{Max} \{ \underbrace{-850 + 200}_{\textit{Reparar}}, \underbrace{-600}_{\textit{No reparar}} \} \\ & = & \text{Max} \{ -650, -600 \} \\ & = & -600 \end{array} \qquad \textbf{(22–43)}$$

Registremos la regla de decisión óptima como una función de la variable de estado y sea $Y_n^*(X_n)$ la decisión óptima en el día n. La reparación es posible únicamente si la máquina no está ajustada (estado 2). Si un uno representa "reparar" y un cero representa "no reparar", entonces:

$$Y_5^*(2) = 0 \qquad \textbf{(22–44)}$$

Es decir, no se repara en el día 5.

Trabajando hacia atrás, en el día cuatro se escribe:

$$f_4(1) = 200 + (0.9)(200) + [1 - 0.9](-600) = 320 \qquad \textbf{(22–45)}$$

$$\begin{array}{rcl} f_4(2) & = & \text{Max} \left\{ \begin{array}{ll} \underbrace{-850 + 200 + 0.9(200) + [1 - 0.9](-600)}_{\textit{Reparar}}, & \underbrace{-600 + (0.7)(200) + [1 - 0.7](-600)}_{\textit{No reparar}} \end{array} \right\} \\ & = & \text{Max} \{ -530, -640 \} \\ & = & -530 \end{array}$$

Al registrar la regla de decisión óptima como función de la variable de estado, escribimos:

$$Y_4^*(2) = 1 \qquad \textbf{(22–46)}$$

Observe que la decisión de reparar la máquina cuando está fuera de ajuste no era deseable en el día 5, pero sí lo es el día 4. Para el día 3:

$$f_3(1) = 200 + (0.9)(320) + [1 - 0.9](-530) = 435 \qquad \textbf{(22–47)}$$

$$\begin{array}{rcl} f_3(2) & = & \text{Max} \left\{ \begin{array}{ll} \underbrace{-850 + 200 + 0.9(320) + [1 - 0.9](-530)}_{\textit{Reparar}}, & \underbrace{-600 + (0.7)(200) + [1 - 0.7](-530)}_{\textit{No reparar}} \end{array} \right\} \\ & = & \text{Max} \{ -415, -535 \} \\ & = & -415 \end{array}$$

y:

$$Y_3^*(2) = 1 \qquad \textbf{(22–48)}$$

Para el día 2:

$$f_2(1) = 200 + (0.9)(435) + [1 - 0.9](-415) = 550 \qquad \textbf{(22–49)}$$

$$\begin{aligned} f_2(2) &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{ll} \underline{\textit{Reparar}} & \underline{\textit{No reparar}} \\ -850 + 200 + (0.9)(435) & -600 + (0.7)(435) \\ \quad + [1 - 0.9](-415), & \quad + [1 - 0.7](-415) \end{array} \right\} \\ &= \text{Max} \{ -300, \quad -420 \} \\ &= -300 \end{aligned}$$

y:

$$Y_2^*(2) = 1 \qquad \textbf{(22–50)}$$

Por último, para el día 1:

$$f_1(1) = 200 + (0.9)(550) + [1 - 0.9](-300) = 665 \qquad \textbf{(22–51)}$$

$$\begin{aligned} f_1(2) &= \text{Max} \left\{ \begin{array}{ll} \underline{\textit{Reparar}} & \underline{\textit{No reparar}} \\ -850 + 200 + (0.9)(550) & -600 + (0.7)(550) \\ \quad + [1 - 0.9](-300), & \quad + [1 - 0.7](-300) \end{array} \right\} \\ &= \text{Max} \{ -185, \quad -305 \} \\ &= -185 \end{aligned}$$

y:

$$Y_1^*(2) = 1 \qquad \textbf{(22–52)}$$

El conjunto de reglas de decisión óptima $Y_1^*(2)$, $Y_2^*(2)$, . . ., $Y_5^*(2)$ constituye una política óptima con respecto a la decisión de reparación en un periodo de cinco días. Observe que en el día 5 no es óptimo reparar la máquina si ésta se encuentra desajustada, pero sí es lo óptimo en los días 1 a 4. Este caso se presenta porque la ganancia de la reparación de la máquina tiene dos componentes. Primero, la producción diaria se valúa en 200 dólares en lugar de -600 dólares. Segundo, la máquina se halla en el estado 1 al final del día y no en el estado 2, por lo que las probabilidades futuras se inclinan más a favor del estado 1. En el día 5 se detiene el proceso y el valor *futuro* al final del día 5 en el estado 1, comparado con el estado 2, no tiene valor. No obstante, en el día 4 sí tiene valor futuro terminar el día en el estado 1. Una comparación ingenua de los beneficios diarios de 800 dólares y los costos diarios de 850 dólares nos llevaría a rechazar la alternativa de reparación; pero, el análisis de programación dinámica indica precisamente cuándo hay que optar por la reparación.

Discusión

Si el problema real no comprende un horizonte finito, como los cinco días, entonces se puede tratar de formular el problema como dos procesos de Markov alternativos (como se hizo inicialmente con la opción de reparación). Si no es posible formular de esta manera el problema de programación dinámica, hay dos formas de modificar el procedimiento. Una es seguir trabajando hacia atrás, desde un día n hasta un día $n - k$ y maximizar el beneficio diario en los $k + 1$ días de funcionamiento. Al trabajar hacia atrás, llegará un momento en el cual el beneficio máximo promedio por día se aproxime a un valor constante y será adecuado utilizar la regla de decisión para el primer día.

Otra manera de manejar el problema del horizonte infinito es añadir un descuento al proceso. Si se tiene en cuenta el valor del dinero en el tiempo, entonces se descuenta cada periodo que represente ganancias futuras. Al trabajar hacia atrás desde el día n hasta el día $n - k$, el valor actual máximo de todos los beneficios se aproximará a un valor constante. Entonces, la regla de decisión del primer día sería la apropiada para el caso del horizonte infinito.

Hay que señalar que el primero de estos métodos maximiza el beneficio diario promedio y que el segundo maximiza el valor actual de los beneficios futuros. Los dos métodos pueden producir resultados diferentes si el factor de descuento es mucho menor que 1, por lo cual el decisor debe determinar cuál es el objetivo más apropiado.

Bibliografía

Bellman, R. E., *Dynamic Programming,* Princeton, Princeton University Press, 1957. Bellman, R. E. y S. E. Dreyfus, *Applied Dynamic Programming,* Princeton, Princeton University Press, 1962.

Denardo, E. V., *Dynamic Programming: Models and Applications,* Englewood Cliffs, N. J., PrenticeHall, 1982.

Dreyfus, S. E. y A. M. Law, *The Art and Theory of Dynamic Programming,* Nueva York, Academic Press, 1977.

Hillier, F. y G. J. Lieberman, *Introduction to Operations Research,* 5a. ed., Nueva York, McGraw-Hill, 1990.

Howard, R. A., *Dynamic Programming and Markov Processes,* Cambridge, Mass., MIT Press, 1960.

Nemhauser, George L., *Introduction to Dynamic Programming,* Nueva York, John Wiley & Sons, 1966.

Wagner, H. M., *Principles of Operations Research,* 2da. ed., Englewood Cliffs, N. J., Prentice Hall, 1975.

Problemas con respuestas

22-1. Un director debe decidir acerca de una política de precios para un nuevo producto en los próximos cuatro años. Considera cinco niveles de precio: 12, 14, 16, 18 y 20 dólares por unidad. Después de evaluar los posibles movimientos de precio de sus

competidores, construye la siguiente tabla de resultados, la cual relaciona su precio en un año con el valor actual del beneficio esperado en dicho año.

Tabla de resultados

Precio \ Año	1	2	3	4
$12	3	9	3	7
$14	2	1	2	2
$16	7	4	8	1
$18	9	2	6	4
$20	5	5	3	1

a. Si no hay restricciones en los cambios de precio de un año a otro, indique cuál sería la estrategia de precios óptima y calcule el beneficio total máximo.

b. Suponga ahora que el director quiere evitar los cambios de precio de más de dos dólares de un año al siguiente. En cuentre la política óptima y calcule el beneficio total máximo.

22-2. Un ganadero tiene un hato de 400 reses. Piensa vender todo el hato dentro de un año, a 150 dólares la cabeza. Puede vender el ganado ahora a un precio por animal que depende del número de reses que decida vender. Si y representa el número que vende ahora, entonces el precio que obtendrá por cabeza será:

$$P = 200 - 0.2Y, \quad 0 \le Y \le 1000$$

Por otra parte, todo el ganado que no venda se cría a un costo de 30 dólares por cabeza; la tasa de reproducción es de 1.4 reses por cabeza.

a. Calcule el beneficio del ganadero si vende ahora todas sus reses.

b. Calcule su beneficio si no vende ahora ninguna res.

c. Escriba una expresión general para el beneficio del ganadero si vende Y reses ahora y cría las demás (400 - Y). Simplifique su expresión todo lo posible.

d. Sustituya en la expresión de beneficio que obtuvo en (c) el valor $Y = 50$ y calcule el beneficio que obtendrá si vende 50 reses ahora.

e. Tome la derivada de su expresión en (c) con respecto a Y e iguale a cero. Verifique que el número óptimo de reses que debe venderse ahora sea 50.

f. Este problema es otra versión del problema de crianza de ganado de 10 años que se analizó en este capítulo. La ecuación 22-16 representa el beneficio máximo total cuando falta un año, como en nuestro caso:

$$f_9(X_9) = 180X_9 + 500 \quad \textbf{(22–16)}$$

donde X_9 representa el tamaño del hato.

Sustituya el tamaño de hato de 400 en la ecuación 22-16 y calcule el beneficio total máximo para este problema. Su respuesta debe ser idéntica a la respuesta en *(d)*.

g. Utilice la ecuación 22-16 para calcular el beneficio total máximo de un hato de 200.

22-3. Considere un problema de inventario como el que se presentó en el ejemplo 2 de este capítulo. Suponga que la demanda es la siguiente:

Mes	Demanda
Enero	4
Febrero	5
Marzo	3
Abril	2

El costo de preparación es de cinco dólares, el costo variable de producción es de un dólar y el costo de almacenamiento de inventario es de un dólar por mes. Suponga además que el inventario inicial en enero es una unidad. ¿Cuál es el programa de producción óptimo para este problema?

22-4. Un director debe contratar un asistente dentro de cinco días. El director utiliza un pro-

cedimiento de prueba que da como resultado una calificación numérica para cada solicitante. Suponga que la mejor calificación diaria varía de acuerdo con las probabilidades de la siguiente tabla:

Mejor calificación	*Probabilidad*
10	0.2
9	0.4
8	0.4

Si un solicitante no es aceptado para el puesto el día de su solicitud, se pierde al solicitante. Si el director no ha contratado a un asistente antes del día 5, hay que contratar al solicitante que obtenga la mejor calificación el día 5. El objetivo es maximizar la calificación esperada del asistente.

a. Considere la situación en el día 4, a un día del final. Calcule la calificación esperada que se obtendrá si el director no contrata a su asistente el día 4, y decide esperar hasta el día 5.

b. Use su resultado para establecer la regla de decisión óptima para el día 4. Por ejemplo, ¿en qué condiciones debe postergarse la elección del asistente y en cuáles debe contratarse de inmediato, suponiendo que se conoce la mejor calificación del día 4?

c. Considere ahora la situación del día 3. Calcule la calificación esperada que se obtendrá si el director no contrata su asistente en ese día, y pospone la decisión. Recuerde que no es obligatorio que el director contrate al mejor solicitante del día 4. La elección se debe pos poner si la mejor calificación del día 4 es baja, según se determinó en *(b)*.

d. Utilice su resultado en (c) para establecer la regla de decisión óptima para el día 3.

22-5. Resuelva de nue$n$ = lema 22-4, utilizando la siguien n:

X_n =

Número de día; . ., 5 (el número de etapa) Mejor cali$f_n(X_n)$ = en el día (la variable de estado) Calific xima esperada si la mejor calificació bserva en el día ;/ es X_n, *y* se sigue l: ptima del día η hasta el final del proceso (la función de beneficios).

a. Considere el último día (día 5) y escriba una ecuación para $f_5(X_5)$.

b. Considere el penúltimo día (día 4) y escriba una ecuación para $f_4(X_4)$. Observe que $f_4(X_4)$ es igual a la mayor de las calificaciones esperadas con las dos alternativas: "actuar" y "esperar".

c. Iguale los dos resultados de *(b)* para encontrar el valor de equilibrio de X_4, representado con X_{Ab}. Después establezca la regla de decisión óptima para el día 4. Verifique que su regla sea la misma que obtuvo en el problema 22-4.

d. Use la regla de decisión óptima para el día 4 y escriba una ecuación para $f_3(X_3)$.

<?. Realice ahora (c) y *(d)* alternativamente para obtener $f_2(X_2)$ y $f_1(X_1)$. Si la mejor calificación del día 1 es 9, ¿que acción debe emprender el gerente ese día y cuál es su calificación máxima esperada?

/ Suponga que el departamento de personal dice que es posible garantizar un asistente con calificación de "9" si se le otorgan tres días. Decida si la oferta es útil para el gerente.

Problemas

22-6. Suponga que el ganadero del problema 22-2 tiene la oportunidad de invertir el dinero que obtiene de la venta de ganado a una tasa de interés del 10% anual.

a. Calcule el valor actual de su beneficio si no vende ninguna res ahora. Suponga que incurre de inmediato en los costos de crianza y que sus beneficios de la

venta de todo el hato se obtienen dentro de un año.

b. Escriba de nuevo su expresión general de (c) del problema 22-2 para incluir el efecto del tiempo sobre el valor del dinero. Simplifique su expresión.

c. Tome ahora la derivada de su expresión en *(b)* con respecto a *Ye* iguale a cero. Verifique que al sumar el valor tempo ral del dinero al análisis aumenta el número óptimo de reses para venta.

22-7. Un ganadero comienza con un hato de 100 reses y piensa vender todo su ganado dentro de cinco años, a 300 dólares la cabeza. Si las reses se venden en el mercado, el precio P es el siguiente:

$$P = 500 - 0.1\,Y, \quad 0 \leq Y \leq 5000$$

donde y representa el número de reses que se venden en un año determinado. Si cría el ganado, el costo es de 50 dólares por cabeza y la tasa de reproducción es aproximadamente 1.8.

a. Escriba la expresión para la función de beneficios $f_n(X_n)$ para el año 5.

b. Escriba una expresión para la función de beneficios del año 4, $f_4(X_4)$, utilizando Y_A para representar el número de reses que se vendan en el mercado en el año 4. Simplifique su ecuación sustituyendo la expresión de $f_5(X_5)$ que obtuvo en *(a).*

c. Lleve a cabo la maximización que se re quiere en la ecuación *(b)* tomando una derivada e igualando a cero.

d. Use la decisión óptima del año 4 que obtuvo en (*c*) para reescribir el valor de la función de beneficios $f_4(X_4)$ sólo en función de X_4.

e. Considere ahora el año 3 y escriba la función de beneficios $f_3(X_3)$. Simplifique su ecuación sustituyendo en ella la expresión para $f_4(X_4)$ que obtuvo en *(d).*

Observe que puede repetir su secuencia de pasos de (*c*) y *(d)* para cada uno de los años anteriores; así puede resolver completamente el problema.

22-8. Un inversionista tiene 10 millones de dólares para invertir en cualquier momento dentro de los cinco meses siguientes. Cada mes surge una nueva oportunidad de inversión; el rendimiento que promete cada inversión es una variable aleatoria distribuida de acuerdo con las probabilidades de la siguiente tabla:

Rendimiento de la inversión	*Probabilidad*
20%	0.6
30	0.3
100	0.1

Al principio de cada mes se presenta una oportunidad de inversión con un rendimiento real que se basa en las probabilidades de la tabla. El inversionista debe aceptar la oportunidad o rechazarla. Si rechaza la oportunidad, esta desaparece. Si el inversionista no ha invertido dinero antes del quinto mes, tendrá que invertirlo con el rendimiento disponible en el quinto mes. Sea:

X_n = Rendimiento disponible en el mes n

$f_n(X_n)$ = Rendimiento máximo esperado si existe, un rendimiento de X_n en el mes n y se toman las decisiones óptimas desde el mes n hasta el mes 5.

a. Escriba la ecuación para el rendimiento en el quinto mes, $f_5(X_5)$.

b. Considere ahora la situación en el mes 4 y escriba una ecuación para $f_4(X_4)$. Observe que $f_4(X_4)$ es igual al mayor de los rendimientos esperados de las dos alternativas: "actuar" y "esperar".

c. Iguale los dos beneficios esperados de (*b*) para encontrar el valor de equilibrio de X_4, representado con X_{4b}. Después determine la regla de decisión óptima para el mes 4.

d. Utilice la regla de decisión óptima para el mes 4 y escriba una ecuación para $f_3(X_3)$.

e. Efectúe (*c*) y *(d)* alternativamente para obtener $f_2(X_2)$ y $f_1(X_1)$. Si el rendimiento disponible en el mes 1 es del 30%, ¿deberá invertir en el mes 1? ¿Cuál es

el rendimiento esperado si se toma la decisión óptima?

22-9. Un fabricante de vinos ha producido su último barril antes de jubilarse. La decisión que debe tomar es cuántos años debe dejar envejecer el vino antes de embotellarlo y venderlo. El precio que obtiene por el vino aumenta con los años de envejecimiento, de acuerdo con la tabla adjunta. El fabricante no dejará envejecer el vino más de seis años. Sea:

n = Número de año (el número de etapa)
X_n = Edad del vino, en años (la variable de estado)
$f_n(X_n)$ = Ingreso máximo descontado que puede obtenerse si existe un vino de edad X_n en el año n y se toman las decisiones óptimas desde el año n hasta el año 6 (la función de beneficios).

Edad del vino (en años)	*Precio del vino*
1	$56
2	59
3	67
4	75
5	82
6	84

Suponga que la tasa de descuento es del 10% anual.
Observe que $X_n = n$ en este problema.

a. Escriba una ecuación para $f_6(X_6)$.
b. Escriba una ecuación para $f_5(X_5)$. Bóxerve que $f_5(X_5)$ es igual al mayor de los valores actuales de las dos alternativas: "vender" y "esperar".
c. Encuentre la regla de decisión óptima para el año 5.
d. Escriba una ecuación para $f_4(X_4)$.
e. Repita *(c)* y *(d)* para obtener $f_3(X_3)$, $f_2(X_2)$ y $f_1(X_1)$. ¿Cuánto debe envejecer el vino y cuál será el valor actual (en el año 0) de los ingresos?

22-10. La capacidad de carga de un buque es de 20 toneladas. Hay tres tipos de carga que puede transportar el buque: tipo 1, tipo 2 y tipo 3. El beneficio que se obtiene de transportar una unidad de cada tipo de carga se presenta en la tabla siguiente. En la tabla también se incluye

Tipo de carga	*Beneficio por unidad*	*Peso por unidad (toneladas)*
1	$ 40	5
2	220	10
3	360	15

a. Determine por tanteo la combinación de carga que maximice los beneficios y satisfaga la restricción de peso de 20 toneladas.
b. Sea:

X_n = Toneladas disponibles cuando se consideran los primeros n tipos de carga (la variable de estado)

$f_n(X_n)$ = Beneficio máximo disponible cuando la capacidad disponible es X_n, se consideran n tipos de carga y se toman las decisiones óptimas

Y_i = Número de unidades de tipo i ($i = 1, 2, 3$) que se incluyen en la combinación de carga (la variable de decisión).

Escriba una ecuación para $f_1(X_1)$. Observe que $f_1(X_1)$ representa el beneficio máximo disponible si la capacidad disponible es X_1 y sólo se considera carga de tipo 1. *Recomendación:* Utilice el símbolo [ ] para representar "el mayor entero en".
c. Escriba ahora una ecuación para $f_2(X_2)$ que utilice el símbolo Y_2 para indicar el número de unidades de tipo 2 que se incluirán. Observe que $f_2(X_2)$ es el beneficio máximo que se puede obtener si la capacidad disponible es X_2 y se consideran los dos primeros tipos de carga.
d. Escriba una ecuación para $f_3(X_3)$.

(para el problema 22-11)

Número de cuadra	*1*	*2*	*3*	*4*	*5*	*6*	*7*	*8*	*9*	*10*	*(sala de conciertos)*
Probabilidad de un lugar disponible	0.9	0.8	0.7	0.6	0.5	0.4	0.3	0.2	0.1	0.0	

22-11. Una sala de conciertos está al final de una calle sin salida de 10 cuadras (manzanas) de longitud. El estacionamiento de la sala cuesta 10 dólares; sin embargo, cuando llega el profesor H., la probabilidad de encontrar un lugar en la calle es la que se presenta en la tabla de arriba.

El profesor H. estima que cada cuadra que camine le cuesta un dólar; por ejemplo, si encuentra un lugar en la cuadra 7, tendrá que caminar tres cuadras con un costo asignado de tres dólares. No es posible regresar y ocupar un lugar previamente detectado; así mismo, si el profesor H. no ha encontrado un lugar en la calle al llegar a la cuadra 10, tendrá que pagar 10 dólares por estacionarse en la sala de conciertos.

El profesor H. necesita una regla de decisión que le ayude con las decisiones de estacionamiento cada noche de concierto. En palabras del profesor: "Si estoy en la cuadra *i* y veo un lugar disponible, ¿debo estacionarme o continuar con la esperanza de encontrar algo más cercano?"

El profesor ya aprendió, por experiencia, pasar por alto los lugares en las cuadras 1 y 2 y ocupar un lugar en la cuadra 8 o 9, si está disponible; sin embargo, requiere ayuda para determinar lo que debe hacer en los demás casos.

a. Formule el problema como uno de programación dinámica, definiendo las etapas, la variable de estado y la función de beneficios.

b. Resuelva su formulación. ¿Cuál es la primera cuadra con lugar disponible que deberá ocupar?

22-12. Usted acaba de comprar un edificio de apartamentos. Después de las deducciones por depreciación, pago de intereses y otros gastos, usted recibirá cada año los flujos de efectivo (después de impuestos) que se indican en la primera columna de la tabla adjunta. Si decide vender el edificio en un año cualquiera, tendrá el flujo de efectivo adicional por la venta (después de impuestos) que se muestra en la segunda columna. Por supuesto, los flujos de efectivo cesan después de vender el edificio.

Año	*Flujo de efectivo del alquiler, menos gastos e impuestos*	*Flujo de efectivo a fin de año por la venta, después de pagar impuestos*
1	$90 000	$200 000
2	80 000	260 000
3	80 000	320 000
4	70 000	340 000
5	60 000	340 000
6	50 000	300 000
7	40 000	250 000
8	30 000	200 000
9	10 000	180 000
10	10 000	160 000

a. Suponga que desea maximizar el flujo de efectivo total por tener el edificio. ¿En qué año debe venderlo? Ignore los descuentos; es decir, considere los dólares de todos los años con el mismo valor actual. Formule este problema como un modelo de programación dinámica y resuélvalo.

b. Suponga que desea tener en cuenta el valor del dinero en el tiempo. Suponga que un dólar que recibe en un año sólo vale actualmente 90 centavos; un dólar que reciba en dos años tiene valor actual de $0.9 \cdot 0.9 = 0.81$ dólares, etcétera. El factor 0.9 es el *factor de*

descuento. Utilice el factor de descuento para obtener el equivalente de los dólares en términos de valor actual, formule y resuelva un modelo de programación dinámica para decidir cuándo debe vender el edificio.

22-13. Usted va a mudarse y sólo puede hacer tres visitas en busca de su nueva casa, con ocho semanas de diferencia. Usted ha decidido que la probabilidad de encontrar una casa "aceptable" es la que se muestra en la tabla adjunta. Tiene que comprar la casa antes de mudarse. Ha estimado en dos mil dólares (no reembolsables por su patrón) el costo de un viaje en búsqueda de casa. Usted considera que el intervalo de ocho semanas entre viajes es suficiente para que los resultados de los tres viajes tengan probabilidades independientes.

Utilice los conceptos de la programación dinámica para obtener una estrategia óptima *completa* que le indique qué hacer después de cada visita para minimizar su *costo esperado* de encontrar y comprar una casa aceptable. Aplique después su estrategia óptima al caso en el cual acaba de terminar su primera visita y ha encontrado una casa aceptable que cuesta 140 000 dólares. ¿Debe comprarla o seguir buscando?

Precio	*Probabilidad de encontrar una casa aceptable con este precio*	*Probabilidad acumulada de encontrar una casa aceptable con este precio o menos*
$130 000	0.5	0.5
140 000	0.3	0.8
160 000	0.2	1.0
	Suma = 1.0	

Problemas más difíciles

22-14. Un inversionista piensa invertir en tres proyectos que le han propuesto y ha hecho estimaciones sobre el rendimiento de cada inversión (véase tabla superior de la siguiente página). Las inversiones mínimas para los proyectos son 60 000, 80 000 y 50 000 dólares, respectivamente. Existe también la opción de los bonos gubernamentales, con rendimiento anual del 4 por ciento, para cualquier cantidad de inversión.
Si el inversionista tiene 200 000 dólares disponibles, ¿cómo debe invertirlos para maximizar su rendimiento anual? ¿Si tiene 150 000 dólares? ¿Si tiene 250 000? ¿Cuál es el rendimiento anual para cada año?

22-15. Usted considera sus costos de transporte para los próximos cinco años. En la tabla de la siguiente columna se presentan las características del automóvil que comprará. En ningún caso conservará el automóvil más de cuatro años. El costo de compra del automóvil nuevo es de 8000 dólares. *a.* Suponga que usted considera sólo la compra de automóviles nuevos.

Año	*Costos operativos durante el año*	*Valor de venta al final del año*
1	$ 900	$6 800
2	1 200	6 200
3	1 600	5 800
4	2 200	5000

¿Con qué frecuencia compraría un automóvil nuevo si desea minimizar los costos de transporte (costos de compra más costos operativos menos valor de venta)?

b. Suponga que piensa comprar un auto móvil usado al precio que se indica en la última columna de la tabla (excluyendo, por supuesto, la posibilidad de comprar un modelo de hace cuatro años). ¿Cambia esto su política óptima?

22-16. Remítase al problema de asistentes de vuelo, problema 10-20. Formule este problema

(para el problema 22-14)

Proyecto 1 (construcción de un centro comercial)		*Proyecto 2 (construcción de viviendas)*		*Proyecto 3 (empresa industrial)*	
Cantidad de inversión (miles de dólares)	*Rendimiento anual (miles de dólares)*	*Cantidad de inversión (miles de dólares)*	*Rendimiento anual (miles de dólares)*	*Cantidad de inversión (miles de dólares)*	*Rendimiento anual (miles de dólares)*
\$ 60	\$ 6.0	\$ 80	\$ 6.0	\$ 50	\$4.0
70	8.0	90	8.0	60	4.8
80	9.0	100	10.0	70	5.6
90	10.0	110	12.0	80	6.4
100	11.0	120	13.0	90	7.2
110	11.5	130	13.8	100	8.0
120 (inversión máxima)	12.0	140	14.2	110	8.8
		150 (inversión máxima)	14.5	120 (inversión máxima)	9.6

como uno de programación dinámica y resuélvalo.

22-17. Al iniciar cada mes, una empresa hace los pedidos de un producto en particular, el cual se entrega al finalizar el mes. La empresa vende parte de su producto durante el mes a partir de su inventario disponible, pedido en los meses anteriores, porque la cantidad que se pide al iniciar el mes no llegará hasta el final del mes. La empresa puede vender cualquier número de unidades en un mes.

Los precios de compra y venta varían de un mes a otro. La tabla que se presenta más adelante indica cuáles son los precios proyectados para los próximos seis meses. Las operaciones de la empresa están limitadas por el tamaño de su almacén, el cual sólo puede almacenar un máximo de 100 unidades de producto.

El problema de la empresa es determinar el número de unidades que comprará y venderá cada mes, para obtener el mayor beneficio. La empresa no tiene unidades disponibles al comenzar enero y no quiere que queden unidades al final de junio. Formule lo anterior como un problema de programación dinámica y resuélvalo.

Recomendación: En realidad sólo hay dos posibilidades: un almacén lleno o uno vacío al término de cada periodo.

Precios de compra y venta

Mes	*Precio de compra (inicio del mes)*	*Precio de venta (durante el mes)*
Enero	\$50	—
Febrero	50	\$60
Marzo	40	40
Abril	60	50
Mayo	50	60
Junio	---	70

22-18. Formule el problema 22-10 (el problema de carga) de manera que X represente el número de toneladas disponibles y $f(X)$ el beneficio máximo que se puede obtener de los tres tipos de carga si se toman las decisiones óptimas. Si definimos $f(0) = 0$ y $f(X) = 0$ para toda $X < 0$, verifique que sea correcta la siguiente ecuación funcional:

$$f(X + 1) = \text{Max}\{f(X) + f(1); 40 + f(X - 4); 200 + f(X - 9); 360 + f(X - 14)\}$$

Calcule $f(1)$ mediante $f(20)$.

22-19. En algunos problemas de programación dinámica se puede usar un *algoritmo hacia adelante* para resolver el problema, en lugar del algoritmo hacia atrás que se describió en este capítulo. En un algoritmo hacia adelante, la función de beneficios representaría el beneficio máximo (o el costo mínimo) que se obtendría desde el inicio del proceso hasta la etapa *n.* El algoritmo comenzaría por el principio y avanzaría hasta el fin del problema.

a. Remítase al problema 22-1. Describa cómo se usaría un algoritmo hacia adelante con este problema y utilice el algoritmo para resolverlo.

b. ¿Cree usted que un algoritmo hacia adelante serviría para resolver problemas de programación dinámica con variables aleatorias? ¿Por qué?

22-20. Una empresa farmacéutica intenta desarrollar la cura para una enfermedad. Se consideran cinco compuestos y se piensa que cada uno de los compuestos tiene una posibilidad de $^1/_{10}$ de servir como cura (es decir, $^1/_{10}$ de posibilidad de éxito). Para probar cada compuesto se requiere de un mes y el costo es de 10 000 dólares. La empresa farmacéutica tiene tres meses para probar los cinco compuestos.

El problema es desarrollar una estrategia de pruebas. Un estrategia comprende determinar cuántos compuestos se probarán cada mes. Por ejemplo, una estrategia es: Probar un compuesto en el mes 1; si no hay éxito, probar otro en el segundo mes; si aún no hay éxito, probar los tres restantes en el último mes. Observe que las pruebas en secuencia de los compuestos reducen el costo esperado, pues disminuye la probabilidad de que se tengan que probar los cinco compuestos entes de encontrar la cura.
Suponga que las probabilidades son independientes. Observe que si se prueban *k* compuestos en un mes, la probabilidad de que por lo menos uno sea exitoso es $[1 - (0.9)^k]$

a. Formule una ecuación recursiva gene ral dinámica para la prueba de *N* periodos y *M* compuestos. El objetivo es minimizar el costo esperado de tener éxito.

b. Aplique su ecuación recursiva a los datos del caso anterior *(M* = 5 compuestos, *N =3* meses).

22-21. Una empresa utiliza una máquina excavadora para extraer carbón de una mina. La mina tiene vida de 10 años. La compañía utiliza actualmente una excavadora de dos años de edad. Una excavadora nueva cuesta 150 000 dólares. Los costos de mantenimiento, inactividad y otros varían con la edad de la máquina, como se indica en la tabla adjunta.

Una máquina se puede reconstruir en cualquier instante. Esta reconstrucción equivale a contar con una máquina de dos años de edad, en lo que se refiere a costos de mantenimiento, etcétera. El costo de una reconstrucción es de 60 000 dólares. La empresa quiere encontrar una política óptima (que minimice los costos de mantenimiento y equipo) para el reemplazo y la reconstrucción de equipo en el periodo de diez años. Suponga que el equipo no tiene valor al finalizar los 10 años. Observe que la empresa tiene tres opciones en un año: (1) conservar la excavadora un año más; (2) reconstruir la excavadora; (3) reemplazar la máquina con una nueva.

Edad de la máquina al iniciar el año	*Costo de mantenimiento, etcétera, durante el año*
Nueva	$ 0
1 año	10 000
2	20 000
3	30 000
4	50 000
5	70 000
6	90 000
7	120 000
8	150 000
9	180 000

a. Formule la ecuación recursiva dinámica para este problema.

b. Resuelva el problema.

22-22. Para este problema se requiere el conocimiento de los procesos de Markov (véase Cap. 21).

Suponga que una máquina pasa del estado 1 (ajustada) al estado 2 (desajustada) y viceversa con las probabilidades de cambio que se indican en la tabla a continuación.

Suponga que si la máquina se encuentra en el estado 1 durante un día, hay un beneficio de 100 dólares; si la máquina se halla en el estado 2 durante un día, se incurre en una pérdida de 50 dólares.

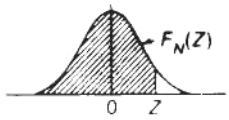
a. Calcule las probabilidades de estado estacionario y la tasa de beneficio diario esperada.

b. Suponga ahora que es posible reparar la máquina, a un costo de 200 dólares. Usted observa la máquina al iniciar el día y realiza las reparaciones muy rápidamente, de manera que después de la reparación hay un día completo de funcionamiento en el estado 1. Suponga que las transiciones de estado ocurren al finalizar el día de trabajo. Utilice la programación dinámica para calcular las reglas de decisión óptimas para el problema de decisión, suponiendo que al director sólo le interesan los próximos cinco días de funcionamiento. ¿Cuál es el valor esperado si se inicia el periodo de cinco días con la máquina en el estado 1 ?

De \ *A*	*Ajustada (estado 1)*	*Desajustada (estado 2)*
Ajustada (estado 1)	0.5	0.5
Desajustada (estado 2)	0.4	0.6

Apéndice de tablas

Tabla A Función de distribución normal estandarizada, $F_N(Z)$

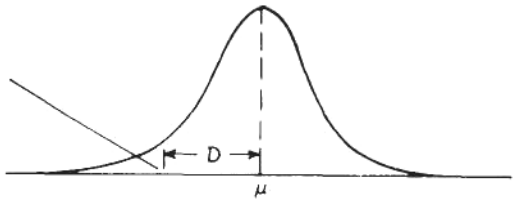


Z	0.00	0.01	0.02	0.03	0.04	0.05	0.06	0.07	0.08	0.09
0.0	0.5000	0.5040	0.5080	0.5120	0.5160	0.5199	0.5239	0.5279	0.5319	0.5359
0.1	0.5398	0.5438	0.5478	0.5517	0.5557	0.5596	0.5636	0.5675	0.5714	0.5753
0.2	0.5793	0.5832	0.5871	0.5910	0.5948	0.5987	0.6026	0.6064	0.6103	0.6141
0.3	0.6179	0.6217	0.6255	0.6293	0.6331	0.6368	0.6406	0.6443	0.6480	0.6517
0.4	0.6554	0.6591	0.6628	0.6664	0.6700	0.6736	0.6772	0.6808	0.6844	0.6879
0.5	0.6915	0.6950	0.6985	0.7019	0.7054	0.7088	0.7123	0.7157	0.7190	0.7224
0.6	0.7257	0.7291	0.7324	0.7357	0.7389	0.7422	0.7454	0.7486	0.7517	0.7549
0.7	0.7580	0.7611	0.7642	0.7673	0.7703	0.7734	0.7764	0.7794	0.7823	0.7852
0.8	0.7881	0.7910	0.7939	0.7967	0.7995	0.8023	0.8051	0.8078	0.8106	0.8133
0.9	0.8159	0.8186	0.8212	0.8238	0.8264	0.8289	0.8315	0.8340	0.8365	0.8389
1.0	0.8413	0.8438	0.8461	0.8485	0.8508	0.8531	0.8554	0.8577	0.8599	0.8621
1.1	0.8643	0.8665	0.8686	0.8708	0.8729	0.8749	0.8770	0.8790	0.8810	0.8830
1.2	0.8849	0.8869	0.8888	0.8907	0.8925	0.8944	0.8962	0.8980	0.8997	0.90147
1.3	0.90320	0.90490	0.90658	0.90824	0.90988	0.91149	0.91309	0.91466	0.91621	0.91774
1.4	0.91924	0.92073	0.92220	0.92364	0.92507	0.92647	0.92785	0.92922	0.93056	0.93189
1.5	0.93319	0.93448	0.93574	0.93699	0.93822	0.93943	0.94062	0.94179	0.94295	0.94408
1.6	0.94520	0.94630	0.94738	0.94845	0.94950	0.95053	0.95154	0.95254	0.95352	0.95449
1.7	0.95543	0.95637	0.95728	0.95818	0.95907	0.95994	0.96080	0.96164	0.96246	0.96327
1.8	0.96407	0.96485	0.96562	0.96638	0.96712	0.96784	0.96856	0.96926	0.96995	0.97062
1.9	0.97128	0.97193	0.97257	0.97320	0.97381	0.97441	0.97500	0.97558	0.97615	0.97670
2.0	0.97725	0.97778	0.97831	0.97882	0.97932	0.97982	0.98030	0.98077	0.98124	0.98169
2.1	0.98214	0.98257	0.98300	0.98341	0.98382	0.98422	0.98461	0.98500	0.98537	0.98574
2.2	0.98610	0.98645	0.98679	0.98713	0.98745	0.98778	0.98809	0.98840	0.98870	0.98899
2.3	0.98928	0.98956	0.98983	0.9^20097	0.9^20358	0.9^20613	0.9^20863	0.9^21106	0.9^21344	0.9^21576
2.4	0.9^21802	0.9^22024	0.9^22240	0.9^22451	0.9^22656	0.9^22857	0.9^23053	0.9^23244	0.9^23431	0.9^23613
2.5	0.9^23790	0.9^23963	0.9^24132	0.9^24297	0.9^24457	0.9^24614	0.9^24766	0.9^24915	0.9^25060	0.9^25201
3.0	0.9^28650	0.9^28694	0.9^28736	0.9^28777	0.9^28817	0.9^28856	0.9^28893	0.9^28930	0.9^28965	0.9^28999
3.5	0.9^37674	0.9^37759	0.9^37842	0.9^37922	0.9^37999	0.9^38074	0.9^38146	0.9^38215	0.9^38282	0.9^38347
4.0	0.9^46833	0.9^46964	0.9^47090	0.9^47211	0.9^47327	0.9^47439	0.9^47546	0.9^47649	0.9^47748	0.9^47843

Por ejemplo: $F(2.41) = 0.9^22024 - 0.992024$.

De A. Hald, *Statistical Tables and Formulas,* Nueva York, John Wiley & Sons, 1952; reimpreso con autorización del profesor A. Hald y los editores.

Tabla B *N(D)* Función de pérdida de la distribución normal estandarizada*



D o Z	.00	.01	.02	.03	.04	.05	.06	.07	.08	.09
.0	.3989	.3940	.3890	.3841	.3793	.3744	.3697	.3649	.3602	.3556
.1	.3509	.3464	.3418	.3373	.3328	.3284	.3240	.3197	.3154	.3111
.2	.3069	.3027	.2986	.2944	.2904	.2863	.2824	.2784	.2745	.2706
.3	.2668	.2630	.2592	.2555	.2518	.2481	.2445	.2409	.2374	.2339
.4	.2304	.2270	.2236	.2203	.2169	.2137	.2104	.2072	.2040	.2009
.5	.1978	.1947	.1917	.1887	.1857	.1828	.1799	.1771	.1742	.1714
.6	.1687	.1659	.1633	.1606	.1580	.1554	.1528	.1503	.1478	.1453
.7	.1429	.1405	.1381	.1358	.1334	.1312	.1289	.1267	.1245	.1223
.8	.1202	.1181	.1160	.1140	.1120	.1100	.1080	.1061	.1042	.1023
.9	.1004	.09860	.09680	.09503	.09328	.09156	.08986	.08819	.08654	08491
1.0	.08332	.08174	.08019	.07866	.07716	.07568	.07422	.07279	.07138	.06999
1.1	.06862	.06727	.06595	.06465	.06336	.06210	.06086	.05964	.05844	.05726
1.2	.05610	.05496	.05384	.05274	.05165	.05059	.04954	.04851	.04750	.04650
1.3	.04553	.04457	.04363	.04270	.04179	.04090	.04002	.03916	.03831	.03748
1.4	.03667	.03587	.03508	.03431	.03356	.03281	.03208	.03137	.03067	.02998
1.5	.02931	.02865	.02800	02736	.02674	.02612	.02552	.02494	.02436	.02380
1.6	.02324	.02270	.02217	.02165	.02114	.02064	.02015	.01967	.01920	.01874
1.7	.01829	.01785	.01742	.01699	.01658	.01617	.01578	.01539	.01501	.01464
1.8	.01428	.01392	.01357	.01323	.01290	.01257	.01226	.01195	.01164	.01134
1.9	.01105	.01077	.01049	.01022	$.0^{2}9957$	$.0^{2}9698$	$.0^{2}9445$	$.0^{2}9198$	$.0^{2}8957$	$.0^{2}8721$
2.0	$.0^{2}8491$	$.0^{2}8266$	$.0^{2}8046$	$.0^{2}7832$	$.0^{2}7623$	$.0^{2}7418$	$.0^{2}7219$	$.0^{2}7024$	$.0^{2}6835$	$.0^{2}6649$
2.1	$.0^{2}6468$	$.0^{2}6292$	$.0^{2}6120$	$.0^{2}5952$	$.0^{2}5788$	$.0^{2}5628$	$.0^{2}5472$	$.0^{2}5320$	$.0^{2}5172$	$.0^{2}5028$
2.2	$.0^{2}4887$	$.0^{2}4750$	$.0^{2}4616$	$.0^{2}4486$	$.0^{2}4358$	$.0^{2}4235$	$.0^{2}4114$	$.0^{2}3996$	$.0^{2}3882$	$.0^{2}3770$
2.3	$.0^{2}3662$	$.0^{2}3556$	$.0^{2}3453$	$.0^{2}3352$	$.0^{2}3255$	$.0^{2}3159$	$.0^{2}3067$	$.0^{2}2977$	$.0^{2}2889$	$.0^{2}2804$
2.4	$.0^{2}2720$	$.0^{2}2640$	$.0^{2}2561$	$.0^{2}2484$	$.0^{2}2410$	$.0^{2}2337$	$.0^{2}2267$	$.0^{2}2199$	$.0^{2}2132$	$.0^{2}2067$
2.5	$.0^{2}2005$	$.0^{2}1943$	$.0^{2}1883$	$.0^{2}1826$	$.0^{2}1769$	$.0^{2}1715$	$.0^{2}1662$	$.0^{2}1610$	$.0^{2}1560$	$.0^{2}1511$
3.0	$.0^{3}3822$	$.0^{3}3689$	$.0^{3}3560$	$.0^{3}3436$	$.0^{3}3316$	$.0^{3}3199$	$.0^{3}3087$	$.0^{3}2978$	$.0^{3}2873$	$.0^{3}2771$
3.5	$.0^{4}5848$	$.0^{4}5620$	$.0^{4}5400$	$.0^{4}5188$	$.0^{4}4984$	$.0^{4}4788$	$.0^{4}4599$	$.0^{4}4417$	$.0^{4}4242$	$.0^{4}4073$
4.0	$.0^{5}7145$	$.0^{5}6835$	$.0^{5}6538$	$.0^{5}6253$	$.0^{5}5980$	$.0^{5}5718$	$.0^{5}5468$	$.0^{5}5227$	$.0^{5}4997$	$0^{5}4777$

N(D) se define de la siguiente manera:

$$N(D) = \int_{-\infty}^{-D} (-D - X)\, f^*(X)dX = \int_{D}^{\infty} (X - D)\, f^*(X)dX$$

donde/ *(X)* es la función de densidad normal estandarizada y *D* es positivo.

* Con autorización de R. Schlaifer, *Probability and Statistics for Business Decisions,* Nueva York, McGraw-Hill, 1959.

Tabla C Distribución binomial acumulada* $P(R \geq r \mid n, p)$

$n = 1$

r \ p	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
1	0100	0200	0300	0400	0500	0600	0700	0800	0900	1000

r \ p	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	1100	1200	1300	1400	1500	1600	1700	1800	1900	2000

r \ p	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	2100	2200	2300	2400	2500	2600	2700	2800	2900	3000

r \ p	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	3100	3200	3300	3400	3500	3600	3700	3800	3900	4000

r \ p	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	4100	4200	4300	4400	4500	4600	4700	4800	4900	5000

$n = 2$

r \ p	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
1	0199	0396	0591	0784	0975	1164	1351	1536	1719	1900
2	0001	0004	0009	0016	0025	0036	0049	0064	0081	0100

r \ p	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2079	2256	2431	2604	2775	2944	3111	3276	3439	3600
2	0121	0144	0169	0196	0225	0256	0289	0324	0361	0400

r \ p	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	3759	3916	4071	4224	4375	4524	4671	4816	4959	5100
2	0441	0484	0529	0576	0625	0676	0729	0784	0841	0900

r \ p	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	5239	5376	5511	5644	5775	5904	6031	6156	6279	6400
2	0961	1024	1089	1156	1225	1296	1369	1444	1521	1600

r \ p	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	6519	6636	6751	6864	6975	7084	7191	7296	7399	7500
2	1681	1764	1849	1936	2025	2116	2209	2304	2401	2500

$n = 3$

r \ p	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
1	0297	0588	0873	1153	1426	1694	1956	2213	2464	2710
2	0003	0012	0026	0047	0073	0104	0140	0182	0228	0280
3				0001	0001	0002	0003	0005	0007	0010

r \ p	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	2950	3185	3415	3639	3859	4073	4282	4486	4686	4880
2	0336	0397	0463	0533	0608	0686	0769	0855	0946	1040
3	0013	0017	0022	0027	0034	0041	0049	0058	0069	0080

r \ p	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	5070	5254	5435	5610	5781	5948	6110	6268	6421	6570
2	1138	1239	1344	1452	1563	1676	1793	1913	2035	2160
3	0093	0106	0122	0138	0156	0176	0197	0220	0244	0270

Nota: Para $p > 0.5$ se aplica la siguiente identidad:

$$P(R \geq r|n, p) = 1 - P(R \geq n - r + 1|n, 1 - p)$$

Considere, por ejemplo, la probabilidad de dos caras o más en tres lanzamientos de una moneda con P (cara) - 0.60; esto es idéntico a uno menos la probabilidad de dos o más cruces en tres lanzamientos, con P (cruz) - 0.4, o 1 - 0.3520 - 0.6480.

* Con autorización de R. Schlaifer, *Probability and Statistics for Business Decisions,* Nueva York, McGraw-Hill, 1959.

Tabla C *(continuación)*

p	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	6715	6856	6992	7125	7254	7379	7500	7617	7730	7840
2	2287	2417	2548	2682	2818	2955	3094	3235	3377	3520
3	0298	0328	0359	0393	0429	0467	0507	0549	0593	0640

p	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	7946	8049	8148	8244	8336	8425	8511	8594	8673	8750
2	3665	3810	3957	4104	4253	4401	4551	4700	4850	5000
3	0689	0741	0795	0852	0911	0973	1038	1106	1176	1250

$n = 4$

p	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
1	0394	0776	1147	1507	1855	2193	2519	2836	3143	3439
2	0006	0023	0052	0091	0140	0199	0267	0344	0430	0523
3			0001	0002	0005	0008	0013	0019	0027	0037
4									0001	0001

p	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	3726	4003	4271	4530	4780	5021	5254	5479	5695	5904
2	0624	0732	0847	0968	1095	1228	1366	1509	1656	1808
3	0049	0063	0079	0098	0120	0144	0171	0202	0235	0272
4	0001	0002	0003	0004	0005	0007	0008	0010	0013	0016

p	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	6105	6298	6485	6664	6836	7001	7160	7313	7459	7599
2	1963	2122	2285	2450	2617	2787	2959	3132	3307	3483
3	0312	0356	0403	0453	0508	0566	0628	0694	0763	0837
4	0019	0023	0028	0033	0039	0046	0053	0061	0071	0081

p	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	7733	7862	7985	8103	8215	8322	8425	8522	8615	8704
2	3660	3837	4015	4193	4370	4547	4724	4900	5075	5248
3	0915	0996	1082	1171	1265	1362	1464	1569	1679	1792
4	0092	0105	0119	0134	0150	0168	0187	0209	0231	0256

p	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	8788	8868	8944	9017	9085	9150	9211	9269	9323	9375
2	5420	5590	5759	5926	6090	6252	6412	6569	6724	6875
3	1909	2030	2155	2283	2415	2550	2689	2831	2977	3125
4	0283	0311	0342	0375	0410	0448	0488	0531	0576	0625

$n = 5$

p	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
1	0490	0961	1413	1846	2262	2661	3043	3409	3760	4095
2	0010	0038	0085	0148	0226	0319	0425	0544	0674	0815
3		0001	0003	0006	0012	0020	0031	0045	0063	0086
4						0001	0001	0002	0003	0005

p	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	4416	4723	5016	5296	5563	5818	6061	6293	6513	6723
2	0965	1125	1292	1467	1648	1835	2027	2224	2424	2627
3	0112	0143	0179	0220	0266	0318	0375	0437	0505	0579
4	0007	0009	0013	0017	0022	0029	0036	0045	0055	0067
5				0001	0001	0001	0001	0002	0002	0003

p	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	6923	7113	7293	7464	7627	7781	7927	8065	8196	8319
2	2833	3041	3251	3461	3672	3883	4093	4303	4511	4718
3	0659	0744	0836	0933	1035	1143	1257	1376	1501	1631
4	0081	0097	0114	0134	0156	0181	0208	0238	0272	0308
5	0004	0005	0006	0008	0010	0012	0014	0017	0021	0024

Tabla C *(continuación)*

p	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	8436	8546	8650	8748	8840	8926	9008	9084	9155	9222
2	4923	5125	5325	5522	5716	5906	6093	6276	6455	6630
3	1766	1905	2050	2199	2352	2509	2670	2835	3003	3174
4	0347	0390	0436	0486	0540	0598	0660	0726	0796	0870
5	0029	0034	0039	0045	0053	0060	0069	0079	0090	0102

p	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	9285	9344	9398	9449	9497	9541	9582	9620	9655	9688
2	6801	6967	7129	7286	7438	7585	7728	7865	7998	8125
3	3349	3525	3705	3886	4069	4253	4439	4625	4813	5000
4	0949	1033	1121	1214	1312	1415	1522	1635	1753	1875
5	0116	0131	0147	0165	0185	0206	0229	0255	0282	0313

n = 6

p	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
1	0585	1142	1670	2172	2649	3101	3530	3936	4321	4686
2	0015	0057	0125	0216	0328	0459	0608	0773	0952	1143
3		0002	0005	0012	0022	0038	0058	0085	0118	0159
4					0001	0002	0003	0005	0008	0013
5										0001

p	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	5030	5356	5664	5954	6229	6487	6731	6960	7176	7379
2	1345	1556	1776	2003	2235	2472	2713	2956	3201	3446
3	0206	0261	0324	0395	0473	0560	0655	0759	0870	0989
4	0018	0025	0034	0045	0059	0075	0094	0116	0141	0170
5	0001	0001	0002	0003	0004	0005	0007	0010	0013	0016
6										0001

p	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	7569	7748	7916	8073	8220	8358	8487	8607	8719	8824
2	3692	3937	4180	4422	4661	4896	5128	5356	5580	5798
3	1115	1250	1391	1539	1694	1856	2023	2196	2374	2557
4	0202	0239	0280	0326	0376	0431	0492	0557	0628	0705
5	0020	0025	0031	0038	0046	0056	0067	0079	0093	0109
6	0001	0001	0001	0002	0002	0003	0004	0005	0006	0007

p	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	8921	9011	9095	9173	9246	9313	9375	9432	9485	9533
2	6012	6220	6422	6619	6809	6994	7172	7343	7508	7667
3	2744	2936	3130	3328	3529	3732	3937	4143	4350	4557
4	0787	0875	0969	1069	1174	1286	1404	1527	1657	1798
5	0187	0148	0170	0195	0223	0254	0288	0325	0365	0410
6	0009	0011	0013	0015	0018	0022	0026	0030	0035	0041

p	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	9578	9619	9657	9692	9723	9752	9778	9802	9824	9844
2	7819	7965	8105	8238	8364	8485	8599	8707	8810	8906
3	4764	4971	5177	5382	5585	5786	5985	6180	6373	6563
4	1933	2080	2232	2390	2553	2721	2893	3070	3252	3438
5	0458	0510	0566	0627	0692	0762	0837	0917	1003	1094
6	0048	0055	0063	0073	0083	0095	0108	0122	0138	0156

n = 7

p	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
1	0679	1319	1920	2486	3017	3515	3983	4422	4832	5217
2	0020	0079	0171	0294	0444	0618	0813	1026	1255	1497
3		0003	0009	0020	0038	0063	0097	0140	0193	0257
4				0001	0002	0004	0007	0012	0018	0027
5								0001	0001	0002

Tabla C *(continuación)*

f \ p	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	5577	5913	6227	6521	6794	7049	7286	7507	7712	7903
2	1750	2012	2281	2556	2834	3115	3396	3677	3956	4233
3	0331	0416	0513	0620	0738	0866	1005	1154	1313	1480
4	0039	0054	0072	0094	0121	0153	0189	0231	0279	0333
5	0003	0004	0006	0009	0012	0017	0022	0029	0037	0047
6					0001	0001	0001	0002	0003	0004

f \ p	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	8080	8243	8395	8535	8665	8785	8895	8997	9090	9176
2	4506	4775	5040	5298	5551	5796	6035	6266	6490	6706
3	1657	1841	2033	2231	2436	2646	2861	3081	3304	3529
4	0394	0461	0536	0617	0706	0802	0905	1016	1134	1260
5	0058	0072	0088	0107	0129	0153	0181	0213	0248	0288
6	0005	0006	0008	0011	0013	0017	0021	0026	0031	0038
7					0001	0001	0001	0001	0003	0002

f \ p	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	9255	9328	9394	9454	9510	9560	9606	9648	9686	9720
2	6914	7113	7304	7487	7662	7828	7987	8137	8279	8414
3	3757	3987	4217	4447	4677	4906	5134	5359	5581	5801
4	1394	1534	1682	1837	1998	2167	2341	2521	2707	2898
5	0332	0380	0434	0492	0556	0625	0701	0782	0869	0963
6	0046	0055	0065	0077	0090	0105	0123	0142	0164	0188
7	0003	0003	0004	0005	0006	0008	0009	0011	0014	0016

f \ p	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	9751	9779	9805	9827	9848	9866	9883	9897	9910	9922
2	8541	8660	8772	8877	8976	9068	9153	9233	9307	9375
3	6017	6229	6436	6638	6836	7027	7213	7393	7567	7734
4	3094	3294	3498	3706	3917	4131	4346	4563	4781	5000
5	1063	1169	1282	1402	1529	1663	1803	1951	2105	2266
6	0216	0246	0279	0316	0357	0402	0451	0504	0562	0625
7	0019	0023	0027	0032	0037	0044	0051	0059	0068	0078

***n* = 8**

f \ p	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
1	0773	1492	2163	2786	3366	3904	4404	4868	5297	5695
2	0027	0103	0223	0381	0572	0792	1035	1298	1577	1869
3	0001	0004	0013	0031	0058	0096	0147	0211	0289	0381
4			0001	0002	0004	0007	0013	0022	0034	0050
5							0001	0001	0003	0004

f \ p	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	6063	6404	6718	7008	7275	7521	7748	7956	8147	8322
2	2171	2480	2794	3111	3422	3744	4057	4366	4670	4967
3	0487	0608	0743	0891	1052	1226	1412	1608	1815	2031
4	0071	0097	0129	0168	0214	0267	0328	0397	0476	0563
5	0007	0010	0015	0021	0029	0038	0050	0065	0083	0104
6		0001	0001	0002	0002	0003	0005	0007	0009	0012
7									0001	0001

f \ p	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	8483	8630	8764	8887	8999	9101	9194	9278	9354	9424
2	5257	5538	5811	6075	6329	6573	6807	7031	7244	7447
3	2255	2486	2724	2967	3215	3465	3718	3973	4228	4482
4	0659	0765	0880	1004	1138	1281	1433	1594	1763	1941
5	0129	0158	0191	0230	0273	0322	0377	0438	0505	0580
6	0016	0021	0027	0034	0042	0052	0064	0078	0094	0113
7	0001	0002	0002	0003	0004	0005	0006	0008	0010	0013
8									0001	0001

Tabla C *(continuación)*

r \ p	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	9486	9543	9594	9640	9681	9719	9752	9782	9808	9832
2	7640	7822	7994	8156	8309	8452	8586	8711	8828	8936
3	4736	4987	5236	5481	5722	5958	6189	6415	6634	6846
4	2126	2319	2519	2724	2936	3153	3374	3599	3828	4059
5	0661	0750	0846	0949	1061	1180	1307	1443	1586	1737
6	0134	0159	0187	0218	0253	0293	0336	0385	0439	0498
7	0016	0020	0024	0030	0036	0043	0051	0061	0072	0085
8	0001	0001	0001	0002	0002	0003	0004	0004	0005	0007

r \ p	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	9853	9872	9889	9903	9916	9928	9938	9947	9954	9961
2	9037	9130	9216	9295	9368	9435	9496	9552	9602	9648
3	7052	7250	7440	7624	7799	7966	8125	8276	8419	8555
4	4298	4527	4762	4996	5230	5463	5694	5922	6146	6367
5	1895	2062	2235	2416	2604	2798	2999	3205	3416	3633
6	0563	0634	0711	0794	0885	0982	1086	1198	1318	1445
7	0100	0117	0136	0157	0181	0208	0239	0272	0310	0352
8	0008	0010	0012	0014	0017	0020	0024	0028	0033	0039

n = 9

r \ p	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
1	0865	1663	2398	3075	3698	4270	4796	5278	5721	6126
2	0034	0131	0282	0478	0712	0978	1271	1583	1912	2252
3	0001	0006	0020	0045	0084	0138	0209	0298	0405	0530
4			0001	0003	0006	0013	0023	0037	0057	0083
5						0001	0002	0003	0005	0009
6										0001

r \ p	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	6496	6835	7145	7427	7684	7918	8131	8324	8499	8658
2	3599	3951	4304	4657	4005	4348	4685	5012	5330	5638
3	0678	0833	1009	1202	1409	1629	1861	2105	2357	2618
4	0117	0158	0209	0269	0339	0420	0512	0615	0730	0856
5	0014	0021	0030	0041	0056	0075	0098	0125	0158	0196
6	0001	0002	0003	0004	0006	0009	0013	0017	0023	0031
7						0001	0001	0002	0002	0003

r \ p	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	8801	8931	9048	9154	9249	9335	9411	9480	9542	9596
2	5934	6218	6491	6750	6997	7230	7452	7660	7856	8040
3	2885	3158	3434	3713	3993	4273	4552	4829	5102	5372
4	0994	1144	1304	1475	1657	1849	2050	2260	2478	2703
5	0240	0291	0350	0416	0489	0571	0662	0762	0870	0988
6	0040	0051	0065	0081	0100	0122	0149	0179	0213	0253
7	0004	0006	0008	0010	0013	0017	0022	0028	0035	0043
8			0001	0001	0001	0001	0002	0003	0003	0004

r \ p	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	9645	9689	9728	9762	9793	9820	9844	9865	9883	9899
2	8212	8372	8522	8661	8789	8908	9017	9118	9210	9295
3	5636	5894	6146	6390	6627	6856	7076	7287	7489	7682
4	2935	3173	3415	3662	3911	4163	4416	4669	4922	5174
5	1115	1252	1398	1553	1717	1890	2072	2262	2460	2666
6	0398	0348	0404	0467	0536	0612	0696	0787	0886	0994
7	0053	0064	0078	0094	0112	0133	0157	0184	0215	0250
8	0006	0007	0009	0011	0014	0017	0021	0026	0031	0036
9				0001	0001	0001	0001	0002	0002	0003

r \ p	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	9913	9926	9936	9946	9954	9961	9967	9972	9977	9980
2	9372	9442	9505	9563	9615	9662	9704	9741	9775	9805
3	7866	8039	8204	8359	8505	8642	8769	8889	8999	9102
4	5424	5670	5913	6152	6386	6614	6836	7052	7260	7461
5	2878	3097	3322	3551	3786	4024	4265	4509	4754	5000
6	1109	1233	1366	1508	1658	1817	1985	2161	2346	2539
7	0390	0334	0383	0437	0498	0564	0637	0717	0804	0899
8	0046	0055	0065	0077	0091	0107	0125	0145	0169	0195
9	0003	0004	0005	0006	0008	0009	0011	0014	0018	0023

Tabla C *(continuación)*

n = 10

r \ p	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
1	0956	1829	2626	3352	4013	4614	5160	5656	6106	6513
2	0043	0162	0345	0582	0861	1176	1517	1879	2254	2639
3	0001	0009	0028	0062	0115	0188	0283	0401	0540	0702
4			0001	0004	0010	0020	0036	0058	0088	0128
5					0001	0002	0003	0006	0010	0016
6									0001	0001

r \ p	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	6882	7215	7516	7787	8031	8251	8448	8626	8784	8926
2	3028	3417	3804	4184	4557	4920	5270	5608	5932	6242
3	0884	1087	1308	1545	1798	2064	2341	2628	2922	3222
4	0178	0239	0313	0400	0500	0614	0741	0883	1039	1209
5	0025	0037	0053	0073	0099	0130	0168	0213	0266	0328
6	0003	0004	0006	0010	0014	0020	0027	0037	0049	0064
7			0001	0001	0001	0002	0003	0004	0006	0009
8									0001	0001

r \ p	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	9053	9166	9267	9357	9437	9508	9570	9626	9674	9718
2	6536	6815	7079	7327	7560	7778	7981	8170	8345	8507
3	3526	3831	4137	4442	4744	5042	5335	5622	5901	6172
4	1391	1587	1794	2012	2241	2479	2726	2979	3239	3504
5	0399	0479	0569	0670	0781	0904	1037	1181	1337	1503
6	0082	0104	0130	0161	0197	0239	0287	0342	0404	0473
7	0018	0016	0021	0027	0035	0045	0056	0070	0087	0106
8	0001	0002	0002	0003	0004	0006	0007	0010	0012	0016
9							0001	0001	0001	0001

r \ p	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	9755	9789	9818	9843	9865	9885	9902	9916	9929	9940
2	8656	8794	8920	9035	9140	9236	9323	9402	9473	9536
3	6434	6687	6930	7162	7384	7595	7794	7983	8160	8327
4	3772	4044	4316	4589	4862	5132	5400	5664	5923	6177
5	1679	1867	2064	2270	2485	2708	2939	3177	3420	3669
6	0551	0637	0732	0836	0949	1072	1205	1348	1500	1662
7	0129	0155	0185	0220	0260	0305	0356	0413	0477	0548
8	0020	0025	0032	0039	0048	0059	0071	0086	0103	0123
9	0002	0003	0003	0004	0005	0007	0009	0011	0014	0017
10								0001	0001	0001

r \ p	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	9949	9957	9964	9970	9975	9979	9983	9986	9988	9990
2	9594	9645	9691	9731	9767	9799	9827	9852	9874	9893
3	8483	8628	8764	8889	9004	9111	9209	9298	9379	9453
4	6425	6665	6898	7123	7340	7547	7745	7933	8112	8281
5	3922	4178	4436	4696	4956	5216	5474	5730	5982	6230
6	1834	2016	2207	2407	2616	2832	3057	3288	3526	3770
7	0626	0712	0806	0908	1020	1141	1271	1410	1560	1719
8	0146	0172	0202	0236	0274	0317	0366	0420	0480	0547
9	0021	0025	0031	0037	0045	0054	0065	0077	0091	0107
10	0001	0002	0002	0003	0003	0004	0005	0006	0008	0010

n = 11

r \ p	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
1	1047	1993	2847	3618	4312	4937	5499	6004	6456	6862
2	0052	0195	0413	0692	1013	1382	1772	2181	2601	3026
3	0002	0012	0037	0083	0154	0248	0370	0519	0695	0896
4			0002	0007	0016	0030	0053	0085	0129	0185
5					0001	0003	0005	0010	0017	0028
6								0001	0002	0003

Tabla C *(continuación)*

p / r	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	7885	7549	7839	8097	8327	8531	8712	8873	9015	9141
2	3458	3873	4286	4689	5078	5453	5811	6151	6474	6779
3	1180	1366	1638	1915	2218	2521	2839	3164	3494	3826
4	0356	0341	0448	0560	0694	0846	1013	1197	1397	1611
5	0048	0061	0087	0119	0159	0207	0266	0334	0413	0504
6	0005	0008	0012	0018	0027	0037	0051	0068	0090	0117
7		0001	0001	0002	0003	0005	0007	0010	0014	0020
8							0001	0001	0002	0002

p / r	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	9858	9350	9436	9511	9578	9636	9686	9730	9769	9802
2	7065	7333	7582	7814	8029	8227	8410	8577	8730	8870
3	4188	4488	4814	5134	5448	5753	6049	6335	6610	6873
4	1840	2081	2333	2596	2867	3146	3430	3719	4011	4304
5	0607	0783	0851	0998	1146	1313	1493	1685	1888	2103
6	0148	0186	0231	0283	0343	0412	0490	0577	0674	0782
7	0037	0033	0046	0059	0076	0095	0119	0146	0179	0216
8	0003	0005	0007	0009	0012	0016	0021	0027	0034	0043
9			0001	0001	0001	0002	0002	0003	0004	0006

p / r	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	9831	9856	9878	9896	9912	9926	9938	9948	9956	9964
2	8997	9118	9816	9310	9394	9470	9537	9597	9650	9698
3	7183	7361	7587	7799	7999	8186	8360	8522	8672	8811
4	4598	4890	5179	5464	5744	6019	6286	6545	6796	7037
5	8388	8563	2807	3059	3317	3581	3850	4122	4397	4672
6	0901	1031	1171	1324	1487	1661	1847	2043	2249	2465
7	0260	0309	0366	0430	0501	0581	0670	0768	0876	0994
8	0084	0067	0082	0101	0128	0148	0177	0210	0249	0293
9	0008	0010	0013	0016	0020	0026	0032	0039	0048	0059
0	0001	0001	0001	0002	0002	0003	0004	0005	0006	0007

p / r	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	9970	9975	9979	9983	9986	9989	9991	9992	9994	9995
2	9739	9776	9808	9836	9861	9882	9900	9916	9930	9941
3	8938	9053	9162	9260	9348	9428	9499	9564	9622	9673
4	7869	7490	7700	7900	8089	8266	8433	8588	8733	8867
5	4948	5283	5495	5764	6029	6288	6541	6787	7026	7256
6	2690	2924	3166	3414	3669	3929	4193	4460	4729	5000
7	1181	1260	1408	1568	1738	1919	2110	2312	2523	2744
8	0343	0399	0461	0532	0610	0696	0791	0895	1009	1133
9	0078	0087	0104	0185	0148	0175	0206	0241	0282	0327
0	0009	0018	0014	0018	0022	0027	0033	0040	0049	0059
1	0001	0001	0001	0001	0002	0002	0002	0003	0004	0005

***n* = 12**

p / r	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
1	1136	2153	3062	3873	4596	5241	5814	6323	6775	7176
2	0068	0231	0486	0809	1184	1595	2033	2487	2948	3410
3	0008	0015	0048	0107	0196	0316	0468	0652	0866	1109
4		0001	0003	0010	0022	0043	0075	0120	0180	0256
5				0001	0002	0004	0009	0016	0027	0043
6							0001	0002	0003	0005
7										0001

p / r	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	7530	7843	8120	8363	8578	8766	8931	9076	9202	9313
2	3867	4314	4748	5166	5565	5945	6304	6641	6957	7251
3	1377	1667	1977	2303	2642	2990	3344	3702	4060	4417
4	0351	0464	0597	0750	0922	1114	1324	1552	1795	2054
5	0065	0095	0133	0181	0239	0310	0393	0489	0600	0726
6	0009	0014	0022	0033	0046	0065	0088	0116	0151	0194
7	0001	0002	0003	0004	0007	0010	0015	0021	0029	0039
8					0001	0001	0002	0003	0004	0006
9										0001

Tabla C *(continuación)*

r \ p	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	9409	9493	9566	9629	9683	9730	9771	9806	9836	9862
2	7524	7776	8009	8222	8416	8594	8755	8900	9032	9150
3	4768	5114	5450	5778	6093	6397	6687	6963	7225	7472
4	2326	2610	2904	3205	3512	3824	4137	4452	4765	5075
5	0966	1021	1192	1377	1576	1790	2016	2254	2504	2763
6	0245	0304	0374	0453	0544	0646	0760	0887	1026	1178
7	0052	0068	0089	0113	0143	0178	0219	0267	0322	0386
8	0008	0011	0016	0021	0028	0036	0047	0060	0076	0095
9	0001	0001	0002	0003	0004	0005	0007	0010	0013	0017
10						0001	0001	0001	0002	0002

r \ p	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	9884	9902	9918	9932	9943	9953	9961	9968	9973	9978
2	9256	9350	9435	9509	9576	9634	9685	9730	9770	9804
3	7704	7922	8124	8313	8487	8648	8795	8931	9054	9166
4	5381	5681	5973	6258	6533	6799	7053	7296	7528	7747
5	3032	3308	3590	3876	4167	4459	4751	5043	5332	5618
6	1343	1521	1711	1913	2127	2352	2588	2833	3087	3348
7	0458	0540	0632	0734	0846	0970	1106	1253	1411	1582
8	0118	0144	0176	0213	0255	0304	0359	0422	0493	0573
9	0022	0028	0036	0045	0056	0070	0086	0104	0127	0153
10	0003	0004	0005	0007	0008	0011	0014	0018	0022	0028
11				0001	0001	0001	0001	0002	0002	0003

r \ p	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	9982	9986	9988	9990	9992	9994	9995	9996	9997	9998
2	9834	9860	9882	9901	9917	9931	9943	9953	9961	9968
3	9867	9358	9440	9513	9579	9637	9688	9733	9773	9807
4	7953	8147	8329	8498	8655	8801	8934	9057	9168	9270
5	5899	6175	6443	6704	6956	7198	7430	7652	7862	8062
6	3616	3889	4167	4448	4731	5014	5297	5577	5855	6128
7	1765	1939	2164	2380	2607	2843	3089	3343	3604	3872
8	0662	0760	0869	0988	1117	1258	1411	1575	1751	1938
9	0183	0218	0258	0304	0356	0415	0481	0555	0638	0730
10	0035	0043	0053	0065	0079	0095	0114	0137	0163	0193
11	0004	0005	0007	0009	0011	0014	0017	0021	0026	0032
12				0001	0001	0001	0001	0001	0002	0002

***n* = 13**

r \ p	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
1	1225	2310	3270	4118	4867	5526	6107	6617	7065	7458
2	0072	0270	0564	0932	1354	1814	2298	2794	3293	3787
3	0003	0020	0062	0135	0245	0392	0578	0799	1054	1339
4		0001	0005	0014	0031	0060	0103	0163	0242	0342
5				0001	0003	0007	0013	0024	0041	0065
6						0001	0001	0003	0005	0009
7									0001	0001

r \ p	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	7802	8102	8364	8592	8791	8963	9113	9242	9354	9450
2	4270	4738	5186	5614	6017	6396	6751	7080	7384	7666
3	1651	1985	2337	2704	3080	3463	3848	4231	4611	4983
4	0464	0609	0776	0967	1180	1414	1667	1939	2226	2527
5	0097	0139	0193	0260	0342	0438	0551	0681	0827	0991
6	0015	0024	0036	0053	0075	0104	0139	0183	0237	0300
7	0003	0003	0005	0008	0013	0019	0027	0038	0052	0070
8			0001	0001	0002	0003	0004	0006	0009	0012
9								0001	0001	0002

Tabla C *(continuación)*

r \ p	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	9533	9604	9666	9718	9762	9800	9833	9860	9883	9903
2	7920	8154	8367	8559	8733	8889	9029	9154	9265	9363
3	5347	5699	6039	6364	6674	6968	7245	7505	7749	7975
4	2839	3161	3489	3822	4157	4493	4826	5155	5478	5794
5	1173	1371	1585	1816	2060	2319	2589	2870	3160	3457
6	0375	0462	0562	0675	0802	0944	1099	1270	1455	1654
7	0093	0120	0154	0195	0243	0299	0365	0440	0527	0624
8	0017	0024	0032	0043	0056	0073	0093	0118	0147	0182
9	0002	0004	0005	0007	0010	0013	0018	0024	0031	0040
10			0001	0001	0001	0002	0003	0004	0005	0007
11									0001	0001

r \ p	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	9920	9934	9945	9955	9963	9970	9975	9980	9984	9987
2	9450	9527	9594	9653	9704	9749	9787	9821	9849	9874
3	8185	8379	8557	8720	8868	9003	9125	9235	9333	9421
4	6101	6398	6683	6957	7217	7464	7698	7917	8123	8314
5	3760	4067	4376	4686	4995	5301	5603	5899	6188	6470
6	1867	2093	2331	2581	2841	3111	3388	3673	3962	4256
7	0733	0854	0988	1135	1295	1468	1654	1853	2065	2288
8	0223	0271	0326	0390	0462	0544	0635	0738	0851	0977
9	0052	0065	0082	0102	0126	0154	0187	0225	0270	0321
10	0009	0012	0015	0020	0025	0032	0040	0051	0063	0078
11	0001	0001	0002	0003	0003	0005	0006	0008	0010	0013
12							0001	0001	0001	0001

r \ p	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	9990	9992	9993	9995	9996	9997	9997	9998	9998	9999
2	9895	9912	9928	9940	9951	9960	9967	9974	9979	9983
3	9499	9569	9630	9684	9731	9772	9808	9838	9865	9888
4	8492	8656	8807	8945	9071	9185	9288	9381	9464	9539
5	6742	7003	7254	7493	7721	7935	8137	8326	8502	8666
6	4552	4849	5146	5441	5732	6019	6299	6573	6838	7095
7	2524	2770	3025	3290	3563	3842	4127	4415	4707	5000
8	1114	1264	1426	1600	1788	1988	2200	2424	2659	2905
9	0379	0446	0520	0605	0698	0803	0918	1045	1193	1334
10	0096	0117	0141	0170	0203	0242	0287	0338	0396	0461
11	0017	0021	0027	0033	0041	0051	0063	0077	0093	0112
12	0002	0002	0003	0004	0005	0007	0009	0011	0014	0017
13							0001	0001	0001	0001

***n* = 14**

r \ p	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
1	1313	2464	3472	4353	5123	5795	6380	6888	7330	7712
2	0084	0310	0645	1059	1530	2037	2564	3100	3632	4154
3	0003	0025	0077	0167	0301	0478	0698	0958	1255	1584
4		0001	0006	0019	0042	0080	0136	0214	0315	0441
5				0002	0004	0010	0020	0035	0059	0092
6						0001	0002	0004	0008	0015
7									0001	0002

r \ p	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	8044	8330	8577	8789	8972	9129	9264	9379	9477	9560
2	4658	5141	5599	6031	6433	6807	7152	7469	7758	8021
3	1939	2315	2708	3111	3521	3932	4341	4744	5138	5519
4	0594	0774	0979	1210	1465	1742	2038	2351	2679	3018
5	0137	0196	0269	0359	0467	0594	0741	0907	1093	1298
6	0024	0038	0057	0082	0115	0157	0209	0273	0349	0439
7	0003	0006	0009	0015	0022	0032	0046	0064	0087	0116
8		0001	0001	0002	0003	0005	0008	0012	0017	0024
9						0001	0001	0002	0003	0004

Tabla C *(continuación)*

f \ p	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	9631	9691	9742	9786	9842	9852	9878	9899	9917	9932
2	8259	8473	8665	8837	8990	9126	9246	9352	9444	9525
3	5887	6239	6574	6891	7189	7467	7727	7967	8188	8392
4	3366	3719	4076	4432	4787	5136	5479	5813	6137	6448
5	1583	1765	2023	2297	2585	2884	3193	3509	3832	4158
6	0543	0662	0797	0949	1117	1301	1502	1718	1949	2195
7	0158	0196	0248	0310	0383	0467	0563	0673	0796	0933
8	0033	0045	0060	0079	0103	0132	0167	0208	0257	0315
9	0006	0008	0011	0016	0022	0029	0038	0050	0065	0083
10	0001	0001	0002	0002	0003	0005	0007	0009	0012	0017
11						0001	0001	0001	0002	0002

f \ p	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	9948	9955	9963	9970	9976	9981	9984	9988	9990	9992
2	9596	9657	9710	9756	9795	9828	9857	9881	9902	9919
3	8577	8746	8899	9037	9161	9271	9370	9457	9534	9602
4	6747	7038	7301	7556	7795	8018	8226	8418	8595	8757
5	4486	4813	5138	5458	5773	6080	6378	6666	6943	7207
6	2454	2724	3006	3297	3595	3899	4208	4519	4831	5141
7	1084	1250	1431	1626	1836	2059	2296	2545	2805	3075
8	0381	0458	0545	0643	0753	0876	1012	1162	1325	1501
9	0105	0131	0163	0200	0243	0294	0353	0420	0497	0583
10	0022	0029	0037	0048	0060	0076	0095	0117	0144	0175
11	0003	0005	0006	0008	0011	0014	0019	0024	0031	0039
12		0001	0001	0001	0001	0002	0003	0003	0005	0006
13										0001

f \ p	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	9994	9995	9996	9997	9998	9998	9999	9999	9999	9999
2	9934	9946	9956	9964	9971	9977	9981	9985	9988	9991
3	9661	9713	9758	9797	9830	9858	9883	9903	9921	9935
4	8908	9039	9161	9270	9368	9455	9532	9601	9661	9713
5	7459	7697	7922	8132	8328	8510	8678	8833	8974	9102
6	5450	5754	6052	6344	6627	6900	7163	7415	7654	7880
7	3355	3643	3937	4236	4539	4843	5148	5451	5751	6047
8	1692	1896	2113	2344	2586	2840	3105	3380	3663	3953
9	0680	0789	0910	1043	1189	1348	1520	1707	1906	2120
10	0212	0255	0304	0361	0426	0500	0583	0677	0782	0898
11	0049	0061	0076	0093	0114	0139	0168	0202	0241	0287
12	0008	0010	0013	0017	0022	0027	0034	0042	0053	0065
13	0001	0001	0001	0002	0003	0003	0004	0006	0007	0009
14										0001

***n* = 15**

f \ p	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
1	1399	2614	3667	4579	5367	6047	6633	7137	7570	7941
2	0096	0353	0730	1191	1710	2262	2832	3403	3965	4510
3	0004	0030	0094	0203	0362	0571	0829	1130	1469	1841
4		0002	0008	0024	0055	0104	0175	0273	0399	0556
5			0001	0002	0006	0014	0028	0050	0082	0127
6					0001	0001	0003	0007	0013	0022
7								0001	0002	0003

f \ p	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	8889	8830	8762	8959	9126	9269	9389	9490	9576	9648
2	5031	5524	5987	6417	6814	7179	7511	7813	8085	8329
3	2238	2654	3084	3520	3958	4392	4819	5234	5635	6020
4	0748	0959	1204	1476	1773	2092	2429	2782	3146	3518
5	0187	0265	0361	0478	0617	0778	0961	1167	1394	1642
6	0037	0057	0084	0121	0168	0227	0300	0387	0490	0611
7	0006	0010	0015	0024	0036	0052	0074	0102	0137	0181
8	0001	0001	0002	0004	0006	0010	0014	0021	0030	0042
9					0001	0001	0002	0003	0005	0008
10									0001	0001

Tabla C *(continuación)*

r \ p	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	9709	9759	9802	9837	9866	9891	9911	9928	9941	9953
2	8547	8741	8913	9065	9198	9315	9417	9505	9581	9647
3	6385	6731	7055	7358	7639	7899	8137	8355	8553	8732
4	3895	4274	4650	5022	5387	5742	6086	6416	6732	7031
5	1910	2195	2495	2810	3135	3469	3810	4154	4500	4845
6	0748	0905	1079	1272	1484	1713	1958	2220	2495	2784
7	0234	0298	0374	0463	0566	0684	0817	0965	1130	1311
8	0058	0078	0104	0135	0173	0219	0274	0338	0413	0500
9	0611	0016	0023	0031	0042	0056	0073	0094	0121	0152
10	0002	0003	0004	0006	0008	0011	0015	0021	0028	0037
11			0001	0001	0001	0002	0002	0003	0005	0007
12									0001	0001

r \ p	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	9962	9969	9975	9980	9984	9988	9990	9992	9994	9995
2	9704	9752	9794	9829	9858	9883	9904	9922	9936	9948
3	8893	9038	9167	9281	9383	9472	9550	9618	9678	9729
4	7314	7580	7829	8060	8273	8469	8649	8813	8961	9095
5	5187	5523	5852	6171	6481	6778	7062	7332	7587	7827
6	3084	3393	3709	4032	4357	4684	5011	5335	5654	5968
7	1509	1728	1951	2194	2452	2722	3003	3295	3595	3902
8	0599	0711	0837	0977	1132	1302	1487	1687	1902	2131
9	0190	0236	0289	0351	0422	0504	0597	0702	0820	0950
10	0048	0062	0079	0099	0124	0154	0190	0232	0281	0338
11	0009	0012	0016	0022	0028	0037	0047	0059	0075	0093
12	0001	0002	0003	0004	0005	0006	0009	0011	0015	0019
13					0001	0001	0001	0002	0002	0003

r \ p	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	9996	9997	9998	9998	9999	9999	9999	9999	10000	10000
2	9958	9966	9973	9979	9983	9987	9990	9992	9994	9995
3	9773	9811	9843	9870	9893	9913	9929	9943	9954	9963
4	9216	9328	9417	9502	9576	9641	9697	9746	9788	9824
5	8052	8261	8454	8633	8796	8945	9080	9201	9310	9408
6	6874	6570	6856	7131	7392	7641	7875	8095	8301	8491
7	4814	4530	4847	5164	5478	5789	6095	6394	6684	6964
8	2374	2630	2898	3176	3465	3762	4065	4374	4686	5000
9	1095	1254	1427	1615	1818	2034	2265	2510	2767	3036
10	0404	0479	0565	0661	0769	0890	1024	1171	1333	1509
11	0116	0143	0174	0211	0255	0305	0363	0430	0506	0592
12	0035	0038	0040	0051	0063	0079	0097	0119	0145	0176
13	0004	0005	0007	0009	0011	0014	0018	0023	0029	0037
14			0001	0001	0001	0002	0002	0003	0004	0005

n = 16

r \ p	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
1	1485	8762	3857	4796	5599	6284	6869	7366	7789	8147
2	0109	0399	0818	1327	1892	2489	3098	3701	4289	4853
3	0005	0037	0113	0242	0429	0673	0969	1311	1694	2108
4		0002	0011	0038	0070	0132	0221	0342	0496	0684
5			0001	0003	0009	0019	0038	0068	0111	0170
6					0001	0002	0005	0010	0019	0033
7							0001	0001	0003	0005
8										0001

r \ p	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	8480	8707	8923	9103	9257	9386	9493	9582	9657	9719
2	5386	5885	6347	6773	7161	7513	7830	8115	8368	8593
3	2845	2999	3461	3986	4386	4838	5277	5698	6101	6482
4	0907	1168	1448	1763	2101	2460	2836	3223	3619	4019
5	0248	0348	0471	0618	0791	0988	1211	1458	1727	2018
6	0053	0088	0120	0171	0235	0315	0412	0527	0662	0817
7	0009	0015	0024	0038	0056	0080	0112	0153	0204	0267
8	0001	0003	0004	0007	0011	0016	0024	0036	0051	0070
9			0001	0001	0002	0003	0004	0007	0010	0015
10							0001	0001	0002	0002

Tabla C *(continuación)*

r \ p	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	9770	9812	9847	9876	9900	9919	9935	9948	9958	9967
2	8791	8965	9117	9250	9365	9465	9550	9623	9686	9739
3	6839	7173	7483	7768	8029	8267	8482	8677	8851	9006
4	4418	4814	5203	5583	5950	6303	6640	6959	7260	7541
5	2387	2658	2991	3341	3698	4060	4425	4786	5147	5501
6	0998	1188	1405	1641	1897	2169	2458	2761	3077	3402
7	0348	0432	0536	0657	0796	0951	1125	1317	1526	1753
8	0098	0127	0166	0214	0271	0340	0420	0514	0621	0744
9	0021	0030	0041	0056	0075	0098	0127	0163	0206	0257
10	0004	0006	0008	0012	0016	0023	0031	0041	0055	0071
11	0001	0001	0001	0002	0003	0004	0006	0008	0011	0016
12						0001	0001	0001	0002	0003

r \ p	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	9974	9979	9984	9987	9990	9992	9994	9995	9996	9997
2	9784	9822	9854	9880	9902	9921	9936	9948	9959	9967
3	9144	9266	9374	9467	9549	9620	9681	9734	9778	9817
4	7804	8047	8270	8475	8661	8830	8982	9119	9241	9349
5	5846	6181	6504	6813	7108	7387	7649	7895	8123	8334
6	3736	4074	4416	4759	5100	5438	5770	6094	6408	6712
7	1997	2257	2531	2819	3119	3428	3746	4070	4398	4728
8	0881	1035	1205	1391	1594	1813	2048	2298	2562	2839
9	0317	0388	0470	0564	0671	0791	0926	1076	1242	1423
10	0092	0117	0148	0185	0229	0280	0341	0411	0491	0583
11	0021	0028	0037	0048	0062	0079	0100	0125	0155	0191
12	0004	0005	0007	0010	0013	0017	0023	0030	0038	0049
13		0001	0001	0001	0002	0003	0004	0005	0007	0009
14								0001	0001	0001

r \ p	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	9998	9998	9999	9999	9999	9999	10000	10000	10000	10000
2	9974	9979	9984	9987	9990	9993	9994	9995	9997	9997
3	9849	9876	9899	9918	9934	9947	9958	9966	9973	9979
4	9444	9587	9600	9664	9719	9766	9806	9840	9869	9894
5	8529	8707	8869	9015	9147	9265	9370	9463	9544	9616
6	7003	7280	7543	7792	8024	8241	8441	8626	8795	8949
7	5058	5387	5711	6029	6340	6641	6932	7210	7476	7728
8	3188	3488	3736	4051	4371	4694	5019	5343	5665	5982
9	1619	1838	2060	2302	2559	2829	3111	3405	3707	4018
10	0687	0805	0936	1081	1241	1416	1607	1814	2036	2272
11	0834	0284	0342	0409	0486	0574	0674	0786	0911	1051
12	0062	0078	0098	0121	0149	0183	0222	0268	0322	0384
13	0012	0016	0021	0027	0035	0044	0055	0069	0086	0106
14	0002	0002	0003	0004	0006	0007	0010	0013	0016	0021
15					0001	0001	0001	0001	0002	0003

n = 17

r \ p	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
1	1571	2907	4042	5004	5819	6507	7088	7577	7988	8332
2	0183	0446	0909	1465	2078	2717	3362	3995	4604	5162
3	0006	0044	0134	0286	0503	0782	1118	1503	1927	2382
4		0003	0014	0040	0088	0164	0273	0419	0603	0826
5			0001	0004	0012	0026	0051	0089	0145	0221
6					0001	0003	0007	0015	0027	0047
7							0001	0002	0004	0008
8										0001

r \ p	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	8621	8862	9063	9230	9369	9484	9579	9657	9722	9775
2	5783	6223	6682	7099	7475	7813	8113	8379	8613	8818
3	2858	3345	3836	4324	4802	5266	5711	6133	6532	6904
4	1087	1383	1710	2065	2444	2841	3251	3669	4091	4511
5	0381	0446	0598	0778	0987	1224	1487	1775	2087	2418
6	0078	0114	0166	0234	0319	0423	0548	0695	0864	1057
7	0014	0023	0037	0056	0083	0118	0163	0220	0291	0377
8	0002	0004	0007	0011	0017	0027	0039	0057	0080	0109
9		0001	0001	0002	0003	0005	0008	0012	0018	0026
10						0001	0001	0002	0003	0005
11										0001

Tabla C *(continuación)*

r \ p	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	9818	9854	9882	9906	9925	9940	9953	9962	9970	9977
2	8996	9158	9285	9400	9499	9583	9654	9714	9765	9807
3	7849	7567	7859	8123	8363	8578	8771	8942	9093	9226
4	4987	5333	5728	6107	6470	6814	7137	7440	7721	7981
5	8766	3128	3500	3879	4261	4643	5023	5396	5760	6113
6	1873	1510	1770	2049	2347	2661	2989	3329	3677	4038
7	0479	0598	0736	0894	1071	1268	1485	1721	1976	2248
8	0147	0194	0251	0320	0402	0499	0611	0739	0884	1046
9	0037	0051	0070	0094	0124	0161	0206	0261	0326	0403
10	0007	0011	0016	0022	0031	0042	0057	0075	0098	0127
11	0001	0002	0003	0004	0006	0009	0013	0018	0024	0032
12				0001	0001	0002	0002	0003	0005	0007
13									0001	0001

r \ p	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	9988	9986	9989	9991	9993	9995	9996	9997	9998	9998
2	9843	9878	9896	9917	9933	9946	9957	9966	9973	9979
3	9343	9444	9532	9608	9673	9728	9775	9815	9849	9877
4	8219	8437	8634	8812	8972	9115	9241	9353	9450	9536
5	6453	6778	7087	7378	7652	7906	8142	8360	8559	8740
6	4390	4749	5105	5458	5803	6139	6465	6778	7077	7361
7	2536	2838	3153	3479	3812	4152	4495	4839	5182	5528
8	1287	1426	1642	1877	2128	2395	2676	2971	3278	3595
9	0498	0595	0712	0845	0994	1159	1341	1541	1757	1989
10	0168	0204	0254	0314	0383	0464	0557	0664	0784	0919
11	0043	0057	0074	0095	0120	0151	0189	0234	0286	0348
12	0009	0013	0017	0023	0030	0040	0051	0066	0084	0106
13	0002	0002	0003	0004	0006	0008	0011	0015	0019	0025
14				0001	0001	0001	0002	0002	0003	0005
15										0001

r \ p	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	9999	9999	9999	9999	10000	10000	10000	10000	10000	10000
2	9984	9987	9990	9992	9994	9996	9997	9998	9998	9999
3	9900	9920	9935	9948	9959	9968	9975	9980	9985	9988
4	9610	9674	9729	9776	9816	9849	9877	9901	9920	9936
5	8904	9051	9183	9301	9404	9495	9575	9644	9704	9755
6	7488	7879	8113	8330	8529	8712	8878	9028	9162	9283
7	5856	6188	6499	6805	7098	7377	7641	7890	8122	8338
8	3980	4350	4585	4921	5257	5590	5918	6239	6552	6855
9	2838	2508	2780	3072	3374	3687	4008	4335	4667	5000
10	1070	1336	1419	1618	1834	2066	2314	2577	2855	3145
11	0480	0503	0597	0705	0826	0962	1112	1279	1462	1662
12	0133	0165	0203	0248	0301	0363	0434	0517	0611	0717
13	0033	0042	0054	0069	0086	0108	0134	0165	0202	0245
14	0006	0008	0011	0014	0019	0024	0031	0040	0050	0064
15	0001	0001	0002	0002	0003	0004	0005	0007	0009	0012
16							0001	0001	0001	0001

n = 18

r \ p	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
1	1685	3049	4280	5804	6028	6717	7292	7771	8169	8499
2	0138	0495	1003	1607	2265	2945	3622	4281	4909	5497
3	0007	0058	0157	0333	0581	0898	1275	1702	2168	2662
4		0004	0018	0050	0109	0201	0333	0506	0723	0982
5			0002	0006	0015	0034	0067	0116	0186	0282
6				0001	0002	0005	0010	0021	0038	0064
7							0001	0003	0006	0012
8									0001	0002

r \ p	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	8773	8998	9185	9338	9464	9566	9651	9719	9775	9820
2	6048	6840	6998	7398	7759	8080	8362	8609	8824	9009
3	3173	3690	4806	4713	5203	5673	6119	6538	6927	7287
4	1282	1618	1986	8382	2798	3229	3669	4112	4554	4990
5	0405	0558	0743	0959	1206	1482	1787	2116	2467	2836

Tabla C *(continuación)*

r \ p	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	8908	9119	9291	9431	9544	9636	9710	9770	9818	9856
2	6342	6835	7277	7669	8015	8318	8581	8809	9004	9171
3	3488	4032	4568	5089	5587	6059	6500	6910	7287	7631
4	1490	1867	2275	2708	3159	3620	4085	4549	5005	5449
5	0502	0685	0904	1158	1444	1762	2107	2476	2864	3267
6	0135	0202	0290	0401	0537	0700	0891	1110	1357	1631
7	0030	0048	0076	0113	0163	0228	0310	0411	0532	0676
8	0005	0009	0016	0026	0041	0061	0089	0126	0173	0233
9	0001	0002	0003	0005	0008	0014	0021	0032	0047	0067
10				0001	0001	0002	0004	0007	0010	0016
11							0001	0001	0002	0003

r \ p	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	9887	9911	9930	9946	9958	9967	9975	9981	9985	9989
2	9313	9434	9535	9619	9690	9749	9797	9837	9869	9896
3	7942	8222	8471	8692	8887	9057	9205	9333	9443	9538
4	5877	6285	6671	7032	7369	7680	7965	8224	8458	8668
5	3681	4100	4520	4936	5346	5744	6129	6498	6848	7178
6	1929	2251	2592	2950	3322	3705	4093	4484	4875	5261
7	0843	1034	1248	1487	1749	2032	2336	2657	2995	3345
8	0307	0396	0503	0629	0775	0941	1129	1338	1568	1820
9	0093	0127	0169	0222	0287	0366	0459	0568	0694	0839
10	0023	0034	0047	0066	0089	0119	0156	0202	0258	0326
11	0005	0007	0011	0016	0023	0032	0044	0060	0080	0105
12	0001	0001	0002	0003	0005	0007	0010	0015	0021	0028
13				0001	0001	0001	0002	0003	0004	0006
14									0001	0001

r \ p	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	9991	9993	9995	9996	9997	9998	9998	9999	9999	9999
2	9917	9935	9949	9960	9969	9976	9981	9986	9989	9992
3	9618	9686	9743	9791	9830	9863	9890	9913	9931	9945
4	8856	9028	9169	9287	9409	9505	9588	9659	9719	9770
5	7486	7773	8037	8280	8500	8699	8878	9038	9179	9304
6	5641	6010	6366	6707	7032	7339	7627	7895	8143	8371
7	3703	4073	4445	4818	5188	5554	5913	6261	6597	6919
8	2091	2381	2688	3010	3344	3690	4043	4401	4762	5122
9	1003	1186	1389	1612	1855	2116	2395	2691	3002	3325
10	0405	0499	0608	0733	0875	1035	1213	1410	1626	1861
11	0137	0176	0223	0280	0347	0426	0518	0625	0747	0885
12	0038	0051	0068	0089	0114	0146	0185	0231	0287	0352
13	0009	0012	0017	0023	0031	0041	0054	0070	0091	0116
14	0002	0002	0003	0005	0007	0009	0013	0017	0023	0031
15			0001	0001	0001	0002	0002	0003	0005	0006
16									0001	0001

r \ p	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000
2	9994	9995	9996	9997	9998	9999	9999	9999	9999	10000
3	9957	9967	9974	9980	9985	9988	9991	9993	9995	9996
4	9813	9849	9878	9903	9923	9939	9952	9963	9971	9978
5	9413	9508	9590	9660	9720	9771	9814	9850	9879	9904
6	8579	8767	8937	9088	9223	9342	9446	9537	9615	9682
7	7226	7515	7787	8039	8273	8488	8684	8862	9022	9165
8	5480	5832	6176	6509	6831	7138	7430	7706	7964	8204
9	3660	4003	4353	4706	5060	5413	5762	6105	6439	6762
10	2114	2385	2672	2974	3290	3617	3954	4299	4648	5000
11	1040	1213	1404	1613	1841	2087	2351	2631	2928	3238
12	0489	0518	0621	0738	0871	1021	1187	1372	1575	1796
13	0146	0183	0227	0280	0342	0415	0500	0597	0709	0835
14	0040	0052	0067	0086	0109	0137	0171	0212	0261	0318
15	0009	0012	0016	0021	0028	0036	0046	0060	0076	0096
16	0001	0002	0003	0004	0005	0007	0010	0013	0017	0022
17				0001	0001	0001	0001	0002	0003	0004

Tabla C *(continuación)*

p / r	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
6	0102	0154	0222	0310	0419	0551	0708	0889	1097	1329
7	0081	0034	0054	0081	0118	0167	0229	0306	0400	0513
8	0003	0006	0011	0017	0027	0041	0060	0086	0120	0163
9		0001	0002	0003	0005	0008	0013	0020	0029	0043
10					0001	0001	0002	0004	0006	0009
11								0001	0001	0002

p / r	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	9856	9886	9909	9928	9944	9956	9965	9973	9979	9984
2	9169	9306	9423	9522	9605	9676	9735	9784	9824	9858
3	7616	7916	8187	8430	8647	8839	9009	9158	9288	9400
4	5414	5825	6218	6591	6943	7272	7578	7860	8119	8354
5	3220	3613	4012	4414	4813	5208	5594	5968	6329	6673
6	1386	1866	2168	2488	2825	3176	3538	3907	4281	4656
7	0645	0799	0974	1171	1390	1630	1891	2171	2469	2783
8	0217	0283	0363	0458	0569	0699	0847	1014	1200	1407
9	0060	0083	0112	0148	0193	0249	0316	0395	0488	0596
10	0014	0020	0028	0039	0054	0073	0097	0127	0164	0210
11	0003	0004	0006	0009	0012	0018	0025	0034	0046	0061
12		0001	0001	0002	0002	0003	0005	0007	0010	0014
13						0001	0001	0001	0002	0003

p / r	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	9987	9990	9993	9994	9996	9997	9998	9998	9999	9999
2	9886	9908	9927	9942	9954	9964	9972	9978	9983	9987
3	9498	9581	9652	9713	9764	9807	9843	9873	9897	9918
4	8568	8759	8931	9083	9217	9335	9439	9528	9606	9672
5	7001	7309	7598	7866	8114	8341	8549	8737	8907	9058
6	5029	5398	5759	6111	6450	6776	7086	7379	7655	7912
7	3111	3450	3797	4151	4509	4867	5224	5576	5921	6257
8	1633	1878	2141	2421	2717	3027	3349	3681	4021	4366
9	0720	0861	1019	1196	1391	1604	1835	2084	2350	2632
10	0264	0329	0405	0494	0597	0714	0847	0997	1163	1347
11	0080	0104	0133	0169	0212	0264	0325	0397	0480	0576
12	0020	0027	0036	0047	0062	0080	0102	0130	0163	0203
13	0004	0005	0008	0011	0014	0019	0026	0034	0044	0058
14	0001	0001	0001	0002	0003	0004	0005	0007	0010	0013
15						0001	0001	0001	0002	0002

p / r	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	9999	9999	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000
2	9990	9992	9994	9996	9997	9998	9998	9999	9999	9999
3	9934	9948	9959	9968	9975	9981	9985	9989	9991	9993
4	9729	9777	9818	9852	9880	9904	9923	9939	9952	9962
5	9193	9313	9418	9510	9589	9658	9717	9767	9810	9846
6	8151	8372	8573	8757	8923	9072	9205	9324	9428	9519
7	6582	6895	7193	7476	7742	7991	8222	8436	8632	8811
8	4713	5062	5408	5750	6085	6412	6728	7032	7322	7597
9	2928	3236	3550	3885	4223	4562	4906	5249	5591	5927
10	1549	1768	2004	2258	2547	2812	3110	3421	3742	4073
11	0686	0811	0951	1107	1280	1470	1677	1902	2144	2403
12	0250	0307	0372	0449	0537	0638	0753	0883	1028	1189
13	0074	0094	0110	0147	0183	0225	0275	0334	0402	0481
14	0017	0022	0029	0038	0049	0063	0079	0100	0125	0154
15	0003	0004	0006	0007	0010	0013	0017	0023	0029	0036
16		0001	0001	0001	0001	0002	0003	0004	0005	0007
17									0001	0001

***n* = 19**

p / r	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
1	1738	3188	4394	5396	6226	6914	7481	7949	8334	8649
2	0153	0546	1100	1751	2453	3171	3879	4560	5202	5797
3	0009	0061	0183	0384	0665	1021	1439	1908	2415	2946
4		0005	0022	0061	0132	0243	0398	0602	0853	1150
5			0002	0007	0020	0044	0085	0147	0235	0352
6				0001	0002	0006	0014	0029	0051	0086
7						0001	0002	0004	0009	0017
8								0001	0001	0003

Tabla C *(continuación)*

$n = 20$

r \ p	01	02	03	04	05	06	07	08	09	10
1	1821	3324	4562	5580	6415	7099	7658	8113	8484	8784
2	0169	0599	1198	1897	2642	3395	4131	4831	5484	6083
3	0010	0071	0210	0439	0755	1150	1610	2121	2666	3231
4		0006	0027	0074	0159	0290	0471	0706	0993	1330
5			0003	0010	0026	0056	0107	0183	0290	0432
6				0001	0003	0009	0019	0038	0068	0113
7						0001	0003	0006	0013	0024
8								0001	0002	0004
9										0001

r \ p	11	12	13	14	15	16	17	18	19	20
1	9028	9224	9383	9510	9612	9694	9759	9811	9852	9883
2	6624	7109	7539	7916	8244	8529	8773	8982	9159	9308
3	3802	4369	4920	5450	5951	6420	6854	7252	7614	7939
4	1710	2127	2573	3041	3523	4010	4496	4974	5439	5886
5	0610	0827	1083	1375	1702	2059	2443	2849	3271	3704
6	0175	0260	0370	0507	0673	0870	1098	1356	1643	1958
7	0041	0067	0103	0153	0219	0304	0409	0537	0689	0867
8	0008	0014	0024	0038	0059	0088	0127	0177	0241	0321
9	0001	0002	0005	0008	0013	0021	0033	0049	0071	0100
10			0001	0001	0002	0004	0007	0011	0017	0026
11						0001	0001	0002	0004	0006
12									0001	0001

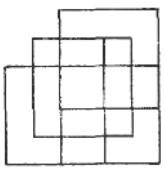
r \ p	21	22	23	24	25	26	27	28	29	30
1	9910	9931	9946	9959	9968	9976	9982	9986	9989	9992
2	9434	9539	9626	9698	9757	9805	9845	9877	9903	9924
3	8230	8488	8716	8915	9087	9237	9365	9474	9567	9645
4	6310	6711	7085	7431	7748	8038	8300	8534	8744	8929
5	4142	4580	5014	5439	5852	6248	6623	6981	7315	7625
6	2297	2657	3035	3427	3828	4235	4643	5048	5447	5836
7	1071	1301	1557	1838	2142	2467	2810	3169	3540	3920
8	0419	0536	0675	0835	1018	1225	1455	1707	1982	2277
9	0138	0186	0246	0320	0409	0515	0640	0784	0948	1133
10	0038	0054	0075	0103	0139	0183	0238	0305	0385	0480
11	0009	0013	0019	0028	0039	0055	0074	0100	0132	0171
12	0002	0003	0004	0006	0009	0014	0019	0027	0038	0051
13			0001	0001	0002	0003	0004	0006	0009	0013
14							0001	0001	0002	0003

r \ p	31	32	33	34	35	36	37	38	39	40
1	9994	9996	9997	9998	9998	9999	9999	9999	9999	10000
2	9940	9953	9964	9972	9979	9984	9988	9991	9993	9995
3	9711	9765	9811	9848	9879	9904	9924	9940	9953	9964
4	9092	9235	9358	9465	9556	9634	9700	9755	9802	9840
5	7911	8173	8411	8626	8818	8989	9141	9274	9390	9490
6	6213	6574	6917	7242	7546	7829	8090	8329	8547	8744
7	4305	4693	5079	5460	5834	6197	6547	6882	7200	7500
8	2591	2922	3268	3624	3990	4361	4735	5108	5478	5841
9	1340	1568	1818	2087	2376	2683	3005	3341	3688	4044
10	0591	0719	0866	1032	1218	1424	1650	1897	2163	2447
11	0220	0275	0350	0434	0532	0645	0775	0923	1090	1275
12	0069	0091	0119	0154	0196	0247	0308	0381	0466	0565
13	0018	0025	0034	0045	0060	0079	0102	0132	0167	0210
14	0004	0006	0008	0011	0015	0021	0028	0037	0049	0065
15	0001	0001	0001	0002	0003	0004	0006	0009	0012	0016
16						0001	0001	0002	0002	0003

r \ p	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
1	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000	10000
2	9996	9997	9998	9998	9999	9999	9999	10000	10000	10000
3	9972	9979	9984	9988	9991	9993	9995	9996	9997	9998
4	9872	9898	9920	9937	9951	9962	9971	9977	9983	9987
5	9577	9651	9714	9767	9811	9848	9879	9904	9924	9941

Tabla C *(conclusión)*

p I	41	42	43	44	45	46	47	48	49	50
6	8921	9078	9217	9340	9447	9539	9619	9687	9745	9793
7	7780	8041	8281	8501	8701	8881	9042	9186	9312	9423
8	6196	6539	6868	7183	7480	7759	8020	8261	8482	8684
9	4406	4771	5136	5499	5857	6207	6546	6873	7186	7483
10	2748	3064	3394	3736	4086	4443	4804	5166	5525	5881
11	1480	1705	1949	2212	2493	2791	3104	3432	3771	4119
12	0679	0810	0958	1123	1308	1511	1734	1977	2238	2517
13	0262	0324	0397	0482	0580	0694	0823	0969	1133	1316
14	0084	0107	0136	0172	0214	0265	0326	0397	0480	0577
15	0022	0029	0038	0050	0064	0083	0105	0133	0166	0207
16	0004	0006	0008	0011	0015	0020	0027	0035	0046	0059
17	0001	0001	0001	0002	0003	0004	0005	0007	0010	0013
18						0001	0001	0001	0001	0002



Solución de problemas seleccionados

Capítulo 1

1-1. *a*. Asigne 1000 = (1 - 0.40)X y resuelva para *X: X* = 1000/0.60 = 1667 unidades
b. Costo total = $5000 + $30(1667) = $5000 + $50 000 = $55 000
c. Como los ingresos sólo son de 50 000 dólares, en estas circunstancias se debe rechazar el contrato (el resultado de la aceptación del contrato sería una pérdida de 5000 dólares).

1-2. *a.* El ahorro anual del engranaje de plástico es (50¢) (80 000 unidades) = $40 000. Como el costo anual de la conversión es sólo de 20 000 dólares, la compañía deberá hacer la conversión al engranaje de plástico.
b. Los costos adicionales del engranaje de plástico debidos al aumento en el número de averías son ($40) (2/1000) (80 000) = $6400. Por lo tanto, los costos totales son $20 000 + $6400 = $26 400. Esta cantidad es menor que el ahorro de $40 000, por lo cual la compañía debe hacer la conversión al plástico.

Capítulo 2

2-1. *a.* Variable de decisión: PRECIO.
Variables exógenas: VENTAS UNITARIAS, COSTOS FIJOS (manufactura y mercadotecnia), COSTO VARIABLE POR UNIDAD.
Medición del rendimiento: BENEFICIO.
Variables intermedias: VENTAS (dólares), COSTO DE MANUFACTURA, COSTO DE MERCADOTECNIA, BENEFICIO BRUTO (opcional). Políticas y restricciones: Ninguna. *b.* Relaciones:
VENTAS (dólares) = VENTAS UNITARIAS * PRECIO COSTO DE MANUFACTURA = 80 000 + 300 * VENTAS UNITARIAS BENEFICIO BRUTO = VENTAS (dólares) - COSTO DE MANUFACTURA COSTO DE MERCADOTECNIA = 10 000 + 0.10 * VENTAS (dólares)

BENEFICIO = BENEFICIO BRUTO - COSTO DE MERCADOTECNIA [Si no utiliza la variable BENEFICIO BRUTO, entonces BENEFICIO = VENTAS (dólares) - COSTO DE MANUFACTURA - COSTO DE MERCADOTECNIA.]

c. Con el formato que se proporciona en el problema y suponiendo que las etiquetas están en la columna A y las fórmulas en la columna B, se tiene:

```
                A                          B
 1 VENTAS UNITARIAS                      100
 2 PRECIO                                1600
 3 COSTO VARIABLE POR UNIDAD             300
 4
 5         ESTADO DE INGRESOS PROYECTADOS
 6              COMPAÑÍA MÍA, 1992
 7
 8 VENTAS (dólares)                       +B1*B2
 9 COSTO DE MANUFACTURA          (80000 + (B3*B1))
10                                       --------
11 BENEFICIO BRUTO                        +B8-B9
12
13 COSTO DE MERCADOTECNIA       (10000 + (.10*B8))
14                                       --------
15 BENEFICIO ANTES DE IMPUESTOS          +B11-B13
                                         --------
```

d. (1) El punto de equilibrio ocurre cerca de la venta de 79 unidades.
(2) Las tres alternativas y sus beneficios son:
Caso base: Precio = 1600; ventas unitarias = 100; Beneficio = $24 000
Caso base: Precio = 1400; ventas unitarias = 130; Beneficio = $34 800
Caso base: Precio = 1200; ventas unitarias = 150; Beneficio = $27 000
Tomando en cuenta solamente los beneficios, el precio de 1400 dólares es mejor.

Capítulo 3

3-1. Los resultados posibles son: (los resultados son independientes)

HHH	1/8	THH	1/8
HHT	1/8	TTH	1/8
HTT	1/8	THT	1/8
HTH	1/8	TTT	1/8
	Total =	8/8 =	1

a. P(tres caras) = 1/8 o P(tres caras) = $P(H) \cdot P(H) \cdot P(H)$
$= 1/2 \cdot 1/2 \cdot 1/2 = 1/8$.

b. P(dos caras o más):

HHH	1/8
HHT	1/8
HTH	1/8
THH	1/8
	1/2

c. P(una o más cruces):

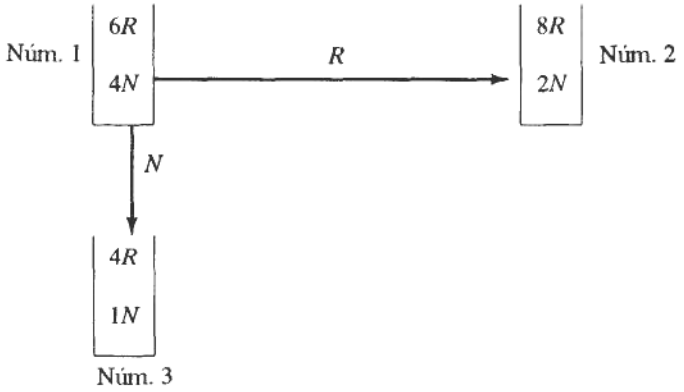
HHT	1/8
HTT	1/8
HTH	1/8
THH	1/8
TTH	1/8
THT	1/8
TTT	1/8
	7/8 o $1 - P(\text{HHH}) = 1 - 1/8 = 7/8$

d. P(cara en el último lanzamiento).

HHH	1/8
HTH	1/8
THH	1/8
TTH	1/8
	1/2

Nota: Como los resultados son independientes, esto equivale a /"(cara) en un lanzamiento de una moneda legítima, o sea, 1/2.

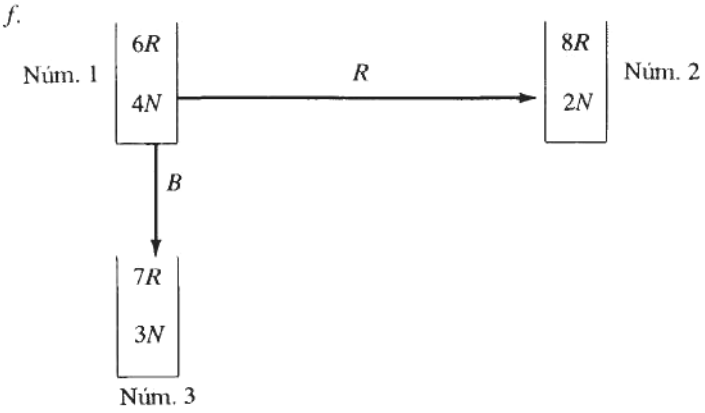
3-2.



a. P(rojo en el segundo|rojo en el primero) = 8/10 = 4/5
b. P(negro en el segundo|rojo en el primero) = 2/10 = 1/5
c. P(rojo en el segundo|negro en el primero) = 4/5
d. P(negro en el segundo|negro en el primero) = 1/5
e. P(negro en el segundo) $= P(N_2|R_1) \cdot P(R_1) + P(N_2|N_1) \cdot P(N_1)$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{5} \cdot \frac{2}{5} = \frac{1}{5}$$

f.



a. P(rojo en el segundo|rojo en el primero) = $8/10 = 4/5$
b. P(negro en el segundo|rojo en el primero) = $2/10 = 1/5$
c. P(rojo en el segundo|negro en el primero) = $7/10$
d. P(negro en el segundo|negro en el primero) = $3/10$
e. $P(N_2) = P(N_2|R_1) \cdot P(R_1) + P(N_2|N_1) \cdot P(N_1)$

$$= \frac{1}{5} \cdot \frac{3}{5} + \frac{1}{10} \cdot \frac{2}{5} = 0.24$$

En el primer caso, el suceso condicionante no era importante porque las proporciones de bolas rojas y negras en las urnas 2 y 3 son las mismas. Por lo tanto, existe la independencia. En el segundo caso, las proporciones no son las mismas, por lo cual es importante el suceso condicionante.

3-3. *a.* $n = 2$ P(cara) = 0.4 P(cruz) = 0.6
(1) P(2 caras) = 0.16
(2) P(2 cruces) = 0.36
(3) P(1 cara) = 0.48
(4) P(1 cara) + P(2 caras) = 0.48 + 0.16 = 0.64
(5) P(1 cruz) = 0.48
P(1 cruz) + P(2 cruces) = 0.48 + 0.36 = 0.84
(6) $P(R \leq 1) = 1 - P(R > 1) = 1 - 0.36 = 0.64$

Una partición del suceso, dos lanzamientos, es:

				Probabilidad
P(1 cara) =	.48	o	HH =	.16
P(2 caras) =	.16		HT =	.24
P(2 cruces) =	.36		TH =	.24
	1.00		TT =	.36
				1.00

b. n = 3
(1) P(3 caras) = 0.064
(2) P(2 caras) = 0.288

(3) P(1 cara) = 0.432
(4) 0.064 + 0.288 + 0.432 = 0.784

3-4. *a.* P(menor que 55) = $^{9}/_{30}$ = 0.30. Esta es una probabilidad marginal o simple.
b. P(*55* o más, mercadotecnia) = $^{5}/_{30}$ = 0.167. Probabilidad conjunta.
c. P(menor que 55|finanzas) = $^{4}/_{18}$ = 0.222. Probabilidad condicional.
d. No. Observe que /"(menor que 55) no es lo mismo que P(menor que 55|finanzas), lo cual sería necesario para la independencia. Por lo general, los ejecutivos de la categoría "otros" son más jóvenes que sus compañeros de finanzas y mercadotecnia.

3-5.

Valor de la variable aleatoria X_i (porcentaje de defectuosos)	*$P(X_i)$ P(suceso)*	*$X_iP(X_i)$*	*Desviaciones cuadradas respecto de la media de 3.8; $[X_i - E(X)]^2$*	*Desviaciones cuadradas ponderadas por la probabilidad: $P(X_i) \cdot [X_i - E(X)]^2$*
1	.10	.10	$(2.80)^2 =$ 7.84	.784
2	.15	.30	$(1.80)^2 =$ 3.24	.486
3	.20	.60	$(.80)^2 =$ .64	.128
4	.30	1.20	$(-.20)^2 =$ .04	.012
5	.20	1.00	$(-1.20)^2 =$ 1.44	.288
10	.03	.30	$(-6.20)^2 =$ 38.44	1.153
15	.02	.30	$(-11.20)^2 =$ 125.44	2.509
	1.00	3.80 por ciento		5.360

El porcentaje de defectuosos esperado es 3.80. La varianza de la variable aleatoria es 5.360. La desviación estándar de la variable aleatoria es $\sqrt{5.36} = 2.32$.

3-6. *a.* $P(R \geq 4|0.5, 10) = 0.8281$
$P(R \geq 5|0.5, 10) = 0.6230$
$P(R = 4|0.5, 10) = 0.8281 - 0.6230 = 0.2051$
b. $P(R > 4|0.5, 10) = P(R \geq 5|0.5, 10) = 0.6230$
c. $P(R \geq 4|0.4, 8) = 0.4059$
d. $P(R < 4|0.2, 10) = 1 - P(R \geq 4|0.2, 10) = 1 - 0.1209 = 0.8791$
e. $P(R = 0|0.3, 10) = 1 - P(R \geq 1|0.3, 10) = 1 - 0.9718 = 0.0282$
f. $P(R \geq 5|0.6, 10) = 1 - P(R \geq 6|0.4, 10) = 1 - 0.1662 = 0.8338$

3-7. *a.* $P(R = 0|p = 0.1, n = 20) = 0.1216$
b. $P(R = 1) = 0.2701$
c. $P(R \geq 4) = 0.1330$
d. $P(R > 4) = 0.0432$
e. $P(R = 4) = 0.0898$

3-8. P(cara y A_1) = (0.8)(0.5) = 0.40
P(cara y A_2) = (0.2)(0.9) = 0.18
P(cara) = 0.58
$P(A_1|\text{cara}) = 0.40/0.58 = 0.690$
$P(A_2|\text{cara}) = 0.18/0.58 = 0.310$

Capítulo 4

4-1. *a.* Valor monetario esperado

Suceso	*P(suceso)*	*Acción 1*	*Acción 2*	*Acción 3*
A	.35	1.4	1.05	.70
B	.45	1.8	2.70	2.25
C	.20	.8	1.20	1.60
	VME:	4.0	4.95*	4.55

* Acción óptima

b. Pérdida de oportunidad esperada

Suceso	*Acción 1*	*Acción 2*	*Acción 3*
A	0	.35	.70
B	.90	0	.45
C	.80	.40	0
POE:	1.70	.75*	1.15

* Acción óptima

c.

Suceso	*Valor condicional* en condiciones de certeza
A	4
B	6
C	8

d.

Suceso	*P(suceso)*		*Valor condicional*		*Valor esperado en condiciones de certeza*
A	.35	·	4	=	1.40
B	.45	·	6	=	2.70
C	.20	·	8	=	1.60
				VME:	5.70

e. Valor monetario esperado con certeza 5.70
Valor monetario esperado de la acción óptima 4.95
VEIP (también la POE de la acción óptima) 0.75

4-2. *a.* Como no hay pérdida por las copias que no se vendan, el operador debe pedir por lo menos 14 ejemplares para asegurar que se satisfaga toda la demanda. *b.*

Tabla de valor esperado

			Acciones: Almacenar									
			10		*11*		*12*		*13*		*14*	
	Suceso	*P(suceso)*	*VC*	*VE*	*VC*	*VE*	*VC*	*VE*	*VC*	*VE*	*VC*	*VE*
Demanda	10	.10	2.00	.20	1.70	.17	1.40	.14	1.10	.11	.80	.08
	11	.15	2.00	.30	2.20	.33	1.90	.29	1.60	.24	1.30	.195
	12	.20	2.00	.40	2.20	.44	2.40	.48	2.10	.42	1.80	.36
	13	.25	2.00	.50	2.20	.55	2.40	.60	2.60	.65	2.30	.575
	14	.30	2.00	.60	2.20	.66	2.40	.72	2.60	.78	2.80	.84
	VME:	1.00		2.00		2.15		2.23		2.20		2.050

La mejor acción en condiciones de valor de recuperación cero es "Almacenar 12".

c. 2.23 dólares.

4-3. *a.* **Tabla** de **valor esperado**

		Acciones			
		Introducir		*No introducir*	
Suceso	*P(suceso)*	*VC**	*VE*	*VC*	*VE*
Demanda 30 000	.05	(200 000)	(10 000)	0	0
Demanda 40 000	.10	(100 000)	(10 000)	0	0
Demanda 50 000	.20	0	0	0	0
Demanda 60 000	.30	100 000	30 000	0	0
Demanda 70 000	.35	200 000	70 000	0	0
	1.00	VME:	80 000		0

* Cálculo de VC:

30 000 · $10 - 500 000 = (200 000)
40 000 · $10 - 500 000 = (100 000)
50 000 · $10 - 500 000 = 0
60 000 · $10 - 500 000 = 100 000
70 000 · $10 - 500 000 = 200 000

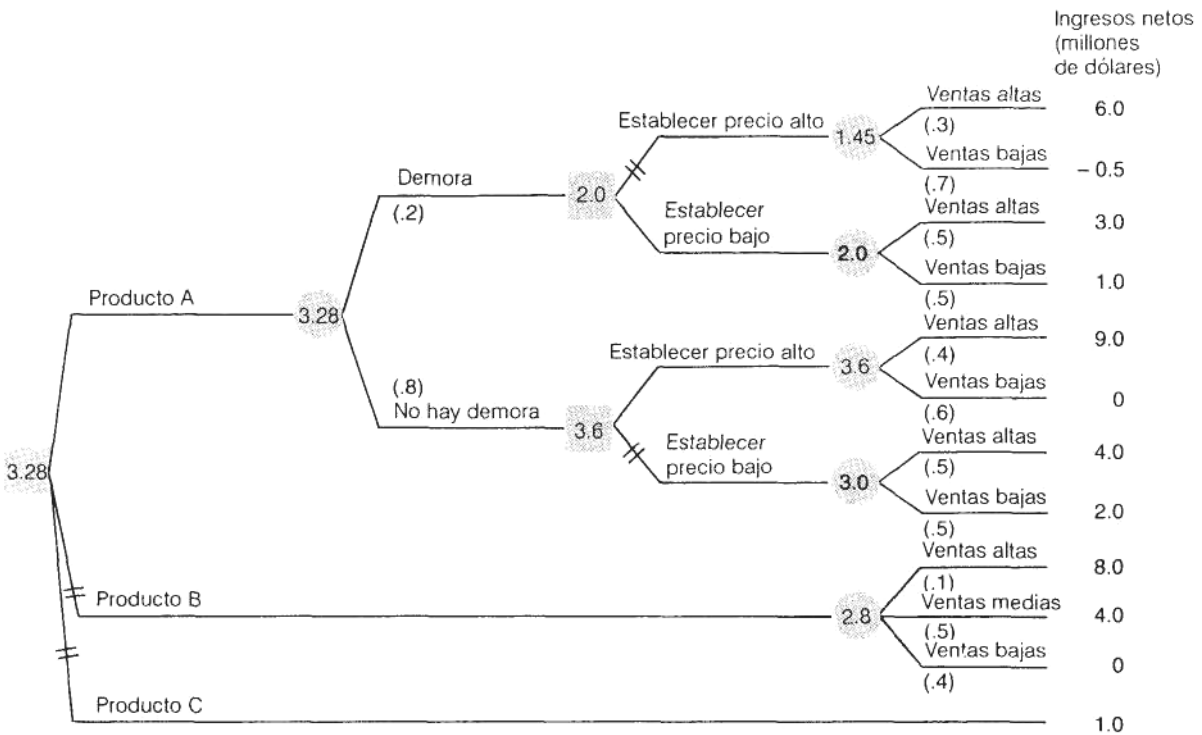
El beneficio esperado es de 80 000 dólares.
La mejor acción es introducir el producto.

b. **Tabla de pérdidas esperadas**

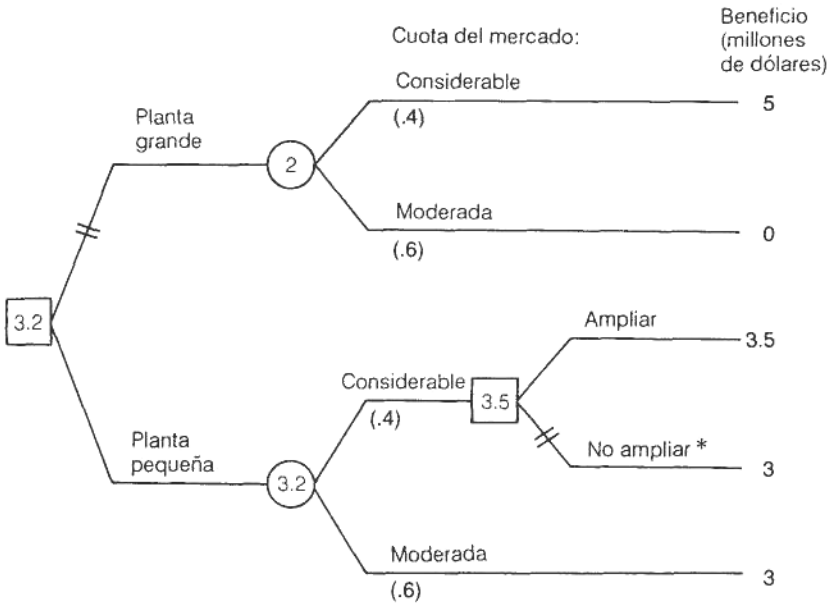
		Acciones			
		Introducir		*No introducir*	
Suceso	*P(suceso)*	*PC*	*PE*	*PC*	*PE*
Demanda 30 000	.05	200 000	10 000	0	0
Demanda 40 000	.10	100 000	10 000	0	0
Demanda 50 000	.20	0	0	0	0
Demanda 60 000	.30	0	0	100 000	30 000
Demanda 70 000	.35	0	0	200 000	70 000
	1.00		20 000		100 000

El VEIP es 20 000; la POE de la mejor acción, c. El VEIP aumentaría de 20 000 a 30 000 y el VE de la mejor acción disminuiría de 80 000 a 60 000. El beneficio en condiciones de certeza sería 90 000 en lugar de 100 000. El VEIP aumenta porque es más seria la pérdida posible esperada que se relaciona con la introducción del producto.

4-4. La estrategia óptima es introducir el producto A; establecer un precio bajo si hay una demora; establecer un precio alto si no hay demora. El beneficio neto esperado es 3.28 millones de dólares. En el diagrama se muestra el desarrollo del árbol.



4-5. *a.*



* Aquí, la suposición es que, si no hay ampliación, la empresa sólo puede mantener una cuota moderada del mercado.

b. La empresa debe construir la planta pequeña y ampliarla si el esfuerzo de promoción obtiene una cuota considerable del mercado. El beneficio neto esperado es 3.2 millones de dólares.

4-6. Usted no vendería si hubiera una probabilidad a priori de 0.4 de que se presentara una recesión. Es decir:

$$0.4(\$0.8 \text{ millones}) + 0.6(\$1.3 \text{ millones}) = \$1.10 \text{ millones}$$

lo cual es mayor que un millón de dólares.

Para modificar la probabilidad a priori: (sea B = aumento en el número de cuentas incobrables)

Estado	*A priori* (p)	$P(B\|p)$	$P(B, p)$	*A posteriori* $P(p\|B)$
Recesión	.4	.8	.32	.64
Normal	.6	.3	.18	.36
			$p(B) = .50$	

Ahora sí sería conveniente vender. Es decir:

$$0.64(\$0.8 \text{ millones}) + 0.36(\$1.3 \text{ millones}) = \$0.98 \text{ millones}$$

lo cual es menor que un millón de dólares.

4-7. La probabilidad del resultado de las pruebas (los dos lanzamiento sin que apareciera un 7 o un 11) es $^5/_9 \cdot {}^5/_9$ si los dados están cargados y $^7/_9 \cdot {}^7/_9$ si no lo están. Llame S al resultado de la prueba y p al estado (cargados o no cargados). Entonces:

Estado (p)	*A priori*	$P(S\|p)$	$P(S, p)$	$P(p\|S)$
Cargados	.7	$\left(\frac{5}{9}\right)^2 = \frac{25}{81}$	$\frac{17.5}{81}$	.54
No cargados	.3	$\left(\frac{7}{9}\right)^2 = \frac{49}{81}$	$\frac{14.7}{81}$	.46
		$P(S) =$	$\frac{32.2}{81}$	

Si los dados están cargados, el resultado esperado por jugada es $\frac{4}{9}(-\$3) + \frac{5}{9}(\$1) = \$-\frac{7}{9}$; de lo contrario, $\frac{2}{9}(-\$3) + \frac{7}{9}(\$1) = \$\frac{1}{9}$

$E(V) = 0.54\left(-\frac{7}{9}\right) + 0.46\left(\frac{1}{9}\right) = -\$0.37$. No juegue.

4-8. La tabla de probabilidades conjuntas es:

Nivel de ventas	*Pronóstico del estudio*			*Probabilidad marginal*
	Éxito	*No concluyente*	*Fracaso*	
Alto	.09	.15	.06	.30
Bajo	.14	.35	.21	.70
Probabilidad marginal	.23	.50	.27	1.00

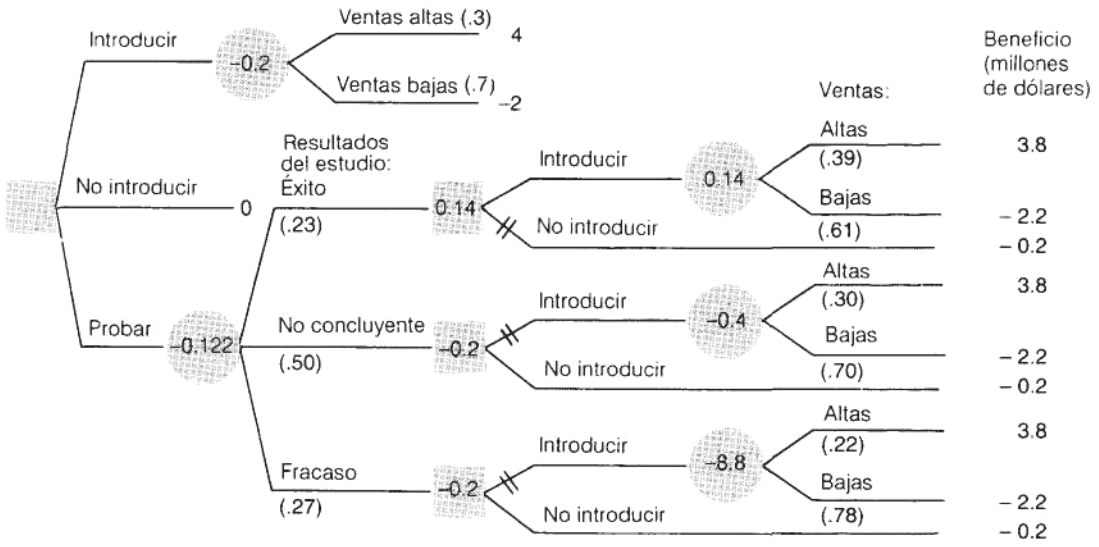
y las probabilidades a posteriori son:

$$P(H|S) = \frac{.09}{.23} = .39 \qquad P(L|S) = .61$$

$$P(H|I) = \frac{.15}{.50} = .30 \qquad P(L|I) = .70$$

$$P(H|F) = \frac{.06}{.27} = .22 \qquad P(L|F) = .78$$

El árbol de decisión es entonces:



No debe efectuarse el estudio, ya que el valor neto es negativo (-0.122). Por lo tanto, el costo del estudio (0.2 millones de dólares) excede el valor esperado (0.2 - 0.122 = 0.078 millones de dólares).

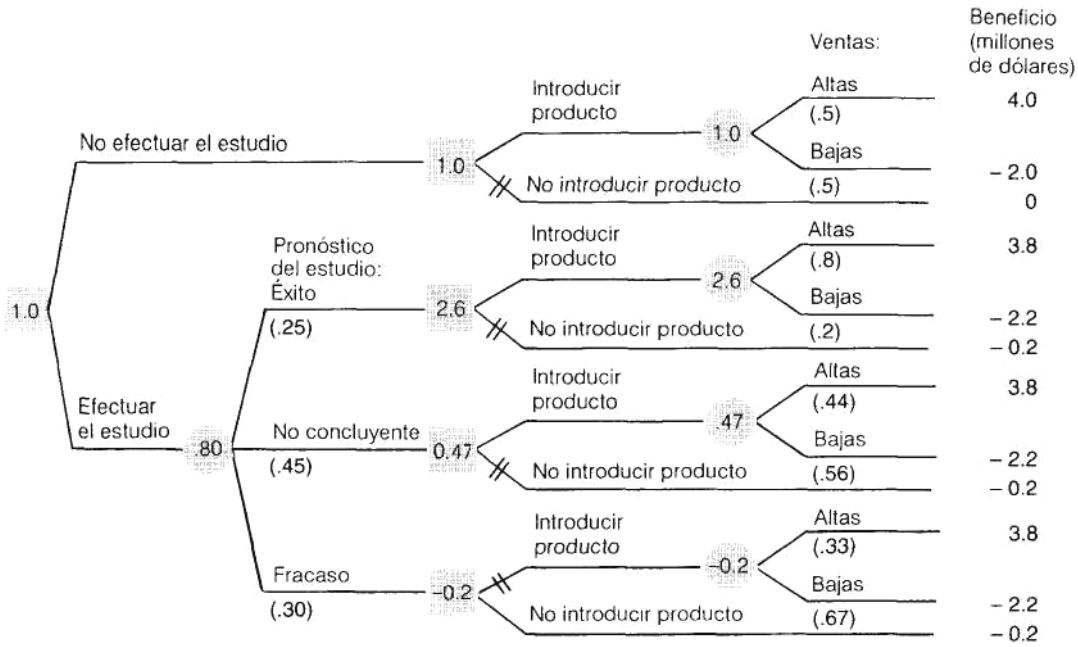
4-9. La tabla de probabilidades conjuntas es:

Nivel potencial de ventas	*Pronóstico del estudio*			*Probabilidad marginal*
	Éxito	*No concluyente*	*Fracaso*	
Alto	0.20	0.20	0.10	0.5
Bajo	0.05	0.25	0.20	0.5
Probabilidad marginal	0.25	0.45	0.30	

Las probabilidades a posteriori son:

$$P(H|S) = .20/.25 = 0.80 \qquad P(L|S) = .05/.25 = 0.20$$
$$P(H|I) = .20/.45 = 0.44 \qquad P(L|I) = .25/.45 = 0.56$$
$$P(H|F) = .10/.30 = 0.33 \qquad P(L|F) = .20/.30 = 0.67$$

El árbol es entonces:



a. Observe la parte superior del árbol. Si no hay estudio se debe introducir el producto. El beneficio esperado es de un millón de dólares.

b. Cero. Como se puede ver, el estudio nunca cambia la decisión de introducir el producto (en el caso del pronóstico de fracaso, las dos acciones tienen el mismo valor esperado). Por ello, el estudio no tiene valor. La compañía desperdiciaría el costo de 0.2 millones de dólares.

Capítulo 5

5-1.

a. La acción d_6, con valor calculado de 3.75.

b. Las acciones d_1, d_4 y d_6, todas con beneficio mínimo de cero.

c. La acción d_5, para la cual el valor es 5 (relacionado con el suceso q_3).

d. La acción d_4, con valor esperado de 3.4.

5-2.

a. Tanto d_4 como d_6 dominan a d_1 por dominación de resultados.

b. La acción d_4 domina a d_3, por dominación de sucesos. Además, d_4 y d_6 dominan a d_1 por dominación de sucesos, pues dominan por resultados.

c. Para investigar la dominación en probabilidad, es necesario acomodar la información como se presenta más adelante. No es necesario considerar las acciones d_1 y d_1, pues ya encontramos que están dominadas por dominación de sucesos o por resultados. Las acciones d_4, d_5 y d_6 dominan a d_2, por dominación en probabilidad. Así mismo, la acción d_4 domina a d_5.

d. Así, las acciones d_4 y d_6 no están dominadas y los criterios de dominación no establecen cómo elegir entre ellas.

Beneficio	Acciones							
	d_2		d_4		d_5		d_6	
X	P(X)	P(X o más)	P(X)	P(X o más)	P(X)	P(X o más)	P(X)	P(X o más)
−4	0	1.0	0	1.0	0	1.0	0	1.0
−3	.2	1.0	0	1.0	0	1.0	0	1.0
−1	0	.8	0	1.0	.2	1.0	0	1.0
0	.2	.8	.2	1.0	0	.8	.4	1.0
2	.4	.6	0	.8	.2	.8	0	.6
3	0	.2	.4	.8	.2	.6	0	.6
5	.2	.2	.2	.4	.4	.4	.6	.6
6	0	0	.2	.2	0	0	0	0

5-3. *a.* El valor esperado de B es $(5 \cdot 0.1 + 6 \cdot 0.5 + 7 \cdot 0.4 = 6.30)$.
Beneficio = $20Q - (10\,000 + QB)$
E(beneficio) $= 20 \cdot 1000 - (10\,000 + 6.30 \cdot 1000)$
$= 20\,000 - 16\,300 = \$3700$

b. Las ventas esperadas son 500 unidades,
E(beneficio) $= 20E(Q) - (10\,000 + E(BQ))$
$= 20 \cdot 500 - (10\,000 + 500 \cdot 6.30)$
$= 10\,000 - 13\,150 = -\$3150$

5-4. El valor esperado de X, $E(X)$, se calcula como:
$(0.10)(50) + (0.3)(100) + \ldots + (0.05)(300) = 150$ Beneficio $= -500 + 5X$
Por lo tanto, E(beneficio) $= -500 + (5)(150) = \$250$

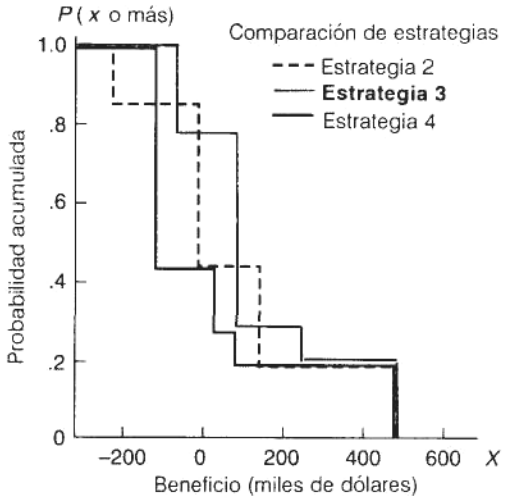
5-5. *a.* Hay cuatro estrategias:
(1) No introducir el producto.
(2) Introducir el producto; si se introduce un producto competitivo, establecer un precio alto (si no hay producto competitivo, establecer también un precio alto).
(3) Introducir el producto; si se introduce un producto competitivo, establecer un precio medio (si no hay competencia, establecer un precio alto).
(4) Introducir el producto; si se introduce un producto competitivo, establecer un precio bajo (fijar un precio alto si no hay competencia).

b. La estrategia 1 tiene probabilidad de 1.0 de obtener beneficio cero. Para las estrategias restantes:

Beneficio (miles de dólares)	Estrategia 2		Estrategia 3		Estrategia 4	
X	P(X)	P(X o más)	P(X)	P(X o más)	P(X)	P(X o más)
-200	.16	1.00	0	1.00	0	1.00
-100	0	.84	0	1.00	.56	1.00
-50	0	.84	.24	1.00	0	.44
0	.40	.84	0	.76	0	.44
50	0	.44	0	.76	.16	.44
100	0	.44	.48	.76	.08	.28
150	.24	.44	0	.28	0	.20
250	0	.20	.08	.28	0	.20
500	.20	.20	.20	.20	.20	.20

c. La estrategia 3 (establecer un precio medio) domina a la estrategia 4 (establecer un precio bajo). Cada uno de los valores de la probabilidad acumulada *P(X* o más) de la tabla es mayor o igual en la estrategia 3. Esto también se puede ver en el gráfico que se presenta a continuación. No hay ninguna otra dominación.

d.



Capítulo 6

6-1. 0.4(5)+ 0.6(12) = 2+ 7.2 = 9.2 6-2. 0.60 = 0.2* + 0.8(50); $\chi = 1.0$

6-3. $\frac{\Delta(u)}{\Delta M} = \frac{1}{500} = .002$

6-4. La mayoría de los sujetos tomarían la lotería, lo cual implica que su utilidad por 12 dólares es mayor que el doble de la de ocho dólares. La utilidad de 12 dólares es 40 o más: $\frac{1}{2}U(12) + \frac{1}{2}U(0) \geq U(8)$. $\frac{1}{2}U(12) \geq 20$. $U(12) \geq 40$.

6-5. $U(A) = 8^{2/3} = 4$.

$U(B) = \frac{1}{2}U(0) + \frac{1}{2}U(64) = \frac{1}{2} \cdot 0^{2/3} + \frac{1}{2} \cdot 64^{2/3} = 0 + \frac{1}{2} \cdot 16 = 8$

Por lo tanto, la alternativa *A* (los ocho dólares seguros) es menos preferible que la lotería.

6-6. *a.* Alternativa 1: No concursar.

$U(\$0) = -170$

Alternativa 2: Concursar

$U(\text{concursar}) = \frac{1}{2}U(-2000) + \frac{1}{2}U(40\,000) = \frac{1}{2}(-780) + \frac{1}{2}(200)$

$-390 + 100 = -290$

$U(\text{concursar}) < U(\$0)$

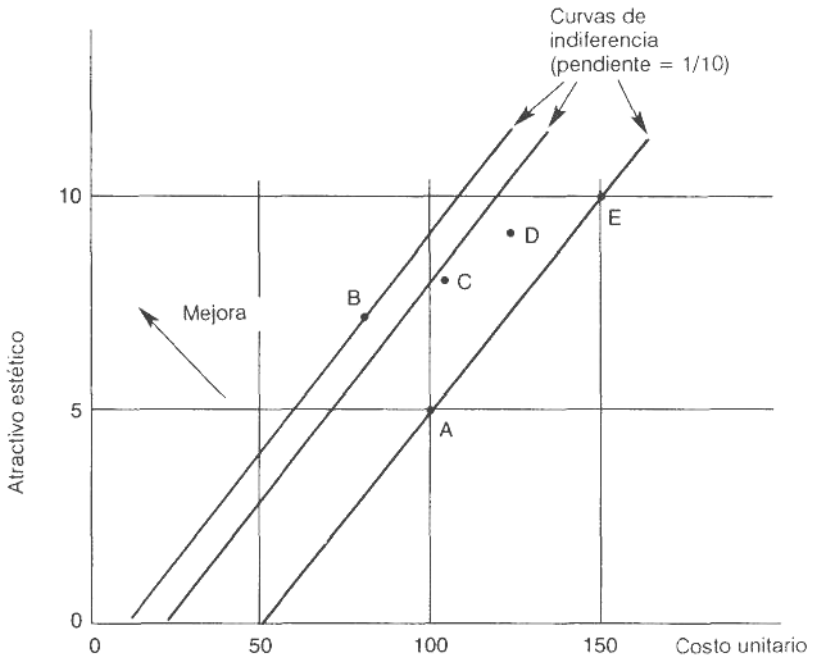
Por lo tanto, no debe concursar.

b. Sea *p* la probabilidad de ganar.

$$\begin{aligned} (1 - p)(-780) + p(200) &= -170 \\ -780 + 780p + 200p &= -170 \\ 980p &= 610 \\ p &= 0.622 \end{aligned}$$

6-7. *a.* La alternativa A tiene resultados inferiores a los de la alternativa B; por lo tanto, B domina a A.

b-c.



La alternativa B tiene la curva de indiferencia más alta, por lo que es la alternativa preferida.

6-8. *a.* No.

b. Para el producto A:

$$U(A) = 0.5(10)^{2/3} + 0.5(20)^{2/3} + 0.5(6)^{1/3} + 0.5(4)^{1/3}$$
$$= 0.5(4.64) + 0.5(7.37) + 0.5(1.82) + 0.5(1.59)$$
$$= 7.71$$

Para el producto B:

$$U(B) = 0.6(5)^{2/3} + 0.4(25)^{2/3} + 0.6(7)^{1/3} + 0.4(5)^{1/3}$$
$$= 0.6(2.92) + 0.4(8.55) + 0.6(1.91) + 0.4(1.71)$$
$$= 7.01$$

Por lo tanto, es preferible el producto A.

Capítulo 7

7-1. *a.* $Z = (15 - 12)/4 = 0.75$; $P(Z \geq 0.75) = 1 - 0.7734 = 0.2266$

b. $Z = (10 - 12)/4 = -0.50$; $P(Z - 0.50) = P(Z \geq 0.50) = 1 - 0.6915 = 0.3085$

c. $P(10 < X \leq 15) = 1 - P(X < 10) - P(X \geq 15) = 1 - 0.3085 - 0.2266 = 0.4649$

d. $Z = (17 - 12)/4 = 1.25$; $P(Z > 1.25) = 1 - 0.8944 = 0.1056$

e. $P(15 < X \leq 17) = P(X > 15) - P(X > 17) = 0.2266 - 0.1056 = 0.1210$

7-2. *a.* De la tabla, $P(Z \leq 1.0) = 0.8413$; por lo tanto, $x = 15 - (1)(3) = 12$

b. $P(X > x) = 1 - P(x \leq X) = 1 - 0.2946 = 0.7054$; $P(Z \leq 0.54) = 0.7054$; por lo tanto, $x = 15 + (0.54)(3) = 16.62$

c. $P(X \geq x) = 1 - P(x \leq X) = 1 - 0.02275 = 0.97725$
$P(Z \leq 2.0) = 0.97725$, de la tabla A; por lo tanto, $x = 15 + 2(3) = 21.0$

7-3. *a.* $D = |X_b - \mu|/\sigma = |80 - 100|/20 = 1.0$. De la tabla B del apéndice, $N(1.0) = 0.08332$, VEIP $= C\sigma N(D) = (2000)(20)(0.08332) = \$3333$

b. $D = |80 - 100|/30 = 0.67$; $N(D) = 0.1503$
VEIP $= (20\,000)(30)(0.1503) = \$90\,180$

7-4. Nota: No se efectúa ningún ajuste en los cálculos para considerar el hecho de que sólo pueden venderse unidades enteras. Con esta interpretación, sería adecuado escribir la probabilidad de las ventas menores que 16 como $P(X \leq 15.5)$.

a. $P(X < 16) = P(Z < 2/3) = 0.2514$

b. $P(15 \leq X \leq 25) = P(-0.83 \leq Z \leq 0.83) = 0.7967 - 0.2033 = 0.5934$

c. $P(X \geq x) = 0.10$. Resuelva para x. $P(Z \geq z) = 0.10$ para $z = 1.28$
$x = 20 + 1.28(6) = 27.7$ o 28 unidades

7-5. *a.* $$\frac{\$1\,750}{4 - 1.50} = 700 \text{ unidades}$$

b. $\$2.50(1\,000 - 700) = \$750$ o. $\$2.50(1\,000) - \$1\,750 = \$750$

c. $$D = \frac{1\,000 - 700}{150} = 2$$
$N(D) = N(2) = .008491$
$$\text{VEIP} = C\sigma_x N(D) = \$2.50 \cdot 150 \cdot .008491 = \$3$$

Capítulo 8

8-1. $$I_0 = \frac{1}{2^2} = .25; \quad I_{\bar{x}} = \frac{n}{\sigma_s^2} = \frac{36}{36} = 1.0$$

$$\bar{\mu}_1 = \frac{\bar{\mu}_0 I_0 + \bar{X} I_{\bar{x}}}{I_0 + I_{\bar{x}}} = \frac{10(.25) + 12(1.0)}{1.25}$$

$$= \frac{14.5}{1.25} = 11.6$$

$$I_1 = I_0 + I_{\bar{x}} = 1.25$$

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{1.25} = .80; \quad \sigma_1 = \sqrt{.80} = 0.9$$

8-2. $\mu_0 = 12;\ \sigma_0 = 2;\ I_0 = .25;\ \bar{X} = 9;\ \sigma_s = 5;\ I_{\bar{x}} = \dfrac{n}{\sigma_p^2} = \dfrac{25}{25} = 1$

cuando se usa σ_s para estimar σ_p.

$$\bar{\mu}_1 = \frac{\frac{12}{4} + \frac{9}{1}}{1.0 + .25} = \frac{12}{1.25} = 9.6$$

$$I_1 = .25 + 1 = 1.25$$

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{I_1} = \frac{1}{1.25} = .80;\ \sigma_1 = \sqrt{.80} \approx .9$$

$$Z = \frac{10 - 9.6}{.9} = \frac{.4}{.9} = .44$$

De la tabla normal, la probabilidad de que el saldo promedio sea menor de 10 dólares es 0.67.

8-3. *a.* $\bar{\mu}_0 = 4.0;\ \sigma_0 = 1.5;\ I_0 = \dfrac{1}{2.25} = .4444$

$$\bar{X} = 3.6;\ \sigma_s = 2.4;\ I_{\bar{x}} = \frac{1}{0.16} = 6.25;\ \sigma_{\bar{x}} = \frac{2.4}{\sqrt{36}} = 0.4$$

$$I_1 = 6.69$$

$$\bar{\mu}_1 = \frac{(.4444)4.0 + (6.25)(3.6)}{6.69} = \frac{24.27}{6.69} = 3.63$$

$$\sigma_1^2 = \frac{1}{6.69} = .150;\ \sigma_0 = .38$$

Distribución normal con media de 3.63 cajas y desviación estándar de 0.38 cajas.

b. μ_b es el punto de equilibrio; $1 \cdot 5000 \cdot 12 \text{ meses} \cdot \mu_b = 200\,000$

$$\mu_b = \frac{200{,}000}{60{,}000} = 3.33$$

La decisión a posterior! debe ser continuar, ya que $\bar{\mu}_1 > \mu_b$.

$$D = \left|\frac{3.63 - 3.33}{.38}\right| = .79;\ N(.79) = .1223$$

VEIP = (60 000)(0.38)0.1223 = $2800

8-4. VEIP = (100)(10)(0.1978) = $197.80

donde $C = 100;\ \sigma_0 = 10;\ D = \dfrac{|20 - 15|}{10} = .5;$

y $N(0.5) = 0.1978$

b y *c*.

Tamaño de la muestra n	$\sigma_{\bar{x}} = \frac{\sigma_p}{\sqrt{n}} = \frac{20}{\sqrt{n}}$	σ^*	D^*	$N(D^*)$	*VEIM*	*Costo de la muestra*	*GNE*
10	6.32	8.46	.590	.1714	109	30	79
25	4.0	9.30	.537	.1866	173	60	113
50	2.83	9.65	.518	.1923	186	110	76

La mejor de las tres opciones es $n = 25$.

8-5. *a*. $\bar{\mu}_0 = 4.0$; $\sigma_0 = 1.5$; $\sigma_x = 2.5$; $n = 36$; $\sigma_{\bar{x}} = \frac{2.5}{6} = .4167$

$$\sigma^* = \sqrt{\sigma_0^2 \frac{\sigma_0^2}{\sigma_0^2 + \sigma_{\bar{x}}^2}} = \sqrt{\left(1.5^2 \frac{1.5^2}{1.5^2 + (.4167)^2}\right)} = \sqrt{2.25 \frac{2.25}{2.42}} = \sqrt{2.07} = 1.44$$

$$D^* = \left|\frac{\bar{\mu}_0 - \mu_b}{\sigma^*}\right| = \left|\frac{4.0 - 3.33}{1.44}\right| = .465$$

$N(D^*) = N(0.465) = 0.209$; VEIM = (60 000) (1.44) (0.209) = $18 000
b. Costo de la muestra = $3500 + 100/1 = 3500 + 100(36) = $7100
GNE = $18 000-$7100 = $10 900
Sí, hay que tomar la muestra.

c y *d.*

n	$\sigma_{\bar{x}}$	σ^*	*VEIM*	*COSTO*	*GNE*
36	.4167	1.44	$18 000	$7 100	$10 900
50	.354	1.46	18 500	8 500	10 000
75	.288	1.465	18 700	11 000	7 700

e. Con base en estos tres casos, el menor *(n* = 36) es el mejor.

Capítulo 9

9-1.

		Jugador 2 *H*	*T*
Jugador 1	*H*	1	−1
	T	−1	1

Los jugadores tienen funciones de utilidad lineales para el dinero, por lo menos para el intervalo relevante.

9-2. No. La estrategia minimax sería seleccionar caras al azar la mitad del tiempo y cruces la otra mitad, η centavos.

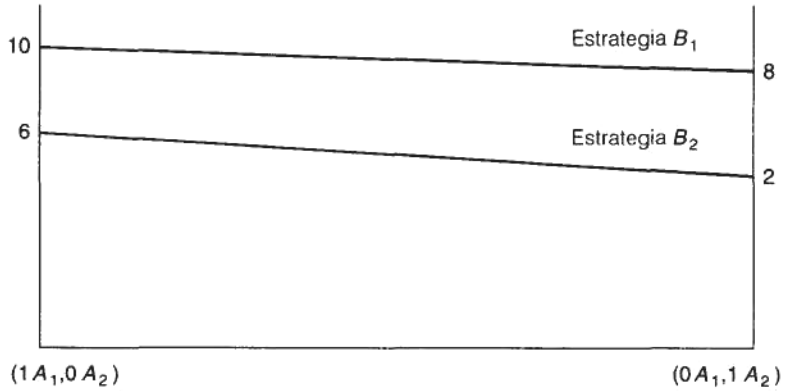
9-3. *a.* A seguirá la estrategia A_1, pues ésta le ofrece más que A_2, sin importar cuál sea la

9-4. estrategia de B.

b. B seguirá la estrategia B_2, ya que con ella perderá menos.

c. El valor del juego para A es 6; para B es -6.

d.



9-5. *a.* El jugador A elegirá A_2, pues domina a A_1.

b. El jugador B escogerá B_2, ya que domina a B_1.

c. Una solución de tres para B y cinco para A.

Capítulo 10

10-1. Sea:

X_1 = Número de unidades producidas del producto A
X_2 = Número de unidades producidas del producto B
X_3 = Número de unidades producidas del producto C
X_4 = Número de unidades producidas del producto D

Maximizar $P = 40X_1 + 24X_2 + 36X_3 + 23X_4$
Sujeto a: $2X_1 + 1X_2 + 2.5X_3 + 5X_4 \leq 120$ (restricción de fresado)
$1X_1 + 3X_2 + 2.5X_3 + 0X_4 \leq 160$ (restricción de montaje)
$10X_1 + 5X_2 + 2X_3 + 12X_4 \leq 1000$ (restricción de inventario en proceso)
$X_1 \leq 20$ (demanda del producto A)
$X_3 \leq 16$ (demanda del producto C)
$X_4 \geq 10$ (requisitos de contrato para el producto D)
Toda $X_i \geq 0$
Solución: $X_1 = 10$; $X_2 = 50$; $X_3 = 0$; $X_4 = 10$; $P = 1830$

10-2. Sea:

X_1 = Fondos en préstamos personales
X_2 = Fondos en préstamos para muebles
X_3 = Fondos en préstamos para automóviles
X_4 = Fondos de segunda hipoteca de casa
X_5 = Fondos de primera hipoteca de casa

Maximizar: $P = 0.15X_1 + 0.12X_2 + 0.09X_3 + 0.10X_4 + 0.07X_5$
Sujeto a: $X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5 \leq 1.5$ (fondos totales disponibles)
$X_1 \leq 0.10(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5)$ o
$0.9X_1 - 0.1X_2 - 0.1X_3 - 0.1X_4 - 0.1X_5 \leq 0$
$X_1 + X_2 \leq 0.20(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5)$ o
$0.8X_1 + 0.8X_2 - 0.2X_3 - 0.2X_4 - 0.2X_5 \leq 0$
$X_5 \geq 0.40(X_4 + X_5)$ o $-0.4X_4 + 0.6X_5 \geq 0$
$X_5 \geq 0.20(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5)$ o
$-0.2X_1 - 0.2X_2 - 0.2X_3 - 0.2X_4 + 0.8X_5 \geq 0$
$X_4 \leq 0.25(X_1 + X_2 + X_3 + X_4 + X_5)$ o
$-0.25X_1 - 0.25X_2 - 0.25X_3 + 0.75X_4 - 0.25X_5 \leq 0$
Toda $X_i \geq 0$

Solución: $X_1 = 0.15$; $X_2 = 0.15$; $X_3 = 0.525$; $X_4 = 0.375$; $X_5 = 0.30$; $P = 0.146$

10-3. Maximizar: $P = 30A + 30B$
Sujeto a:
$3A + 1B \leq 30\,000$
$A \leq 8000$
$B \leq 12\,000$

10-4. Sea:

$X_1, X_2, \ldots, X_6$ = Número de transformadores producidos cada mes en tiempo normal
$Y_1, Y_2, \ldots, Y_6$ = Número de transformadores producidos cada mes en tiempo extra
$I_1, I_2, \ldots, I_6$ = Número de transformadores en existencias *a] final* de cada mes

Restricciones:
Capacidad:

$X_i \leq 50$ para $i = 1, 2, \ldots, 6$
$Y_i \leq 20$ para $i = 1, 2, \ldots, 6$

Definición de inventario:

$I_1 = 15 + X_1 + Y_1 - 58$ para enero
$I_i = I_{i-1} + X_i + Y_i - \text{Pedidos}_i$ para $i = 2, 3, \ldots, 6$

Inventario final:

$I_6 \geq 5$

Función objetivo:

Minimizar: $18X_1 + 17X_2 + 17X_3 + 18.5X_4 + 19X_5 + 19X_6$
$+ 20Y_1 + 19Y_2 + 19Y_3 + 21Y_4 + 22Y_5 + 22Y_6$
$+ 0.5I_1 + 0.5I_2 + 0.5I_3 + 0.5I_4 + 0.5I_5 + 0.5I_6$

Solución:

Mes	*Producción normal*	*Producción en tiempo extra*	*Inventario*
Enero	43	0	0
Febrero	50	0	14
Marzo	50	11	41
Abril	50	0	22
Mayo	50	0	0
Junio	48	0	5

El costo total es de $5511 (en miles).

Hay una solución básica alternativa que consiste en la producción normal de 50 en enero y sólo cuatro en tiempo extra en marzo, con las modificaciones apropiadas en los inventarios finales de enero (7) y febrero (21).

10-5. Sea:

$X_1 = M^3$ de tierra procesada en la planta 1
$X_2 = M^3$ en la planta 2
$X_3 = M^3$ en la planta 3

Minimizar C = $0.60X_1 + 0.36X_2 + 0.50X_3$

Sujeto a:

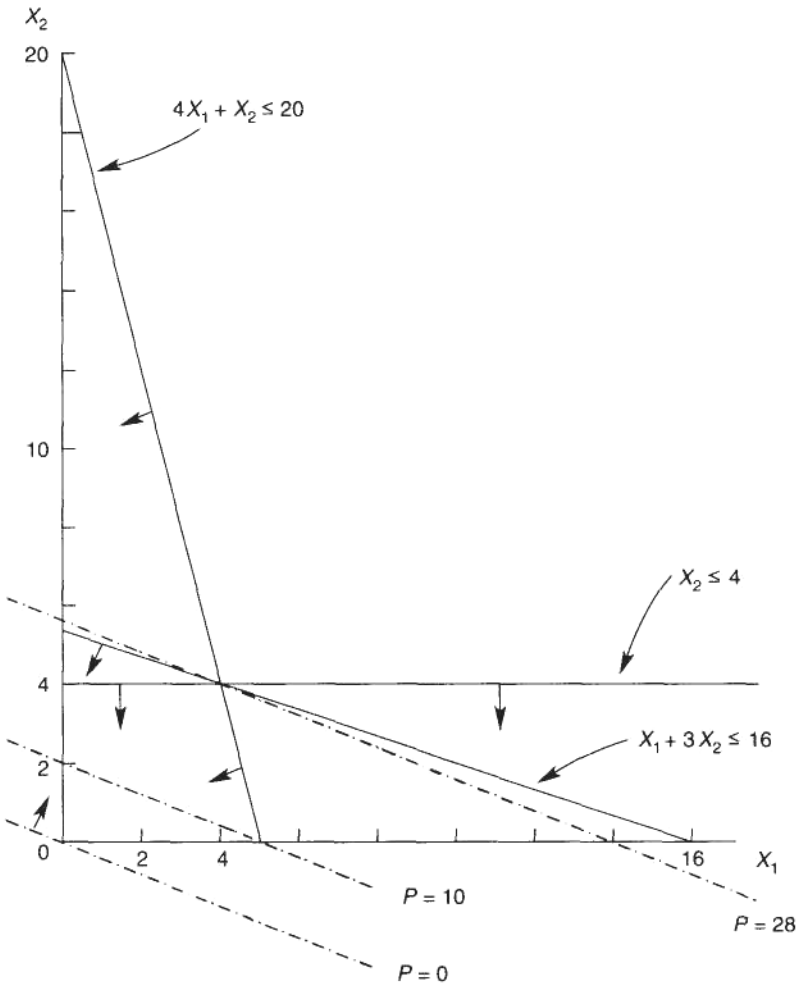
$0.58X_1 + 0.26X_2 + 0.21X_3 = 148\,000$ (restricción de número de gemas)
$0.36X_1 + 0.22X_2 + 0.263X_3 \geq 130\,000$ (restricción de quilates)

$$\left.\begin{array}{l} X_1 \leq 83\,000 \\ X_2 \leq 310\,000 \\ X_3 \leq 190\,000 \end{array}\right\} \text{(restricciones de capacidad)}$$

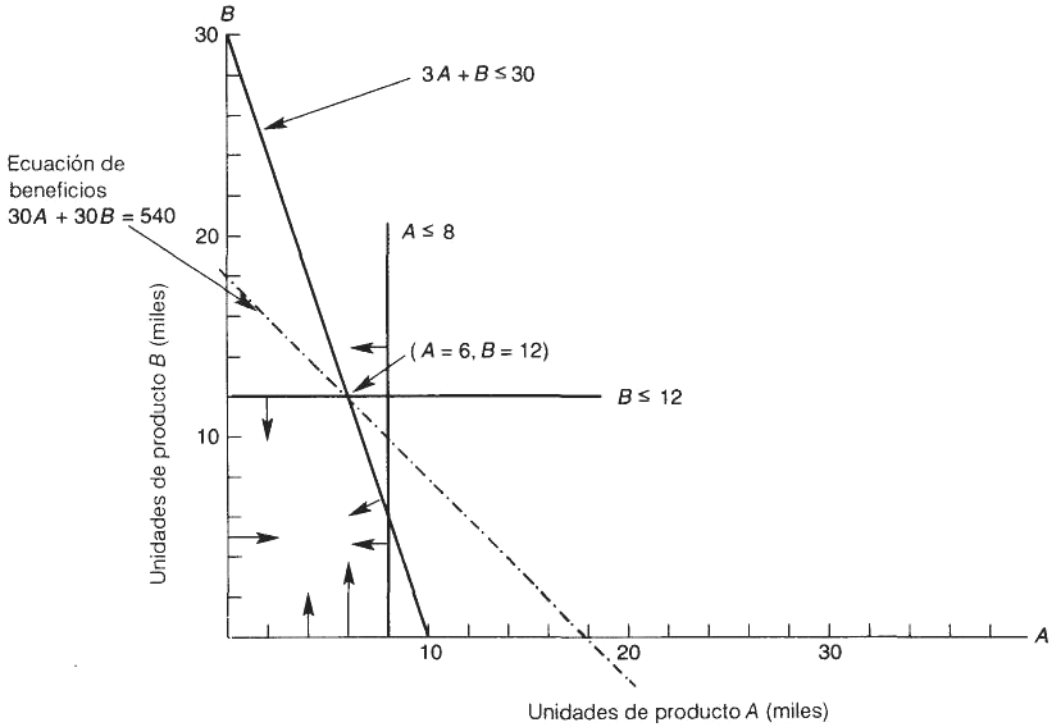
Solución: $X_1 = 61\,700$; $X_2 = 310\,000$; $X_3 = 150\,500$
Costo mínimo = C = 223 880 rands

Capítulo 11

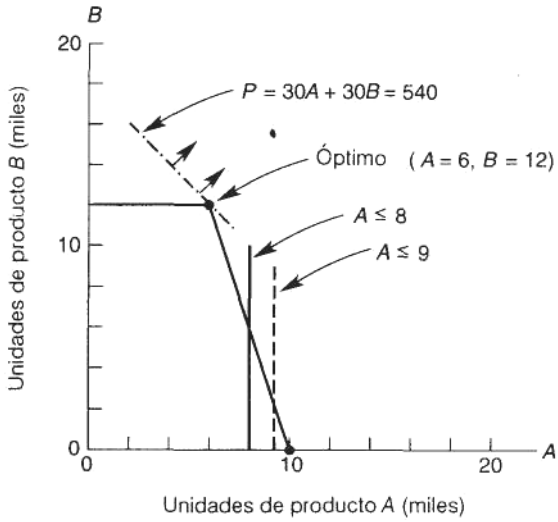
11-1. Véase el gráfico siguiente. La solución es $X_1 = 4$, $X_2 = 4$, y $P = 28$.



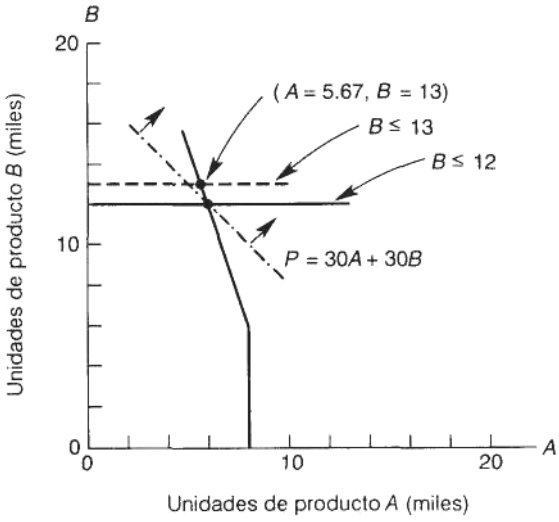
11-2. *a.* Véase el gráfico que se presenta a continuación. La solución óptima es seis mil unidades de producto A y 12 mil unidades de B, con beneficio de 540 000 dólares.



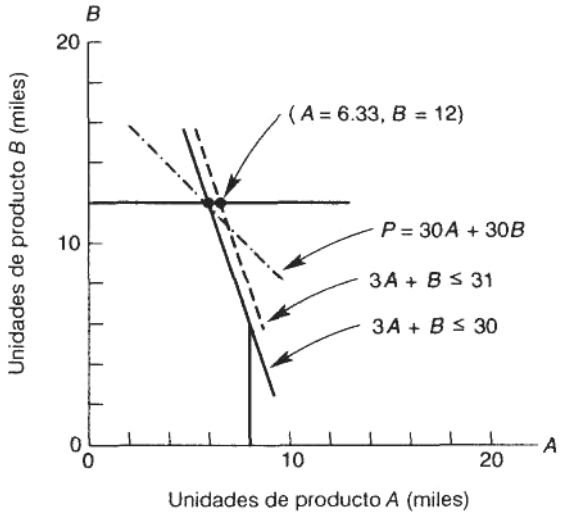
b. Véase el gráfico que se muestra a continuación. Observe que la restricción $A \leq 8$ no es efectiva, ya que $A = 6$ en la solución óptima. Por lo tanto, un aumento en el límite de A no tendrá efecto sobre la solución ni el beneficio. El *precio dual* es cero.



c. Véase el gráfico que se encuentra a continuación. Observe que la solución óptima cambia a $A = 5.67$, $B = 13$, con beneficio de 560 000 dólares. Esto representa un aumento de 20 000 dólares en el beneficio con respecto al caso base ($560 -540 $20). Por lo tanto, el precio dual es $20. Es decir, cada aumento de una unidad en el límite de producción de B aumentará el beneficio en $20.

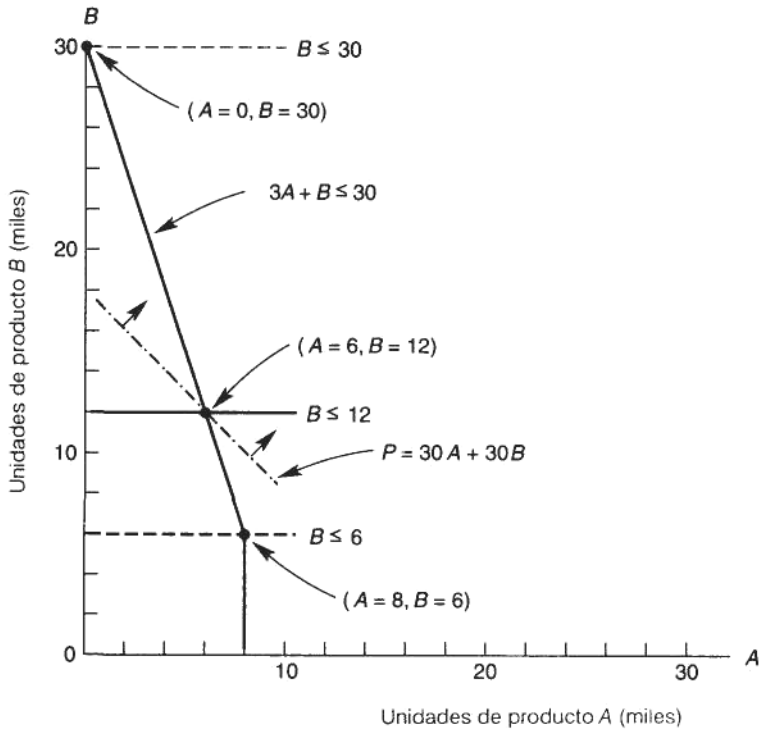


d. Véase el siguiente gráfico. Observe que la solución óptima cambia a $A = 6.33$, $B = 12$, con beneficio $P = \$550$. Es un aumento de 10 dólares con respecto al caso base. Por lo tanto, el precio dual de las horas de trabajo es 10 dólares.

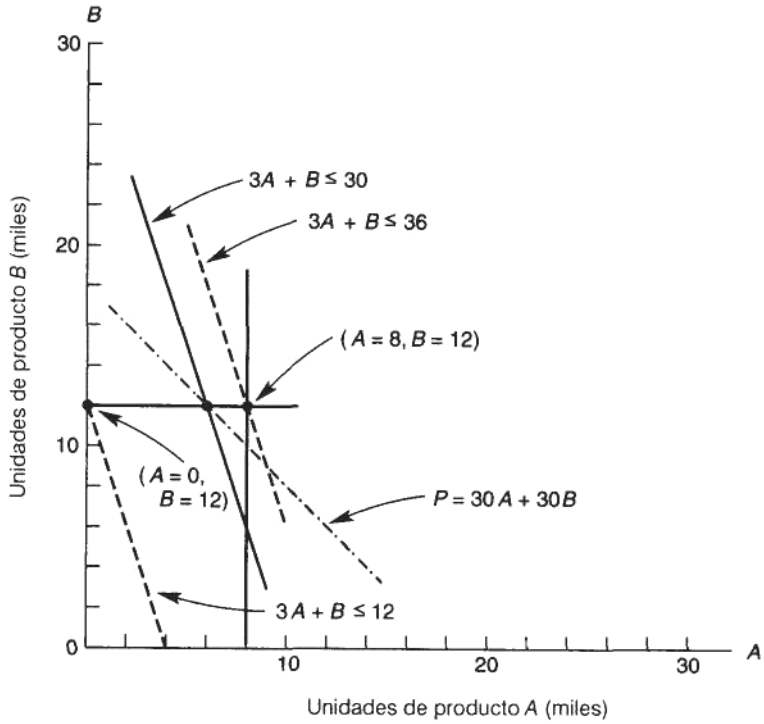


e. Límite de ventas del producto A: Remítase al gráfico de (¿>). El precio dual de esta restricción es cero. Observe que el aumento en el límite del producto A no tendrá ningún efecto; por lo tanto, no hay límite superior. La solución óptima incluye seis mil unidades de producto A. Una reducción en el límite de ventas por debajo de esa cifra sí afectará la solución óptima. Por ello, el intervalo es de seis mil en adelante (sin límite superior) y en este intervalo se mantiene el precio dual de cero.

Límite de ventas del producto B: Remítase al gráfico de la siguiente página. Observe que al producir unidades adicionales de B, el óptimo se traslada hasta el punto *{A* = 0, *B* = 30). Más allá de este punto, no es posible fabricar unidades adicionales de *B,* por las horas de trabajo. Por consiguiente, el límite superior es 30 mil unidades. Al reducir el límite de ventas de *B* hasta seis mil unidades, se llega al vértice *(A* = 8, *B* = 6). La solución cambia al pasar de este punto. Por lo tanto, el límite inferior es seis mil unidades. En resumen, el precio dual de 20 dólares por unidad de B se mantiene en el intervalo de 6000 a 30 000 del límite de ventas del producto B.



Límite de las horas de trabajo: El segundo gráfico de este problema se presenta en la siguiente página. Cuando las horas de trabajo aumentan hasta 36 000 (es decir, hasta la restricción $3A + B$ 36), se alcanza un nuevo vértice $(A = 8, B = 12)$. Al reducir las horas, se llega al vértice $(A = 0, B = 12)$ cuando hay 12 000 horas disponibles. Por lo tanto, el intervalo para las horas de trabajo es de 12 000 a 36 000 horas, en el cual se mantiene el precio dual de 10 dólares.



11-3. En la tabla siguiente se presentan los resultados de LINDO para este problema. PRODA, PRODB, etc., son los nombres de variable para las unidades de producto A, unidades de producto B, etcétera. Véase la formulación del problema en la primera parte de la tabla de los resultados o remítase a la respuesta del problema 10-1.

a. La solución requiere 10 unidades de producto A, 50 unidades de producto B, ninguna unidad de C y 10 unidades de D, con beneficio de 1830 dólares. Observe también que hay 530 dólares de capital de trabajo no utilizado, 10 unidades de demanda no usada de producto A y 16 unidades de demanda no empleada de producto B. Observe que hay seis restricciones en el problema y exactamente seis variables de solución distintas de cero. Vea también que no hay soluciones óptimas alternativas, ya que (1) ninguna de las variables de holgura tiene un valor de solución cero y precio dual cero y (2) PRODC (la única variable de decisión con cero unidades) no tiene costo reducido de cero.

b. Observe los precios duales de las filas 2), 3) y 4). El precio dual de una hora de fresado es 19.20 dólares; para una hora de montaje es 1.60 dólares y el precio dual de capital adicional es cero.

c. Ninguna de estas restricciones es efectiva y, por tanto, los precios duales son cero. La compañía no debe gastar nada para aumentar la demanda de ninguno de los productos.

d. Observe que esta restricción (fila 7) es efectiva, con precio dual de -73 dólares. Un cambio en la restricción para conseguir 13 unidades representa un aumento en el beneficio de tres unidades. Al revisar los intervalos del término independiente se observa que este aumento está dentro del intervalo donde se mantienen los precios duales. Por lo tanto, un cambio en el requisito de contrato de D le *costaría* $3 \cdot 73 = 219$ dólares.

e. Observe que no se produce ninguna unidad del producto C en la solución óptima. El costo reducido es de 16 dólares. Por lo tanío, el beneficio unitario del producto C tendrá que aumentar de 16 a 52 dólares antes de que se produjeran unidades. Por tanto, un aumento de 10 a 46 dólares por unidad no tendría efecto sobre la solución ni sobre el beneficio.

f. El costo de oportunidad del producto E se calcula como sigue:

Recurso	*Unidades requeridas*	*Precio dual*	*Unidad · Precio dual*
Tiempo de fresado	2	19.20	38.40
Tiempo de montaje	5	1.60	8.00
Capital de trabajo	20	0	0
Costo de oportunidad			46.40

Como el beneficio por unidad de 50 dólares es mayor que el costo de oportunidad de 46.60 dólares, hay que producir unidades del producto E.

Resultados de LINDO para el problema 11-3

```
MAX      40 PRODA + 24 PRODB + 36 PRODC + 23 PRODD
SUJETO    A
        2) 2 PRODA + PRODB + 2.5 PRODC + 5 PRODD <=    120
        3) PRODA + 3 PRODB + 2.5 PRODC <= 160
        4) 10 PRODA + 5 PRODB + 2 PRODC + 12 PRODD <=    1000
        5) PRODA <=    20
        6) PRODC <=    16
        7) PRODD >=    10
FIN

SOLUCIÓN ÓPTIMA DE PROGRAMACIÓN LINEAL DETECTADA EN EL PASO 4

        VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

        1) 1830.00000

 VARIABLE           VALOR          COSTO REDUCIDO
    PRODA       10.000000             .000000
    PRODB       50.000000             .000000
    PRODC         .000000           16.000000
    PRODD       10.000000             .000000

      FILA   HOLGURA O EXCEDENTE     PRECIOS DUALES
        2)         .000000           19.200000
        3)         .000000            1.600000
        4)      530.000000             .000000
        5)       10.000000             .000000
        6)       16.000000             .000000
        7)         .000000          -73.000000
```

NÚMERO DE ITERACIONES = 4

INTERVALOS EN LOS CUALES NO VARÍA LA BASE:

INTERVALOS DE COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

VARIABLE	COEFICIENTE ACTUAL	AUMENTO PERMITIDO	REDUCCIÓN PERMITIDA
PRODA	40.000000	8.000000	16.000000
PRODB	24.000000	73.000000	4.000000
PRODC	36.000000	16.000000	INFINITO
PRODD	23.000000	73.000000	INFINITO

INTERVALOS DEL TÉRMINO INDEPENDIENTE

FILA	TÉRMINO INDEPENDIENTE ACTUAL	AUMENTO PERMITIDO	REDUCCIÓN PERMITIDA
2	120.000000	16.666670	16.666670
3	160.000000	50.000000	50.000000
4	1000.000000	INFINITO	530.000000
5	20.000000	INFINITO	10.000000
6	16.000000	INFINITO	16.000000
7	10.000000	3.333333	3.333333

11-4. Los resultados de LINDO se muestran en la tabla adjunta. Las variables se denominan PRESTPERS, PRESTMOB, PRESTAUTO, SEGHIPOTECAy PRIMHIPOTECApara los fondos (en millones de dólares) correspondiente a préstamos personales, préstamos para muebles, etcétera. La formulación se encuentra en los resultados LINDO.

a. La solución requiere 0.15 millones de dólares en préstamos personales, 0.15 millones de dólares en préstamos para muebles, 0.525 millones de dólares en préstamos para automóviles, 0.375 millones de dolares en segundas hipotecas y 0.300 millones de dólares en primeras hipotecas. El rendimiento total es 0.146 millones de dólares.

b. Observe el precio dual de la restricción del total de fondos disponibles (fila 2). Es 0.0975 y corresponde al rendimiento por cada dólar adicional. No hay límite para el aumento y el límite para la reducción es de 1.5 millones (véanse los intervalos del término independiente). Esto significa que el rendimiento incremental es de 0.975 por dólares de cero en adelante, sin límite. Esto puede parecer extraño a primera vista, pero note que todas las restricciones, con excepción de la correspondiente al total de fondos disponibles, son relativas y limitan porcentajes de la cartera. Por consiguiente, una vez que se obtiene la composición óptima, el rendimiento que genera sólo está limitado por el total de fondos disponibles.

c. Observe que no hay límite en el aumento del rendimiento de SEGHIPOTECA (véanse intervalos de los coeficientes de la función objetivo). Por lo tanto, un aumento del 10 al 12% no afectará la solución. Sin embargo, el rendimiento total aumentaría en $0.02 \cdot 0.375 = 0.0075$ millones. Es decir, los 0.375 millones en segundas hipotecas ganarían el 2% más. Como no hay límite para el aumento, un incremento al 14% (o cualquier otro) no afectaría la solución excepto por el aumento en el rendimiento total.

Resultados LINDO para el problema 11-4

```
MAX    0.15 PRESTPERS + 0.12 PRESTMOB + 0.09 PRESTAUTO + 0.1 SEGHIPOTECA
     + 0.07 PRIMHIPOTECA
SUJETO A
       2) PRESTPERS + PRESTMOB + PRESTAUTO + SEGHIPOTECA + PRIMHIPOTECA <=
          1.5
       3) 0.9 PRESTPERS - 0.1 PRESTMOB - 0.1 PRESTAUTO - 0.1 SEGHIPOTECA
          - 0.1 PRIMHIPOTECA <= 0
       4) 0.8 PRESTPERS + 0.8 PRESTMOB - 0.2 PRESTAUTO - 0.2 SEGHIPOTECA
          - 0.2 PRIMHIPOTECA <= 0
       5) - 0.4 SEGHIPOTECA+ 0.6 PRIMHIPOTECA = 0
       6) - 0.2 PRESTPERS - 0.2 PRESTMOB - 0.2 PRESTAUTO -
          0.2 SEGHIPOTECA + 0.8 PRIMHIPOTECA >= 0
       7) - 0.25 PRESTPERS - 0.25 PRESTMOB - 0.25 PRESTAUTO +
          0.75 SEGHIPOTECA - 0.25 PRIMHIPOTECA <= 0
FIN

SOLUCIÓN ÓPTIMA DETECTADA EN EL PASO 5

       VALOR DE LA FUNCIÓN OBJETIVO

       1) .146250000

    VARIABLE          VALOR          COSTO REDUCIDO
   PRESTPERS           .150000           .000000
    PRESTMOB           .150000           .000000
   PRESTAUTO           .525000           .000000
 SEGHIPOTECA           .375000           .000000
PRIMHIPOTECA           .300000           .000000

        FILA   HOLGURA O EXCEDENTE    PRECIOS DUALES
         2)           .000000           .097500
         3)           .000000           .030000
         4)           .000000           .030000
         5)           .030000           .000000
         6)           .000000          -.020000
         7)           .000000           .010000

NÚMERO DE ITERACIONES = 5

INTERVALOS EN LOS CUALES NO CAMBIA LA BASE:

       INTERVALOS DE COEFICIENTES DE LA FUNCIÓN OBJETIVO
  VARIABLE    COEFICIENTE     AUMENTO       REDUCCIÓN
               ACTUAL       PERMITIDO      PERMITIDA
   PRESTPERS    .150000     INFINITO        .030000
    PRESTMOB    .120000      .030000        .030000
   PRESTAUTO    .090000      .010000        .020000
 SEGHIPOTECA    .100000     INFINITO        .010000
PRIMHIPOTECA    .070000      .020000        .487500
```

FILAS	INTERVALOS DEL TÉRMINO INDEPENDIENTE TÉRMINO INDEPENDIENTE ACTUAL	AUMENTO PERMITIDO	REDUCCIÓN PERMITIDA
2	1.500000	INFINITO	1.500000
3	.000000	.150000	.150000
4	.000000	.525000	.150000
5	.000000	.030000	INFINITO
6	.000000	.525000	.050000
7	.000000	.075000	.375000

Capítulo 12

12-1. *a.* Agregue las variables de holgura X_3, X_4 y X_5.

C_j	Variables de solución	Valores de solución	0 X_3	0 X_4	0 X_5	4 X_1	3 X_2
0	X_3	10	1			4	2
0	X_4	8		1		2	8/3
0	X_5	6			1	1	
	Z_j	0	0	0	0	0	0
	$C_j - Z_j$		0	0	0	4	3

b. Entra X_1; sale X_3

c.

C_j	Variables de solución	Valores de solución	0 X_3	0 X_4	0 X_5	4 X_1	3 X_2
4	X_1	2.5	1/4	0	0	1	1/2
0	X_4	3	−1/2	1	0	0	5/3
0	X_5	7/2	−1/4	0	1	0	−1/2
	Z_j	10	1	0	0	4	2
	$C_j - Z_j$		−1	0	0	0	1

d. No óptima.

e. Entra X_2; sale X_4.

f.

C_j	Valores de	Valores de solución	0 X_3	0 X_4	0 X_5	4 X_1	3 X_2
4	X_1	16/10	4/10	−3/10	0	1	0
3	X_2	9/5	−3/10	3/5	0	0	1
0	X_5	44/10	−4/10	3/10	1	0	0
	Z_j	59/5	0.7	3/5	0	4	3
	$C_j - Z_j$		−0.7	−3/5	0	0	0

g. Óptimo: $X_1 = 16/10$; $X_2 = 9/5$; $X_5 = 44/10$; $P = 59/5 = 11.8$

12-2. *a.* La variable de holgura para la restricción de la máquina 1 es X_3. El precio dual es $C_3 - Z_3 = 0.70$ dólares. El intervalo se puede calcular como:

Valores de solución	*Columna* X_3	*Razón*
16/10	4/10	4
9/5	−3/10	− 6
44/10	−4/10	−11

El menor valor positivo (4) determina el límite de la reducción y el menor valor no positivo (-6) el límite del aumento. Por lo tanto, el intervalo es de 6 a 16 horas.

b. La variable de holgura para la máquina 2 es X_4. El precio dual es de 0.60 dólares y el intervalo se puede calcular de la siguiente manera:

Valores de	*Columna* X_4	*Razón*
16/10	−3/10	−5.333
9/5	3/5	3
44/10	3/10	14.667

El menor valor positivo (3) determina el límite de la reducción y el menor valor no posilivo (-5.333) el límite del aumento. Por lo tanto, el intervalo es de 5 a 13.333 horas.

c. La variable de holgura X_s está asociada al límite de ventas del producto A. Es una variable de solución con valor de 4.4 unidades, lo cual indica que la restricción no es efectiva y por lo tanto el precio dual es cero. No hay límite para el aumento y la reducción está limitada por la cantidad de la holgura. Por tanto, el intervalo es de 1.6 unidades en adelante, sin límite.

12-3. *a.*

$C_j - Z_j$	−0.7	−0.6	0	0
Fila X_1	0.4	−0.3	0	1
Razón	−1.75	2.00	—	0

El menor valor positivo (2) determina el aumento y el menor valor no positivo (-1.75) la disminución. Por lo tanto, el intervalo es de 2.25 a 6 dólares.

b.

$C_j - Z_j$	−0.7	−0.6	0	0
Fila X_2	−0.3	0.6	0	1
Razón	2.33	−1.00	—	0

El menor valor positivo (2.33) determina el aumento y el menor valor no positivo (-1.00) determina la reducción. Por lo tanto, el intervalo es de 2 a 5.33 dólares.

12-4.

Recurso	*Horas de utilización*	*Precio dual*	*Horas de utilización*	*Precio dual*
Máquina 1	2	0.70	1.40	
Máquina 2	2	0.60	1.20	
Costo de oportunidad			$2.60	

Como el beneficio unitario de tres dólares es mayor que el costo de oportunidad, hay que producir unidades del nuevo producto.

12-5. *a.* Agregue las variables de excedente X_3 y X_4 *y* las variables artificiales X_5 *y* X_6.

C_j	*Variables de solución*	*Valores de solución*	M X_5	M X_6	6 X_1	4 X_2	0 X_3	0 X_4
M	X_5	12	1	0	3	2	−1	0
M	X_6	4	0	1	½	1	0	−1
	Z_j	$16M$	M	M	$3½M$	$3M$	$-M$	$-M$
	$C_j - Z_j$		0	0	$6 - ½M$	$4 - 3M$	M	M

b. Entra X_1; sale X_5.
c.

C_j	Variables de solución	Valores de solución	M X_5	M X_6	6 X_1	4 X_2	0 X_3	0 X_4
6	X_1	4	1/3	0	1	2/3	−1/3	0
M	X_6	2	−1/6	1	0	2/3	+1/6	−1
	Z_j	$2M + 24$	$2 - M/6$	M	6	$4 + 2M/3$	$-2 + M/6$	$-M$
	$C_j - Z_j$		$7/6M - 2$	0	0	$-2M/3$	$2 - M/6$	M

d. No óptima (tampoco es factible).
b. (repetición) Entra X_2; sale X_6.

(repetición)

C_j	Variables de solución	Valores de solución	M X_5	M X_6	6 X_1	4 X_2	0 X_3	0 X_4
6	X_1	2	1/2	−1	1	0	−1/2	1
4	X_2	3	−1/4	1/2	0	1	+1/4	−1/2
	Z_j	24	2	0	6	4	−2	0
	$C_j - Z_j$		$M - 2$	M	0	0	2	0

Todas las $C_j - Z_j$ son no negativas; por lo tanto hay una solución óptima (mínima): $X_1 = 2$, $X_2 = 3$, y el costo mínimo es 24.

d. La solución es óptima, ya que todos los valores $C_j - Z_j$ son cero o positivos. No hay soluciones óptimas alternativas, ya que todas las variables que están fuera de la base tienen valores $C_j - Z_j$ positivos.

12-6. *a.* X_1 es la variable que entra (mayor $C_j - Z_j$). Sale la variable X_4.
b. La tabla símplex siguiente es:

C_j	Variables de solución	Valores de solución	0 X_4	0 X_5	0 X_6	0 X_7	0 X_8	0.15 X_1	0.12 X_2	0.12 X_3
0.15	X_1	180	1					1		
0	X_5	125		1					1	1
0	X_6	45	−1		1				1	
0	X_7	75				1				1
0	X_8	0					1		−4	1
	Z_j	27	0.15	0	0	0	0	0.15	0	0
	$C_j - Z_j$		−0.15	0	0	0	0	0	0.12	0.12

c.

j	Z_j	$C_j - Z_j$
4	0.03	−0.03
5	0	0
6	0.12	−0.12
7	0	0
8	0	0
1	0.15	0
2	0.12	0
3	0	0.12
Valor de solución:	32.4	

λ^ es la variable que entra..
$X\eta$ es la variable que sale.

d. La solución es óptima ya que todos los valores C_j - Z_j son cero o positivos. No hay soluciones óptimas alternativas, ya que todas las variables que están fuera de la base tienen valores C_j - Z_j negativos.

12-7. *a.* 0.12 dólares por kilogramo; máximo de 5000 kilogramos (utilice la variable X_6).
b. 0.12 dólares por kilogramo; de 0 a 80 000 (use la variable X_7).
c. Sí. Cada kilogramo vale 0.03 dólares (C_4 - Z_4). Este valor es válido en el intervalo +26.25 toneladas por encima de 180. El aumento total en el beneficio es (0.03)(20) = 600 dólares.
d. No hay efecto. No se satisface la demanda actual.
e. No hay límite en el aumento; hay una baja de 0.03 dólares en la reducción.
f. Sí. El costo de oportunidad es 0.50(0.12) + 0.5(0.12) = 0.12. Esto es menor que el beneficio de 0.14 dólares.

Capítulo 13

13-1. Un método posible para llegar a una solución es el siguiente:

Primera Solución

	W_1	W_2	W_3	*Total*
F_1	10			10
F_2	5		15	20
F_3	—	28	2	30
	15	28	17	60

Probemos la ruta F_3W_1 $+ F_3W_3 - F_2W_3 + F_2W_1$

Costo de la ruta directa	
F_3W_1: 1.05	+1.10 − .95 + 1.00 = 1.15

El costo de la ruta directa (1.05 dólares) es menor que el costo de la ruta indirecta (1.15 dólares), por lo cual se debe usar la ruta F_3W_1.

El número máximo de unidades que se pueden desplazar de F_3W_3 a F_3W_1 y de F_2W_1 a F_2W_3 es dos. La nueva tabla de unidades enviadas es ahora:

	W_1	W_2	W_3
F_1	10		
F_2	3		17
F_3	2	28	
	15	28	17

Ahora hay que probar cada una de las casillas con valor de cero.

Ruta directa	*Costo de la ruta directa*	*Costo de la ruta indirecta*
F_1W_2	.95	$+ F_1W_1 - F_3W_1 + F_3W_2$: $.90 - 1.05 + .85 = .70$
F_2W_2	1.40	$F_2W_1 - F_3W_1 + F_3W_2$: $1.00 - 1.05 + .85 = .80$
F_1W_3	1.30	$F_1W_1 - F_2W_1 + F_2W_3$: $.90 - 1.00 + .95 = .85$
F_3W_3	1.10	$F_3W_1 - F_2W_1 + F_2W_3$: $1.05 - 1.00 + .95 = 1.00$

Todas las rutas directas son inferiores a las indirectas, lo cual indica que es una solución óptima. A continuación se presenta un método para llegar a la solución:

13-2.

Primera solución: Unidades

	W_1	W_2	W_3	*Total*
F_1	10		10	20
F_2			15	15
F_3		26	4	30
	10	26	29	65

Prueba de las rutas directas:

Ruta directa	*Costo de la ruta directa*	*Costo de la ruta indirecta*
F_2W_1	1.20	1.05 − 1.20 + 1.10 = .95
F_3W_1	1.10	.95 − 1.20 + 1.10 = .85
F_1W_2	1.12	1.20 − .95 + .90 = 1.15
F_2W_2	1.00	1.05 − .95 + .90 = 1.00

El costo de la ruta directa $F_1 W_2$ es menor que el costo de la ruta indirecta. Por lo tanto, debe utilizarse la ruta directa. El número máximo de unidades que se pueden transferir es 10.

A continuación se presenta la segunda solución:

	W_1	W_2	W_3	*Total*
F_1	10	10		20
F_2			15	15
F_3		16	14	30
	10	26	29	65

Prueba de las rutas no empleadas:

Ruta directa	*Costo de la ruta directa*	*Costo de la ruta indirecta*
F_2W_1	1.20	1.05 − .95 + .90 − 1.12 + 1.10 = .98
F_3W_1	1.10	.90 − 1.12 + 1.10 = .88
F_2W_2	1.00	1.05 − .95 + .90 = 1.00
F_1W_3	1.20	1.12 − .90 + .95 = 1.17

Los costos de las rutas directas son iguales o mayores que los costos de las rutas indirectas, por lo cual se ha llegado a una solución óptima. No sería deseable seguir ninguna de las rutas directas que no se utilizan actualmente. Sin embargo, que hay una solución óptima alternativa con F_2W_2.

13-3. La primera solución es degenerada (10 es la única cantidad que está en una fila y en una columna). Suponga que hay una pequeña cantidad, *d,* en la casilla F_1W_2 y prosiga probando las casillas con valor cero.

Primera solución: Modificada

	W_1	W_2	W_3	*Total*
F_1	10	d		$10 + d$
F_2		20		20
F_3		8	22	30
	10	$28 + d$	22	$60 + d$

Ruta directa	*Costo de la ruta directa*	*Costo de la ruta indirecta*
F_2W_1	.90	$.70 - .85 + .80 = .65$
F_3W_1	1.00	$.60 - .85 + .80 = .55$
F_1W_3	1.45	$.85 - .60 + 1.15 = 1.40$
F_2W_3	1.05	$.70 - .60 + 1.15 = 1.25$

El costo de la ruta directa F_2W_3 es menor que el costo de la ruta indirecta; por lo tanto, hay que usar la ruta F_2W_3. Se pueden transferir 20 unidades.

Segunda solución

	W_1	W_2	W_3	*Total*
F_1	10	d		$10 + d$
F_2			20	20
F_3		28	2	30
	10	$28 + d$	22	$60 + d$

Ruta directa	*Costo de la ruta directa*	*Costo de la ruta indirecta*
F_2W_1	.90	$1.05 - 1.15 + .60 - .85 + .80 = .45$
F_3W_1	1.00	$.60 - .85 + .80 = .55$
F_2W_2	.70	$1.05 - 1.15 + .60 = .50$
F_1W_3	1.45	$.85 - .60 + 1.15 = 1.40$

Prueba de las casillas con valor de cero

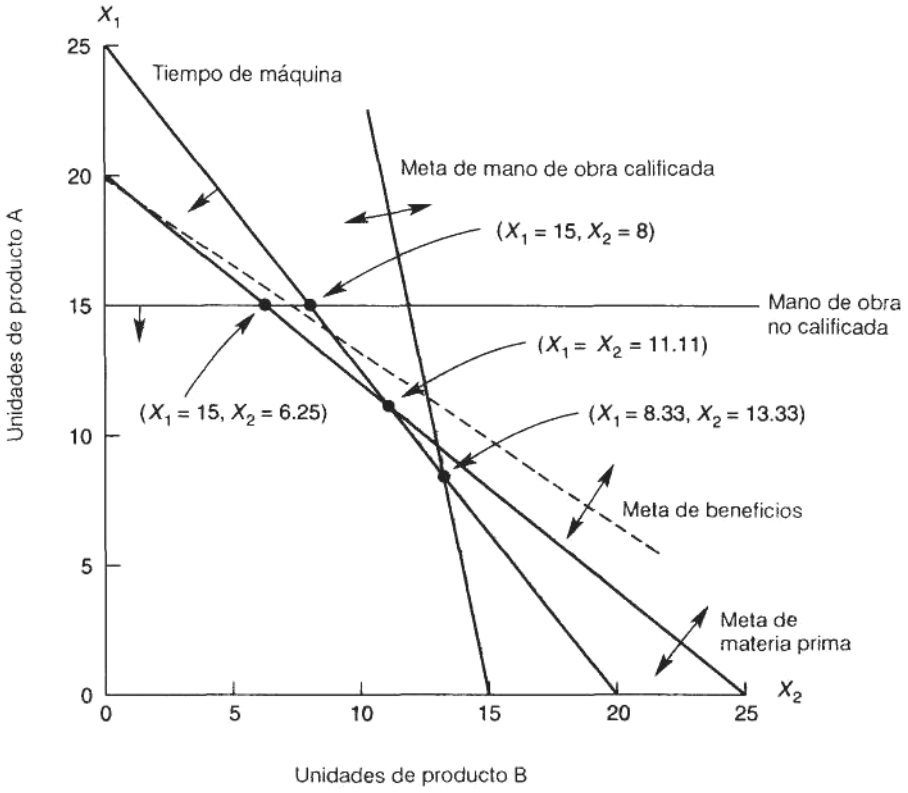
Todos los costos directos son mayores que los costos indirectos; por lo tanto, la segunda solución es óptima.

13-4. *a.* X_1 = Unidades del producto A; X_2 = unidades del producto B;
$2X_1 \leq 30$ (trabajo no calificado); $4X_1 + 5X_2 \leq 100$ (tiempo de máquina)

b. Mano de obra calificada: $X_1 + 5X_2 + U_1 - E_1 = 75$
Materia prima: $5X_1 + 4X_2 + U_2 - E_2 = 100$
Beneficio: $15X_1 + 10X_2 + U_3 - E_3 = 300$

c. Minimizar $5U_1 + 10E_1 - 5U_2 + 15E_2 + U_3 - E_3$

d. Véase el siguiente gráfico.



e. (1) $U_1 = E_1 = E_2 = E_3 = 0$; $U_2 = 5$; $U_3 = 41.7$;
Función objetivo = 16.7
(2) $E_1 = U_2 = E_2 = E_3 = 0$; $U_1 = 8.3$; $U_3 = 22.3$;
Función objetivo = 63.6
(3) $E_1 = U_2 = U_3 = 0$; $U_1 = 20$; $E_2 = 7$; $E_3 = 5$;
Función objetivo = 200
(4) $E_1 = U_2 = E_2 = E_3 = 0$; $U_1 = 28.75$; $U_3 = 12.5$;
Función objetivo = 156.3

la meta de beneficios, pero tiene valor de 25 dólares por devolver cinco unidades de materia prima.

Capítulo 14

14-1. *a.* $Y_{11} + Y_{21} + Y_{31} + Y_{41} + Y_{51} \leq 1$

b. $Y_{21} \leq Y_{31}$; $Y_{22} \leq Y_{31} + Y_{32}$
$Y_{23} \leq Y_{31} + Y_{32} + Y_{33}$

c. $Y_{11} + Y_{21} + Y_{31} + Y_{41} + Y_{51} \geq 1$
$Y_{12} + Y_{22} + Y_{32} + Y_{42} + Y_{52} \geq 1$
$Y_{13} + Y_{23} + Y_{33} + Y_{43} + Y_{53} \geq 1$

d. $Y_{41} + Y_{42} = 1$

e. $Y_{11} + Y_{51} \leq 1$; $Y_{12} + Y_{52} \leq 1$; $Y_{13} + Y_{53} \leq 1$

14-2. *a.* Ramificaciones posibles: $X_2 = 1$ frente a $X_2 = 1$; $X_3 = 0$ frente a $X_3 = 1$
Use la rama $X_3 = 1$

b. Maximizar $2X_1 + X_2 + 3X_4 + 4$. Sujeto a: $3X_1 + 2X_2 + 4X_4 \leq 5$ y $-X_2 \leq -1$ (o $X_2 \geq 1$). La solución es: $X_1 = 0$, $X_2 = X_3 = 1$, $X_4 = 0.75$, $Z = 7.256$. No es entera.

c. No es óptima. Ramificar de nuevo.

a. Ramificaciones posibles: $X_4 = 0$ frente a $X_4 = 1$. Use $X_4 = 1$

b. Maximizar $2X_1 + X_2 + 7$ sujeto a: $3X_1 + 2X_2 \leq 1$ y $-X_2 \leq -1$. No es una solución factible.

c. Aún no es óptima. No se puede continuar por esta rama, ya que no hay una solución factible y, por lo tanto, tampoco una solución entera.

a. Pase a la rama $X_4 = 0$

b. Maximizar $2X_1 + X_2 + 4$ sujeto a: $3X_1 + 2X_2 \leq 5$ y $-X_2 \leq -1$. La solución es $X_1 = X_2 = X_3 = 1$, $X_4 = 0$, $Z = 7$

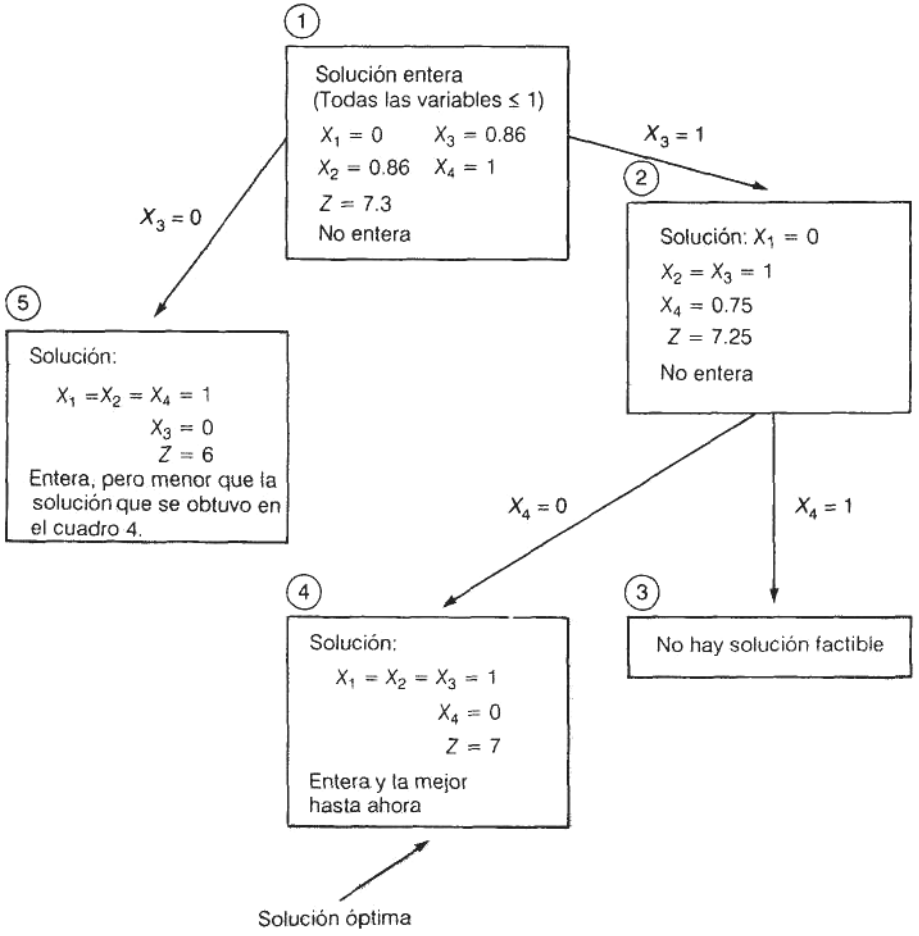
c. Solución entera y la mejor hasta ahora

a. Regrese a la rama $X_3 = 0$

b. Maximizar $2X_1 + X_2 + 3X_4$ sujeto a: $3X_1 + 2X_2 + 4X_4 \leq 10$ y $-X_2 \leq 0$ (o $X_2 \leq 0$). La solución es $X_1 = X_2 = X_4 = 1$, $X_3 = 0$, $Z = 6$. Es entera, pero no es mejor que la solución de apoyo.

c. Fin, ya que se han investigado todas las ramas. La solución óptima es $X_1 = X_2 = X_3 = 1$, $X_4 = 0$, $Z = 7$

A continuación se presenta el árbol para el problema.



14-3. Sean X_1 a X_8 variables binarias con valor 1 si se financia el proyecto y con valor 0 si no se financia. Entonces:

Maximizar: $40X_1 + 10X_2 + 80X_3 + 50X_4 + 20X_5 + 5X_6 + 80X_7 + 100X_8$
Sujeto a: $80X_1 + 15X_2 + 120X_3 + 65X_4 + 20X_5 + 10X_6 + 60X_7 + 100X_8 \leq 320$ (restricción de fondos); $X_7 + X_8 \leq 1$ (no se pueden financiar los proyectos G y H al mismo tiempo); $X_4 \leq X_1$ (no se financia el proyecto D a menos que se financie también A).

La solución requiere la financiación de A, C, E y H.
el valor total es 240 unidades y se utiliza por completo el total de 320 000 dólares de fondos.

14-4. *a.* Sea Y_1 una variable binaria, tal que $Y_1 = 1$ si se usa la máquina de estampado y 0 en caso contrario. Se añade una restricción $K \leq 200Y_1$ y se agrega $-800Y_1$ a la función objetivo.

b. Sea Y_2 una variable binaria, tal que $Y_2 = 1$ si se compran 1000 unidades o más y 0 en caso contrario. Sea R_1 la materia prima que se compra al precio de 25 centavos

y R_2 la materia prima que se compra al precio de 20 centavos. Se agregan las siguientes restricciones: MPUSADA$\leq R_1 + R_2$; $R_2 \geq 1000Y_2$; y $R_2 \leq MY_2$,donde M es un número muy grande. Sume a la función objetivo: $-0.25R_1 - 0.20R_2$. También se podría añadir la restricción $R_1 \leq 1000\ (1 - Y_2)$, pero no es necesario.

c. Sea K_1 el número de KARMA que se venden a 100 dólares, K_2 el número que se vende a 150 dólares y K_3 el número que se vende a 120 dólares. Sea Z_2 una variable binaria con valor de 1 si se producen 20 unidades o menos; Z_2 es también una variable binaria con valor de 1 si la producción está entre 20 y 70 unidades; y Z_3 es una variable binaria con valor de 1 si la producción excede 70 unidades.

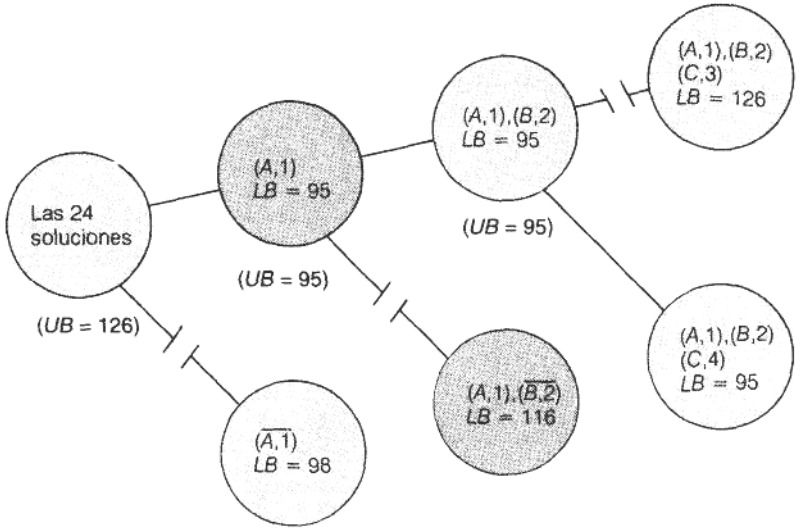
Nuevas restricciones: $K = K_1 + K_2 + K_3$; $K_1 \leq 20Z_1$; $K_2 \leq 50Z_2$; $K_3 \leq 130Z_3$; $K_1 \geq 20Z_2$; $K_2 \geq 50Z_3$; y $Z_1 \geq Z_2$ y $Z_2 \geq Z_3$ (en realidad, la última restricción no es necesaria). Sume a la función objetivo: $100K_1 + 150K_2 + 120K_3$.

d. Sea K_1 una variable binaria que toma un valor de 1 si la campaña se llevará a cabo para ANZA y valor de cero en caso contrario; así mismo, $W_2 = 1$ si la campaña se efectúa para BOZO. Entonces, se agregan las siguientes restricciones: $A \leq 100 + 50W_1$; $B \leq 120 + 50W_2$; $W_1 + W_2 \leq 1$. Sume a la función objetivo: $5000W_1 - 5000W_2$.

14-5. Ramifique como se indica en la siguiente figura (solución completa). Calcule las cotas de dos maneras: Considere primero las plantas no asignadas y calcule la suma de los mínimos de las filas. Por ejemplo, si se asigna 1 a A, los mínimos de las filas son los siguientes:

Fila	*Mínimo de la fila*	
B	17	
C	29	
D	27	
Suma =	73	(no factible)

Solución completa*



* Nota: *LB* = cota inferior, *UB* = cota superior (mejor solución de apoyo)

Después calcule los mínimos de las columnas, considerando los almacenes no asignados. Si existe la asignación A-l, los mínimos de las columnas son:

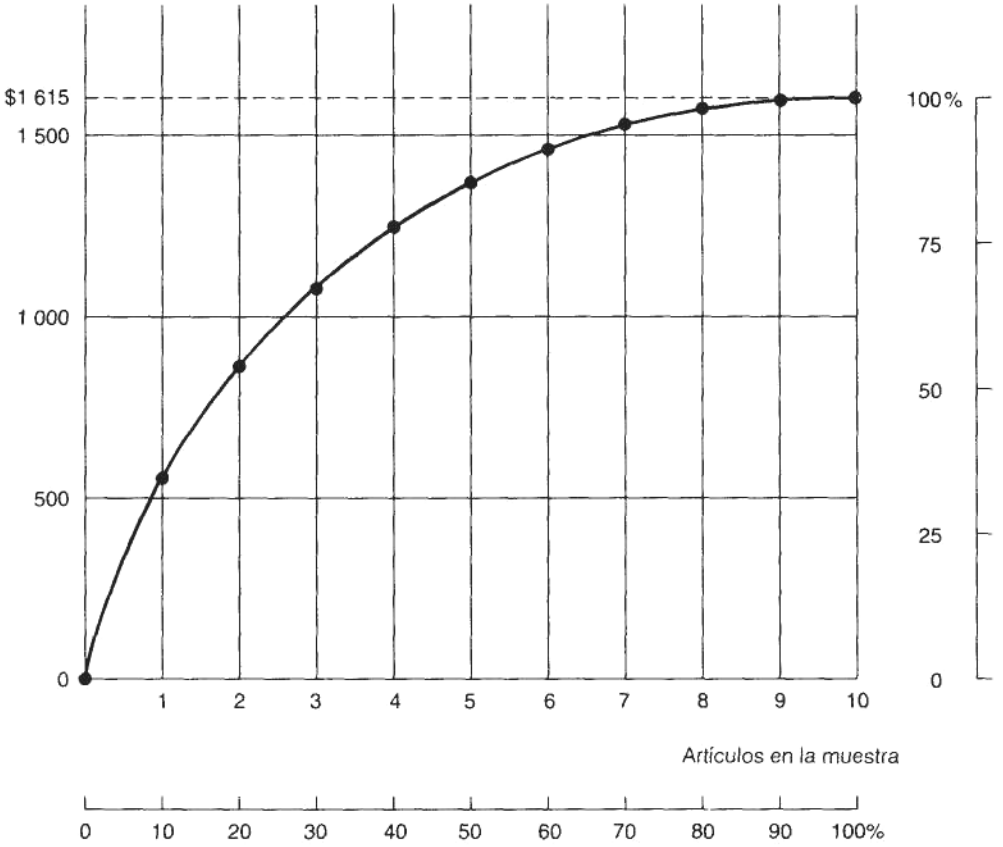
Columna	*Mínimo de la columna*
2	17
3	39
4	29
	Suma = 85 (factible)

Al continuar con este método se obtiene la asignación (A,1), (B,2), (C,4), (D,3) como asignación óptima, con costo de 95.

Capítulo 15

15-1. *a.* Aproximadamente el 7.5%
b. Aproximadamente el 3%
c. Aproximadamente el 95.5%
d. Aproximadamente el 53%

15-2. *a.* Los datos clasificados son: 530, 320, 225, 170, 125, 94, 70, 49, 30, 2. Los datos acumulados son: 530, 850, 1075, 1245, 1370, 1464, 1534, 1583, 1613, 1615. Véase el gráfico de los datos acumulados en la figura adjunta.
Nota: Después de representar los datos totales de ventas acumuladas por 1615 dólares, se puede considerar la escala del lado derecho con 100% y luego dividirla en porcentajes, como se muestra.



b. 4000/20 000 = 20% de los artículos; esto representa 850/1615 = 52.6% de la ventas de la muestra.

c. Alrededor del 85% de las ventas en dólares.

d. En la curva ABC de la muestra, el punto que representa el 50% de las ventas está entre los artículos con ventas de 530 y 320, pero se aproxima más al segundo valor. Por lo tanto, podemos decir que un artículo con ventas superiores a 350 se clasificaría como artículo A. Así mismo, podríamos señalar que en el punto correspondiente al 50% en la escala de artículos, la tasa de ventas es 125 y usar este valor como límite superior para los artículos C, aunque un método más preciso sería promediar los puntos de datos (125, 94) como estimación de la mediana de la tasa de ventas de la muestra; este promedio produce un valor de 109.5 como límite superior para los artículos C. Los artículos B estarían entre los dos valores.

15-3. $Q = \sqrt{\frac{2DK}{k_c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 1\,000 \cdot 6}{30}} = \sqrt{400} = 20$ unidades

15-4. *a.* $Q = \sqrt{\frac{2 \cdot 100\,000 \cdot 60}{3}} = \sqrt{4 \cdot 10^6} = 2\,000$ unidades

b. $Q = \sqrt{\frac{2 \cdot 100\,000 \cdot 60}{3}} = \sqrt{40\,000} = \sqrt{4 \cdot 10^4} = 200$ unidades

Nota: La utilización diaria es 100 000/360 = 277 unidades diarias. ¿Deben pedirse 200, 277 o más?

15-5. *a.* $Q = \sqrt{\frac{2 \cdot 100\,000 \cdot 15}{3}} = \sqrt{1\,000\,000} = 1\,000$ unidades

b. El costo total utilizando el costo original de pedido es, con base en la ecuación 15-1:

$$TC(Q = 2\,000) = \frac{2\,000}{2}(3) + \frac{100\,000}{2\,000}(60) = 3\,000 + 3\,000 = \$6\,000$$

El costo total con el nuevo costo de pedido reducido es:

$$TC(Q = 1\,000) = \frac{1\,000}{2}(3) + \frac{100\,000}{1\,000}(15) = 1\,500 + 1\,500 = \$3.000$$

La reducción en costos es 6000 - 3000 = 3000 dólares; como esta reducción excede el costo de inscripción de 2000 dólares, la compañía debe unirse a la cooperativa y pedir lotes de $Q = 1000$ unidades.

15-6. $$Q = \left(\frac{2DK}{k_c} \cdot \frac{p}{p - D}\right)^{1/2} = \left(\frac{2 \cdot 1\,000 \cdot 4\,000}{28/360} \cdot \frac{14\,000}{14\,000 - 4\,000}\right)^{1/2}$$

$$= \left(\frac{8 \cdot 10^6 \cdot 360}{28} \cdot 1.4\right)^{1/2} = (4 \cdot 36 \cdot 10^6)^{1/2} = 12\,000 \text{ unidades}$$

15-7. Recuerde que en el problema 15-4 se estableció la Q óptima = 20 unidades. Los costos anuales totales para $Q = 20$ son: $TC(Q) = 20) = (20/2)(\$30) + (1000/20)(\$6) = \$300 + \$300 = \$600$

Si los artículos se compran en lotes de 100 se obtendría un ahorro de \$150 - \$148, o dos dólares, por el cambio de precio, que multiplicado por mil unidades representa dos mil dólares al año. Así mismo, el costo de almacenamiento se reduciría, ligeramente, de 0.20(150) = \$30 a 0.20(148) = \$29.60. El costo neto de $Q = 100$ es entonces:

$$TC(Q = 100) = -\$2\,000 + (100/2)(\$29.60) + (\$1\,000/100)(\$6)$$
$$= -\$2\,000 + \$1\,480 + \$60 = -\$460$$

Esto se compara con + \$600 para $TC(Q = 20)$ resultando un cambio neto de 1060 dólares (una mejoría). Por lo tanto hay que aprovechar el cambio en precio.

Capítulo 16

16-1. *a, b.*

$$Q = \sqrt{\frac{2KD}{k_c}} = \sqrt{\frac{2 \cdot 6 \cdot 1\,000}{30}} = 20 \text{ unidades}$$

$$F(R) = 1 - \frac{k_c Q}{k_u D} = 1 - \frac{30(20)}{2(1\,000)}$$

$$= 1 - \frac{600}{2\,000} = .70$$

$Z = 0.52$; $R = \overline{M} + Z\sigma_M = 50 + 0.52 \cdot 10 = 55$ unidades. Pedir 20 unidades cuando haya 55 unidades disponibles.

16-2. *a, b.*

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot 64 \cdot 40\,000}{2}} = \sqrt{64 \cdot 40\,000} = 1\,600$$

$$F(R) = 1 - \frac{k_c Q}{k_u D} = 1 - \frac{2(1\,600)}{10(40\,000)} = 1 - \frac{3\,200}{400\,000} = 1 - .008 = .992$$

$Z = 2.41$; $R = 4000 + 2.41 \cdot 500 = 5205$. Pedir 1600 cuando existan 5205 unidades disponibles.

c. Costo total $(R, Q) = [K + k_u \sigma_M N(Z)]\frac{D}{Q} + [\frac{Q}{2} + (R - \overline{M})]k_c$

$$= [64 + 10 \cdot 500 \cdot .0026] \cdot \frac{40\,000}{1\,600} + [\frac{1\,600}{2} + (5\,205 - 4\,000)] \cdot 2$$

$$= 77 \cdot 25 + [800 + 1\,205] \cdot 2 = 1\,925 + 4\,010 = \$5\,935$$

Como comparación, se pueden calcular los valores óptimos reales de *Q, R y TC.* Comience con los valores aproximados $Q = 1600$ y $R = 5205$ de (a). Utilice la fórmula 16-12 del apéndice del capítulo, observando que $N(Z) = \text{N}(2.41) = 0.0026$:

$$Q = \sqrt{\frac{2 \cdot 40\,000}{2}(64 + 10 \cdot 500 \cdot .0026)} = (40{,}000(64 + 13))^{1/2}$$

$$= (40\,000 \cdot 77)^{1/2} = (3\,080\,000)^{1/2} = 1{,}750$$

$$F(R) = 1 - \frac{2(1\,750)}{10(40\,000)} = 1 - .00875 = .99125$$

$$Z = 2.38;\ N(Z) = .0029$$

$$Q = [40\,000(64 + 5\,000 \cdot .0029)]^{1/2} = (40\,000 \cdot 78.5)^{1/2} = 200(78.5)^{1/2}$$

$$= 200 \cdot 8.8 = 1\,760$$

$$F(R) = 1 - \frac{2(1\,760)}{10(40\,000)} = .9913;\ Z = 2.38 \text{ (igual que arriba)}$$

Así, después de la iteración, los valores reales son $Q = 1760$ y $R = 4000 + (2.38)(500) = 5190$. Entonces, al usar la ecuación 16-5 para el costo total,

$$TC = (78.5) \cdot \frac{40\,000}{1\,760} + \left(\frac{1\,760}{2} + 5\,190 - 4\,000\right) \cdot 2$$
$$= 1\,784 + 4\,140 = \$5\,924.$$ El ahorro es solo de $11.

16-3. $$Q = \sqrt{\frac{2KD}{k_c}} = \sqrt{\frac{2(1000)(1200)}{20}} = 346$$

$$F(R) = 1 - \frac{k_c Q}{k_u D} = 1 - \frac{20(346)}{200(1200)} = .9712$$

De la tabla A, esto corresponde a Z = 1.90
R = media + $Z\sigma$ = 100 + 1.90(40) = 176

16-4. *a.* De la fórmula 16-8, $\frac{Q(1-P)}{\sigma_M} = \frac{200\,(.01)}{30}$

de la tabla B, Z = 1.11, por lo que R = 100 + 1.11(30) = 133.3 o 134

b. En forma análoga, $\frac{200(0.02)}{30} = 0.1333$ de la tabla B, Z = 0.74, por lo que

R = 100 + 0.74(30) = 122.2 o 123

c. De manera análoga, $\frac{200(0.10)}{30} = 0.667$

Esto excede el límite superior de la tabla B (0.3989), lo que significa que $Z = 0$ y R se hace igual a $\bar{M}$ de 100. De hecho se superará el nivel de servicio establecido, debido al tamaño de la cantidad de pedido.

Capítulo 17

17-1.

Ventas	$P(X = x)$	$P(X \geq x)$
0	0.05	1.00
1	0.15	.95
2	0.30	.80
3	0.35	.50
4	0.10	.15
5	0.05	.05
6	0.00	.00

a. $c_o = \$10$; $c_u = \$40$

$$p_c = \frac{c_o}{c_u + c_o} = \frac{10}{40 + 10} = .20$$

Hay que pedir tres unidades: $p_c = 0.20 > 0.15$; $p_c = 0.20 < 0.50$, donde 0.15 es la probabilidad de que la demanda sea de cuatro unidades o más y 0.50 es la probabilidad de que la demanda sea de tres unidades o más.

b. $c_u = \$40 + 20 = \$60$; $c_o = \$10$

$$p_c = \frac{c_o}{c_o + c_u} = \frac{10}{70} = .143$$

Hay que pedir cuatro unidades: $p_c = 0.14 < 0.15$; $p_c\ 0.14 > 0.05$

17-2. Las p_c son probabilidades acumuladas. Primero hay que determinar Z, el número de desviaciones estándar necesarias para alejarse de la media para que la probabilidad de vender la siguiente unidad sea menor o igual a p_c. Segundo, es necesario convertir el número de desviaciones estándar a número de unidades. El tercer paso es sumar o restar el número de unidades a la media. Esta es la cantidad de pedido óptima para cada p_c.

	p_c	Z	σ	$Z\sigma$	$50 \pm Z\sigma$	*(Restar si $p_c > .5$)*
a.	.60	0.25	10	2.5	47.5	
b.	.50	0.00	10	0.0	50.0	
c.	.45	0.12	10	1.2	51.2	
d.	.40	0.25	10	2.5	52.5	
e.	.22	0.77	10	7.7	57.7	
f.	.10	1.28	10	12.8	62.8	
g.	.02	2.05	10	20.5	70.5	

Los valores p_c son las probabilidades de que las ventas sean mayores o iguales que una cantidad crítica. Cuanto más alto sea p_c, menor será la cantidad de pedido óptima.

$$p_c = \frac{c_o}{c_o + c_u};\ c_o = \$50 - 10 = \$40;\ c_u = (\$100 - 70) + 50 = \$80;$$

$$p_c = \frac{40}{40 + 80} = \frac{40}{120} = .33;\ Z = .44 \text{ desviaciones estándar}$$

140 + .44(20) = 140 + 8.8 = 148.8, cantidad óptima de pedido

17-4. 140 + 0.44(50) = 140 + 22 = 162, cantidad óptima de pedido. Observe que el aumento en el tamaño de la cantidad óptima de pedido se debe al aumento en la desviación estándar de la distribución de ventas. Véase el problema 17-5 para otra comparación.

17-5. $$p_c = \frac{c_o}{c_o + c_u} = \frac{40}{40 + 30} = .571$$

a. $Z = 0.18$; 140-0.18(20) = 140-3.6= 136.4

b. 140 - 0.18(50) = 140 - 9 = 131.0

Observe que en este problema, la mayor desviación estándar redujo el tamaño de pedido; en los problemas 17-3 y 17-4, la mayor desviación causó un aumento en el tamaño de pedido. El efecto depende de si $p_c > 0.50$ o $p_c < 0.50$.

Capítulo 18

18-1. *a.* $$L_q = \frac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \frac{10^2}{15 \cdot 5} = 1.33$$

b. $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{1.33}{10} = 0.133$ horas u ocho minutos

c. Tiempo total esperado = W_q · Tiempo de servicio esperado = 8 + 4 = 12 minutos

18-2. *a.* $\mu = 20$; $L_q = \dfrac{\lambda^2}{\mu(\mu - \lambda)} = \dfrac{100}{20 \cdot 10} = 0.5$

b. $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{0.5}{10} = \dfrac{1}{20}$ hora o tres minutos

18-3. Observe que $\lambda = 10$ y $\mu = 15$. La desviación estándar del tiempo de servicio es dos minutos o $2/60$ horas.

De la ecuación 18-9:

$$W_q = \frac{\dfrac{\lambda}{\mu^2} + \lambda\sigma^2}{2\left(1 - \dfrac{\lambda}{\mu}\right)} = \frac{\dfrac{10}{15^2} + 10\left(\dfrac{2}{60}\right)^2}{2(1 - {}^{10}/_{15})}$$

$W_q = 0.0833$ horas

a. $L_q = \lambda W_q = 10(0.0833) = 0.833$ llamadas

b. $W_a = 0.0833$ horas o cinco minutos

c. Utilice la fórmula para W_a, pero con $\sigma = 0$

$W_q = 0.0667$ horas o cuatro minutos (tiempo de espera promedio)

$L_q = 10(0.0667) = 0.667$ llamadas (longitud promedio de la cola)

18-4. $\mu = 15$, $\lambda = 10$, $c = 2$

$$a.\ L_q = \frac{(\lambda/\mu)^{c+1}}{c \cdot c!\left(1 - \dfrac{\lambda/\mu}{c}\right)^2} p_0$$

$$\text{donde } p_0 = \left[\frac{(\lambda/\mu)^c}{c!\left(1 - \dfrac{\lambda/\mu}{c}\right)} + 1 + \frac{\lambda/\mu}{1!} + \frac{(\lambda/\mu)^2}{2!} + \cdots + \frac{(\lambda/\mu)^{c-1}}{(c-1)!}\right]^{-1}$$

$$\text{Aquí } p_0 = \left[\frac{{}^{10}/_{15}{}^2}{2\left(1 - \dfrac{{}^{10}/_{15}}{2}\right)} + 1 + \frac{{}^{10}/_{15}}{1}\right]^{-1} = [{}^1/_3 + 1 + {}^2/_3]^{-1} = {}^1/_2$$

$$\text{y } L_q = \frac{({}^{10}/_{15})^3}{2 \cdot 2\left(1 - \dfrac{{}^{10}/_{15}}{2}\right)^2} \cdot {}^1/_2 = {}^1/_{12}$$

b. $W_q = \dfrac{L_q}{\lambda} = \dfrac{{}^1/_{12}}{10} = {}^1/_{120}$ horas o ½ minuto. Este resultado también se puede obtener interpolando la tabla 18-2. $(\lambda/c\mu) = 0.33$; entonces, de la tabla, $W_q\mu = 0.129$ (por interpolación) de manera que $W_q = 0.129/15 = 0.0086$ horas = ½ minuto.

18-5. *a.* Con $c = 1$; $W_a = 8$ minutos. Hay 24 horas y 10 llamadas por hora (en promedio) = 240 llamadas diarias. Tiempo total de espera = $240 \cdot W_a = 1920$ minutos. Si $c = 2$: $W_a = {}^1/_2$ y el tiempo total de espera = $240 \cdot {}^1/_2 = 120$ minutos. Por lo tanto, se ahorran

1920 - 120 = 1800 minutos de tiempo del cliente. A diez centavos el minuto, esto equivale a 180 dólares diarios. Por lo tanto hay que utilizar el segundo empleado (costo: 50 dólares por día).

b. Costo de equilibrio de la buena voluntad = χ en dólares por minuto; $1800x = \$50$; $x = 50/1800 = 0.028$ o tres centavos por minutos de espera.

c. Se supone que el número esperado de llamadas es el mismo para cada hora.

Capítulo 19

19-1. *a.* El número total demorado para el día siguiente es 6 (un promedio de 0.12 por día).

b. El costo de la espera con tasa de servicio de 2 es $20(0.90)(250) = $4500
El costo de la espera con tasa de servicio 3 es $20(0.12)(250) = $600
Ahorros = $4500 - 600 = $3900 por año (se suponen 250 días de trabajo por año).

19-2. Los resultados dependerán de los números aleatorios que se extraigan. Como se mencionó en el capítulo, el beneficio esperado es 2140 dólares. Se obtiene además un beneficio negativo cuando precio = cuatro dólares y costo = cuatro dólares (sin importar el volumen) y la probabilidad de una pérdida es $0.3 \cdot 0.3 = 0.09$. Así mismo, hay una pérdida si el costo es cuatro dólares, el precio es cinco dólares y el volumen es 3000 o 4000. Probabilidad = $0.3 \cdot 0.5 \cdot 0.6 = 0.09$. Además, si el precio es cuatro dólares y el costo es tres dólares y el volumen es 3000 o 4000. Probabilidad = $0.3 \cdot 0.6 \cdot 0.6 = 0.108$. La probabilidad total es $0.09 + 0.09 + 0.108 = 0.288$.

a. Como el precio más alto está asociado al volumen menor y viceversa, esto indica que los beneficios serán más bajos si se produce un precio más elevado; si el precio es más bajo, los márgenes de beneficio bajos (o márgenes negativos) se multiplicarán por los volúmenes mayores. El efecto general debe ser *reducir* el beneficio esperado.

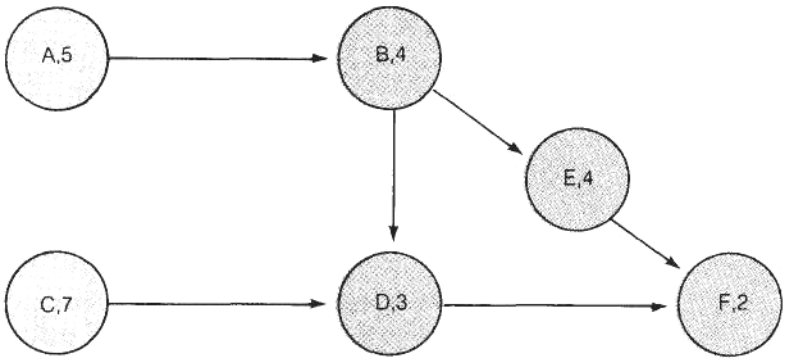
b. Utilice la siguiente tabla:

	Volumen			
Precio	*3 000*	*4 000*	*5 000*	
$4	—	—	0, 1, 2	(números aleatorios)
$5	—	3–6	7	
$6	8, 9	—	—	

c, d y *e* son resultados directos, con base en *(b).* Los resultados dependen de los números aleatorios que se extraigan.

Capítulo 20

20-1. *a.*



b.

Actividad	*ES*	*LS*	*EF*	*LF*
A	0	0	5	5
B	5	5	9	9
C	0	3	7	10
D	9	10	12	13
E	9	9	13	13
F	13	13	15	15

El tiempo de culminación del proyecto es de 15 días.

c. A,B, E, F.

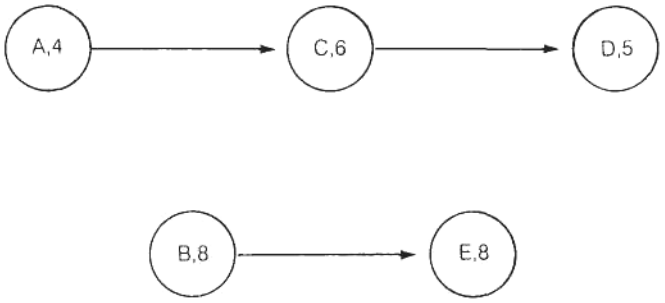
20-2. *a.* No; hay una holgura de tres días en la actividad C.

b. Sí; la ruta crítica es ahora *CDF,* con tiempo de terminación de proyecto de 16 días.

20-3. *a.*

Actividad	t_i	σ_i^2
A	4	0.44
B	8	0.44
C	6	5.44
D	5	1.78
E	8	0.44

b.



La ruta crítica es *BE,* con duración de 16 días.

c. La longitud esperada parala ruta ,4 CD es 15 días y la varianza es 0.44 + **5.44** + **1.78** = 7.67; la desviación estándar es 2.77.
P(tiempo < 16) = 1 - $P(Z < 1/2.77)$ = 0.64
La varianza para la ruta *BE es* 0.44 + 0.44 = 0.89; la desviación estándar es 0.94.
P(tiempo < 16) = 0.50

d. P(proyecto total < 16) = 0.64 · 0.50 = 0.32

Capítulo 21

21-1.

Para la máquina A: $P\left(\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el día } n\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{matrix}\right) = \frac{.6}{.1 + .6} = \frac{.6}{.7} = \frac{6}{7}$ conforme $n \to \infty$

Para la máquina B: $P\left(\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el día } n\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el día 1}\end{matrix}\right) = \frac{.7}{.2 + .7} = \frac{.7}{.9} = \frac{7}{9}$ conforme $n \to \infty$

La máquina A tiene mayor probabilidad de estar ajustada.

21-2. *a.* $p_1 = 0.95, p_2 = 0.05$, por inspección.

b. No, ya que de acuerdo con la matriz de probabilidades, la probabilidad condicional de pagar la cuenta del mes siguiente es la misma (0.95), se pague o no la de este mes.

21-3. *a.*

$$a.\ P\left(\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el per. } n\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el per. 1}\end{matrix}\right) = (.8)P\left(\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el per. } n\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el per. 1}\end{matrix}\right) + (.2)P\left(\begin{matrix}\text{Estado 2}\\ \text{en el per. } n\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el per. 1}\end{matrix}\right)$$
$$+ (.2)\left\{1 - P\left(\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el per. } n\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el per. 1}\end{matrix}\right) - P\left(\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el per. } n\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el per. 1}\end{matrix}\right)\right\}$$

o bien:

$$(1 - .8 + .2)P\left(\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el per. } n\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el per. 1}\end{matrix}\right) + (-.2 + .2)P\left(\begin{matrix}\text{Estado 2}\\ \text{en el per. } n\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el per. 1}\end{matrix}\right) = .2$$

de manera que:

$$P\left(\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el per. } n\end{matrix}\middle|\begin{matrix}\text{Estado 1}\\ \text{en el per. 1}\end{matrix}\right) = \frac{.2}{1 - .8 + .2} = \frac{.2}{.4} = \frac{1}{2} \text{ as n} \to \infty$$

También:

$$P\left(\begin{array}{l}\text{Estado 2}\\ \text{en el per. } n\end{array}\middle|\begin{array}{l}\text{Estado 1}\\ \text{en el per. 1}\end{array}\right) = (.2)P\left(\begin{array}{l}\text{Estado 1}\\ \text{en el per. } n\end{array}\middle|\begin{array}{l}\text{Estado 1}\\ \text{en el per. 1}\end{array}\right) + (.2)\left\{1 - P\left(\begin{array}{l}\text{Estado 1}\\ \text{en el per. 1}\end{array}\middle|\begin{array}{l}\text{Estado 1}\\ \text{en el per. 1}\end{array}\right) - P\left(\begin{array}{l}\text{Estado 2}\\ \text{en el per. } n\end{array}\middle|\begin{array}{l}\text{Estado 1}\\ \text{en el per. 1}\end{array}\right)\right\}$$

o sea:

$$(1 + .2)P\left(\begin{array}{l}\text{Estado 2}\\ \text{en el per. } n\end{array}\middle|\begin{array}{l}\text{Estado 1}\\ \text{en el per. 1}\end{array}\right) = (.2)(1/2) + (.2)\left\{1 - 1/2\right\} = .1 + .1 = .2$$

de manera que:

$$P\left(\begin{array}{l}\text{Estado 2}\\ \text{en el per. } n\end{array}\middle|\begin{array}{l}\text{Estado 1}\\ \text{en el per. 1}\end{array}\right) = \frac{.2}{1.2} = \frac{1}{6} \text{ as } n \to \infty$$

Entonces:

$$P\left(\begin{array}{l}\text{Estado 3}\\ \text{en el per. } n\end{array}\middle|\begin{array}{l}\text{Estado 1}\\ \text{en el per. 1}\end{array}\right) = 1 - \frac{1}{2} - \frac{1}{6} = \frac{1}{3} \text{as } n \to \infty$$

b. El aeropuerto A sería la elección lógica para las instalaciones de mantenimiento, ya que tiene la probabilidad de estado estacionario más alta. La elección del aeropuerto A minimizaría el número de viajes especiales que se requieren para trasladar los automóviles a la instalación de mantenimiento en el instante requerido.

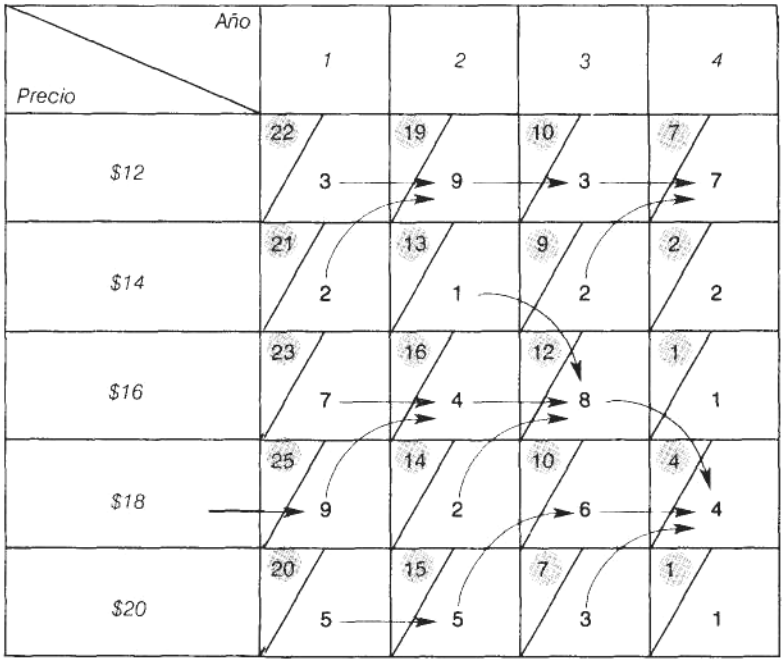
21-4. *a.* A: 0.8(100) + 0.2(100) + 0.2(100) = 120
B: 0.2(100) + 0 + 0.2(100) = 40
C: 0 + 0.8(100) + 0.6(100) = 140

b. A: 0.8(120) + 0.2(40) + 0.2(140) = 132
B: 0.2(120) + 0 + 0.2(140) = 52
C: 0 + 0.8(40) + 0.6(140) = 116

Capítulo 22

22-1. *a.* Estrategia de precio óptima: $P_1 = 18$, $P_2 = 12$, $P_3 = 16$, $P_4 = 12$
Beneficio máximo esperado = 9 + 9 + 8 + 7 = 33

b.



Estrategia de precio óptima: $P_1 = 18$; $P_2 = 16$; $P_3 = 16$; $P_4 = 18$
Beneficio máximo esperado: $9 + 4 + 8 + 4 = 25$

22-2.

a. $P = [200 - 0.2(400)]\cdot(400) = [200 - 80]\cdot(400) = (120)(400) = \$48\,000$

b. $P = 150(1.4)(400) - 30(400) = 84\,000 - 12\,000 = \$72\,000$

c. $P = [200 - 0.2(Y)](Y) + 150(1.4)(400 - Y) - 30(400 - Y)$
$= 200Y - 0.2(Y)^2 + \$84\,000 - 210Y - 12\,000 + 30Y$
$= -0.2(Y)^2 + 20Y + 72\,000$

d. $P_{Y=50} = -0.2(50)^2 + 20(50) + 72\,000 = -0.2(2500) + 1000 + 72\,000$
$= -500 + 1000 + 72\,000 = \$72\,500$

e. $\dfrac{d[\ ]}{dy} = -0.2(2)Y + 20 = 0$; $Y^* = \dfrac{20}{0.4} = 50$

f. $f_9(400) = 180(400) + 500 = 72\,000 + 500 = \$72\,500$

g. $f_9(200) = 180(200) + 500 = 36\,000 + 500 = \$36\,500$

22-3. Formulación: Sea:

X_n = Producción en el periodo n
I_n = Inventario inicial en el periodo n
D_n = Demanda en el periodo n (de la tabla del problema)

La ecuación recursiva general es:

$$f_n(I_n) = \underset{D_n - I_n \le X_n}{\text{mínimo}} \left[\begin{cases} 5 + X_n & \text{if } X_n > 0 \\ 0 & \text{if } X_n = 0 \end{cases} + I_n + f_{n+1}(I_n + X_n - D_n) \right]$$

Los cálculos se pueden efectuar como se hizo en el ejemplo 2 del texto. Hay varias alternativas de programas de producción óptimos, todas con costo de 31 dólares:

	Programación 1	*Programación 2*	*Programación 3*
Enero	3	3	8
Febrero	5	10	0
Marzo	5	0	5
Abril	0	0	0

22-4.

a. 10(0.2) + 9(0.4) + 8(0.4) = 2 + 3.6 +3.2 = 8.8

b. Actuar si la mejor calificación del día 4 es 9 o 10*; esperar* si la mejor calificación del día 4 es 8.

c. 10(0.2) + 9(0.4) + 8.8(0.4) = 2 + 3.6 + 3.52 = 9.12

d. Actuar si la mejor calificación del día 3 es 10*;esperar* si la mejor calificación del día 3 es 8 o 9

22-5.

a. $f_5(X_5) = X_5$

b.

$$f_4(X_4) = \text{Máx.}\ \{\underbrace{X_4}_{\textit{Actuar}},\ \underbrace{10(.2) + 9(.4) + 8.8(.4)}_{\textit{Esperar}}\}$$

c. X_{4b} = 10(0.2) + 9(0.4) + 8(0.4) = 8.8. *Actuar* si la mejor calificación del día 4 es mayor que 8.8;*esperar* si es menor que 8.8.

d.

$$f_3(X_3) = \text{Máx.}\ \{\underbrace{X_3}_{\textit{Actuar}},\ \underbrace{10(.2) + 9(.4) + 8.8(.4)}_{\textit{Esperar}}\}$$

e. $X_{3b} = 10(.2) + 9(.4) + 8.8(.4) = 9.12$

$$f_2(X_2) = \text{Máx.}\ \{\underbrace{X_2}_{\textit{Actuar}},\ \underbrace{10(.2) + 9.12(.4) + 9.12(.4)}_{\textit{Esperar}}\}$$

$$X_{2b} = 10(.2) + 9.12(.4) + 9.12(.4) = 9.296$$

$$f_1(X_1) = \text{Máx.}\ \{\underbrace{X_1}_{\textit{Actuar}},\ \underbrace{10(.2) + 9.296(.4) + 9.296(.4)}_{\textit{Esperar}}\}$$
$$= \text{Máx.}\ \{X_1,\ 9.4368\}$$

X_{1b} = 9.4368. La regla de decisión óptima en el día 1 es: Actuar si X_i > 9.4368; esperar si X< 9.4368./, (9) = 9.4368. Si la mejor calificación del día 1 es 9, el gerente debe esperar.

f.

$$f_2(X_2) = \text{Máx.}\ \{\underbrace{X_2}_{\textit{Actuar}},\ \underbrace{10(.2) + 9.12(.4) + 9.12(.4)}_{\textit{Esperar}}\}$$

$$= \text{Máx.}\ \{\underbrace{X_2}_{\textit{Actuar}},\ \underbrace{9.296}_{\textit{Esperar}}\}$$

El gerente puede obtener una calificación esperada de 9.296 si cuenta con la oportunidad de tres días de pruebas, por lo que la oferta no sirve.

Índice de materias

A

abandono, estrategia de, 149
ABC, análisis, 478-482
  precauciones al respecto, 481
abstracción y simplificación, 4-5
acotamiento, procedimiento de, 454
alternativa dominada, 181
alternativas, selección de, 3
análisis
    a corto plazo, 617-622
    conjunto, 183
    "qué pasa si...", 32
araña, diagrama de, 32
  ejemplo, 33
árbol, diagrama de, 58, 441
aserradero, ejemplo de modelo de un, 18-24
  análisis, 22-24
  de sensibilidad, 33
  diagrama de influencias, 23
  implantación en un computador, 23-27
atributos, 180

B

Baker, K. R., 12
base, 321
Bass, F. M., 285 η
Baumol, W. J., 282
Bayes, teorema de, 64
Behn, R. D., 115
Bellman, R. E., 643 n, 663
beneficios, definición, 19
Bernoulli, proceso de, 70, 75 η
Bierman, H., 34 η
Blake, I. R, 76
Bodily, S., 12,35
Bonini, Charles R. 12, 18 n, 35, 76, 115, 238, 587
Borland International, 326 η
Boulden, J. B., 587
Bradley, S. P., 115,282,459
Bratley, R, 587
Brown, R. G., 115,492,501 η
Buffa, E. S., 12,492
Bunn, DerekW., 115, 147 n, 156, 190

C

cantidad económica de pedido (fórmula CEP), 481-485
capacidad
    problema de expansión de la, 435-437
    restricciones de, 280
carencias, costo de las, 519, 525
casetas de cobro, determinación del número óptimo de, 532
celda, 23
Cinlar, E., 633
Cleland.D. I., 610
coeficientes de sustitución, 354
colas
    a la izquierda y a la derecha, 203
    de espera, teoría de; *véase* colas,
      teoría de modelos de, 11
        con varios puntos de servicio, 542-547
        con un solo punto de servicio, 535-539
        matemáticos, 533-535
colas, teoría de, 532-550
  comportamiento del sistema, 539-540
  distribución exponencial, 550
  elementos de la situación de colas, 533-535
  instalaciones agrupadas, 547-549

obtención de la fórmula básica, 552-554
simulación de un sistema sencillo de colas, 560, 578-584
tiempos de servicio
constantes, 541-542
generales de servicio, 540-541
combinatorio,
problema, 274, 453
restricciones de, 280
compensaciones, 414
entre tiempo y costo, 599-603
computadores
celda, 25
implantación del modelo, 25-27
simulación del problema de transporte, 410
solución al problema de programación lineal, 448
y simulación, 564-567
constantes, en análisis de modelos, 21
Cooper, W. W., 282
costo(s)
crecientes. 525
de excedentes, 519, 525
de carencias, 519, 525
de oportunidad, 316, 358
marginales, 525
reducidos, 312, 374, 382, 384, 392
Crane, R. R., 574 η
Criterio, elección de, 3
Crowder, H., 440 n, 459

Ch

Chames, A., 282
Chernoff, H., 156

D

Dantzig, G. B., 282
Darnell, D. Wayne, 296 η
DAVID, *software,* 101
Davis, E. W.,610
Davis, M. D., 258
decisión,
árboles de, 7, 10,96-101
dominación en, 145-150
ejemplo de introducción de producto, 101, 102
problema del tendero, 96-97
optimidad, principio de, 643
variables de, 16, 17
decisiones
criterios de, 140
empresariales, 3-4
incertidumbre, 8-9
modelos de análisis de, 9
problemas dinámicos de, 11
procesos de Markov en uso, 626, 630
teoría de, 140-53
definición, 140
funciones lineales, 152
criterios de decisión, 142-152
problemas de decisión, 141-142
degeneración, 336. 371-374, 409-410
demanda
de tiempo de entrega, cálculo de la desviación estándar de la, 505-506
dependiente, 497
fuentes independientes de la, 497
Denardo, E. V., 663
descuentos por volumen, 485-487
desigualdades lineales, 265
desviación estándar
de variables aleatorias, 66
modificación de la, 224-226
dinero, valor actual y futuro del, 34-35
dirección, toma de decisiones para la, 3
disponibilidad, restricciones de, 280
distribución
a priori de la media de la población, 223
binomial de probabilidad, 72-73
de las medias de la muestra, 221-222
de probabilidad continua, 511 -525
simulación, 572-573
discreta de, probabilidad, 65, 196-198
en la muestra, 221
exponencial, 534, 550-552
hipergeométrica, 75 η
normal, 196, 198-202
normal de probabilidades
decisión de tomar muestras, 227-233
distribución normal posterior y toma de decisiones, 226-227
ejemplo integral, 233-238
modificación de la distribución anterior, 222
modificación por muestreo, 219-238
tamaño óptimo de ls muestra, 232
utilizadas, 220-222
normal estandarizada, 204
tabla, 673

a posteriori
de la media de la población, 222
esperada, 229
y toma de decisiones, 226-227
distribución binomial acumulada, 675
doctores, determinación del número óptimo de, 532
dominación, 143, 147-148
estocástica, 147 η
ponderada, 181
Dorfman, R., 167 η
Dreyfus, S. E., 663
Dyer, J. S., 12

E

Edwards, W., 190
Elmaghraby, S. E., 610
empleados, determinación del número mo de, 533
Englebrecht-Wiggans, R., 258
Eppen, G. D., 12,282
equilibrio minimax, solución de, 245
equivalentes ciertos, 175
errores, 6
escala nominal, 164
estado
absorbente, 624 η
estacionario, 621-624, 625-626, 630-633
cálculo de probabilidades, 622
estrategia, 149
mixta, 248
pura, 246
Ewart, P. J., 76
excedentes, costo de, 519, 525
existencias
de ciclo, 498
de seguridad, 498
experimento, evaluación del valor de un, 106

F

factores; *véase* variables
cualitativos, 7
FeHer, W., 76, 554
FIFO, 534
Fishburn, P. C, 190
flujos de efectivo y modelos de caso, 34
Ford, J. S., 76
Foreman. Leonard. 33 n
formulación, 267
Fox, B. L., 587
frecuencia relativa, interpretación de la, 52
Frey, S. C, Jr., 115
Friedman, M, 177 n, 190
frontera eficiente, 181
función
binomial de probabilidad, 73
de beneficios, 645
de densidad de probabilidad continua, 196
objetivo, 265
funciones
de distribución acumulada, 199-200
de masa acumulada, 198-199
lineales, 152, 265

G

ganancia neta esperada (GNE), 232
Garfinkel, R. S., 459
Gauss, distribución de, 201-202
Geoffrion, Arthur M., 282, 459
gerencia (*véase* dirección)
Gnugnoll, G., 587
Gordon, G., 587
Gould, F. J., 12,282
Graves, S. C, 591 η
Green, P. E., 190
Gross, D., 554
Gutiérrez, G. J., 297 η

H

Hald, A.,673
Hall, R. W., 492
Harris, C. M, 554
Hausman, W. H., 297 n, 591 η
Hax, A. C, 282, 459
Hertz, D. B.,587
Hillier, F., 282, 453 n, 459, 492, 554, 587, 663
Hodges, J. L., Jr., 76
hoja de cálculo, programas de, 25
programación lineal, 326
simulación de Montecarlo en, 577
holgura
variables de, 320
y ruta crítica, 597-598
Holloway, C. A., 186 η

Holloway, C. A., 115, 190
Howard, R. A., 633, 663

I

IEEE Transactions on Systems Science and Cybernetics, 190
Ignizio, J. R, 420
igualdades lineales, 265
incertidumbre, toma de decisiones en condiciones de, *%5-\05;véase también* decisiones, teoría de *y* programación dinámica
  análisis de sensibilidad de probabilidades subjetivas, 94-95
  beneficios esperados con pronósticos perfectos, 92-93
  pérdidas de oportunidad esperadas, 90-91
  tabla de pérdidas, 87
  utilidad esperada, 91-92
  valor
    condicional, 85-87,91
    esperado de la información perfecta, 93-94
  monetario esperado, 88-90, 91
independencia o dependencia
  causal, 54 η
  estadística, 54 η
indiferencia, curva de, 182
influencia, diagrama de, 20-21, 101
información
  de estudios, valor de la, 113
  en distribución, 223
  imperfecta, 9, 106-108
    valor de la, 105-107
instalaciones agrupadas, 547-548
introducción de productos, ejemplo de, 98-103, 107
inventarios, control de
  análisis ABC, 478-481
  cantidad económica de pedido, 481-485
  costo de la reacción negativa, 521-522
  descuentos por volumen, 485-487
  distribución continua de probabilidad, 522-524
  flujo continuo de productos, 487-488
  incertidumbre de la demanda, 497, 517
  método marginal, 518-521
  modelo(s), 10
    de costo de escasez, 500
    de nivel de servicio, 507-509
  punto óptimo de pedido, 501-506
  reorden, **497-510**
  rotación, 489-491
  sin reorden, 517-525
  sistemas justo a tiempo, 488-491, 509
  y la simulación, 565-567

J

Jackson, B. B., 12,35
Johnson, E. L., 440 n, 459
Jones, J. M., 238, 299 η
juegos
  con suma cero, 245-248
  con suma distinta de cero, 255-256
  de dos personas con suma cero, 245-249
  definición, 244
  estrategias mixtas, 248-249
  oferta competitiva, 256-257
  resultados inciertos, 256
  solución
    algebraica, 252-254
  gráfica, 249-252
  minimax, 245, 255
justo a tiempo, sistemas de inventario, 488-491,509

K

Kagel, J. H., 256 n, 258
Kahneman, D., 187 n, 189
Kahr, A. S., 115
kanban, sistema de inventario, 488
Karlin, S., 633
Karmarkar, N., 324
Keeney, R. L., 190
Kemeny, J. G., 76, 633
King, W. R.,610
Kropp, D. H., 12

L

Law, A. M, 663
Lee, A. M., 554
Lee, H. L., 297 η
Lee, S. M, 420
Lehmann, E. L., 76
Levin, D., 256 n, 258
Levy, F. K.,610
Lieberman, G. J., 282, 453 n, 459, 492, 554, 587, 663

límite(s)
teorema central del, 222 η
físicos, 18
Lin, C. Y., 76
LINDO (Linear INteractive Discrete Optimizer), programa, 324-326, 336, 437
lineal, 265-269
Loflin, Carolyn, 296 η
Lonsdale, R. T., 285 η
loterías de beneficios, 151
Lotus, 326
generación de valores aleatorios, 578
simulación de un sistema sencillo de colas, 578-584
Luce, R. D., 250 n, 258

M

Magnanti, T. L., 282, 459
Maísel, H., 587
maldición del ganador, 256-257
mapa de carreteras, como ejemplo de modelo, 15
Markov, procesos de, 11, 535, 617-633
análisis
a corto plazo, 617-622
de estado estacionario, 621-624, 625-626, 630-632
aplicación
en problemas de decisión, 626-630
en programación dinámica, 559-563
características de los, 624-625
Marsten, R. E., 459
maximax, procedimiento, 142-143
maximin, procedimiento, 143
McClain, J. O., 492, 599 n, 610
McDonald, J., 258
McMillan, C, Jr., 459
mecánicos, determinación del número óptimo de, 532
medida
cardinal, 165
ordinal, 164-165
Meier, R. C, 587
metas, programación por, 416-417
Milgrom, P. R., 258
Miller, J. G., 492
minimax, 144, 245, 254
modelo(s)
clasificación de, 9-10
constantes en, 21
construcción de, 5, 15-34
conceptos básicos, 15-18
técnicas, 6-7
de caso, 9, 15-34
definición, 5
determinación de, 4
entradas y salidas, 17
relaciones
financieras en, 21-22
físicas en, 21
representación matemática de un, 6
sencillos, 9, 10
variables, relación entre, 17-18
Moder, J., 610
Montecarlo, proceso de, 561-577, 584-
Morgenstem, O., 163, 163 n, 168 n, 190, 244, 258
Moses, L. E., 156
Mosteller, R, 76
muelles (barcos), determinación del ro óptimo de, 532
muestreo
decisión de efectuarlo, 227-233
ganancia neta esperada, 233
modificación de probabilidades normales por, 229-238
tamaño óptimo, 232, 233, 237
valor esperado de la información, 230-232

N

Nahmias, S., 492
Naylor, T. H. 35 587
Nemhauser, George L., 459, 650
New York Times, modelo, 33-34
Newell, G. R, 554
Newell, W. T., 587

O

O'brien, G. G., 574 η
oferta competitiva, 256-256
entera, 443 η
oportunidad, pérdida de condicional, 87, 88, 91
optimalidad, principio de, 643-654
optimización, modelos de, 10
Orlicky, J. A., 498 η
Owen, G., 258

P

Padberg, M., 440 η, 459
paramédicos, determinación del número óptimo de unidades de, 534
pare/pare, estrategia, 150
pare/siga, estrategia, 150
Pazer, H. L., 587
pedido(s)
  formulación y tamaño de, 477
  permanente, 487
pérdida(s) de oportunidad, 87, 519
  esperada, 90, 91
periodo de inicio, 561
perspectivas, teoría de las, 187-189
PERT (técnica de evaluación y revisión de programas), 11, 592-610
  compensaciones entre tiempo y costo, 599-603
  diagrama de red, 593-594
  evaluación de, 609
  requisitos de información, 593
  ruta crítica, 594-598
  simulación, 607-609
Peterson, C, 115
Peterson, R., 492
Phillips, C. R.,610
pistas de aterrizaje, determinación del número óptimo de, 532
pivote, elemento, 357
Plañe, D. R., 35, 459
planificación de requisitos de materiales, 497
plano cortante, método del, 440
población, distribución de la, 220
Poisson, proceso de distribución de, 534, 550
política(s), 16
  óptima, 643
Prabhu, N. U., 554
Pratt, J. W., 115, 190,238
precio
  dual, 309, 315, 373, 382, 392
  sombra, 309, 392
primero en entrar, primero en salir, 534
Pritsker, A. A., 587
probabilidad
  acumulada, 147
  a priori, 110
  conceptos de, 51-76
  condicional de sucesos, 54-55, 63
  conjuntas, 54-56, 58, 63, 109
  crítica, 521
  determinación, 108-112
  distribución de, 196-198
    binomial, 72
    de variables aleatorias, 64
    para estrategias seleccionadas, 151
  enunciados básicos, 53
  función de, 64
    densidad de, 193
    masa de, 193
  incondicionales, 56
    ejemplo, 61
  interpretación subjetiva, 52
  marginales, 56, 61, 64
  máxima, 143
  modificación de, 62-64, 105-106, 219-237
  a priori normales y valor de la información, 206-213
  objetiva, 51-52
  a posteriori, 63, 111
  dominación en, 147, 148
  proceso de Bernoulli, 70-71
  simulación de, 560-567
  sucesos
    dependientes, 55
    independientes, 54-55
    mutuamente excluyentes, 53-54
  variables aleatorias, 64-69
problemas
  complejos, 10
  dinámicos, 275
  estáticos, 275
producción, tamaño de lote de, 491
programación dinámica, 11, 275 n, 639-663
  conceptos básicos, 640-642
  en condiciones de incertidumbre, 655
  formalización de la técnica, 642-643
  formulación y resolución de problemas, 654, 663
  principio de optimalidad, 643-654
  solución de estado estacionario, 660
  uso en procesos de Markov, 659-663
programación entera, 429
  mixta, 429
    ejemplos de formulaciones, 433-439
    formulación de problemas, 431-433
    método de ramificación y acotamiento, 442

problemas de combinación, 453
resolución de problemas, 439-446
programación lineal; *véase también* simplex, método
análisis de sensibilidad, 307-313, 315-318
definición, 265
en paquetes de hoja de cálculo, 326
formulación
de modelos, 278-281
de problemas, 267-278
intervalos del término independiente, 313-315
minimización, 318
objetivos múltiples, 412-419
paramétrica, 326-332
por metas, 416-417
por prioridades, 417-419
problema
de transporte, 404-410
dual, 388
solución
algebraica, 253, 318 n, 320-324, 351 -352
gráfica, 302-307
por computador, 324-326
y entera, modelos de, 10
pronósticos de publicidad, 33-34
punto
factible, 303
óptimo de pedido, 501-506
Puyallup Forest Products, caso, 18 η

Q

Quattro Pro, 326

R

Raiffa, H., 12, 115, 190, 238, 250 n, 258
ramificación y acotamiento, algoritmo de, 440, 443-447
problema de combinación, 453
razón crítica, 521
reacción negativa, costo de, 521-522
red(es)
diagrama de, 593-594
problemas de, 429 η
región factible, 304
relación(ones)
de juicio, 18
de recurrencia, 650
relajamiento de la programación lineal en problemas de programación entera, 443 η
rendimiento, medición del, 3, 17
representación cuantitativa de modelos, 6-7
restricciones, 16, 280
de calidad, 280
de equilibrio de materiales, 280
de tecnología productiva, 280
del mercado, 280
lineales, 265
por definición, 280
análisis de sensibilidad, 307-313
resultados
dominación de, 147-148, 149
simetría de, 52
riesgo
análisis de, 567-573
oposición al, 170
perfiles de, 151
prima de, 176
reducción de la oposición al, 177
Robichek, A. A., 299 η
Ross, S. A., 76, 633
rotación de inventario, 489-490
Rourke, E. K., 76
ruta, 594
crítica
método de la, 593 η
modelos de, 11, 581-598
algoritmos para, 595-597
holgura y, 597-598
indirecta, 407

S

SAD; *véase* sistema de apoyo para las decisiones, 11
Salop, S. C, 84
Samson, D., 76, 156
Samuelson, P. A., 167 η
Sasieni, M. W., 604 η
Savage, L. J., 177 n, 190
Savage, Sam L., 282, 326 η
Schachter, R., 101 η
Schlaifer, R., 12, 115, 190,211 n, 213, 220 n, 222 n, 233 n, 238, 661 η
Schleifer, A., Jr., 76, 633
Schmidt, C, 12,282
Schonberger, J., 492
Schrage, Linus, 282, 324 n, 337, 437 n, 58
Schwarz, L. B.,591 η

sensibilidad, análisis de, 33
coeficientee en la función objetivo, 316-318
evaluación de nuevos productos, 315-316
método simplex, 373-379
probabilidades subjetivas, 95
servicio, modelo de nivel de, 507-509
sesgo, 220 η
Shannon, R. E., 587
Shapiro, R. O., 283, 459
Shubik, M., 258
siga/pare, estrategia, 150
siga/siga, estrategia, 149, 150, 151
silla, punto de, 246
Silver, E. A., 492
simplex, método, 352-369
análisis de sensibilidad, 373-379
coeficientes de sustitución, 354-356
degeneración, 371-372
formulación algebraica, 365
problema dual, 388
situaciones especiales, 370-371
solución dual como precios duales, 392-394
tabla simplex, 353
simulación, modelos de, 11, 559-587
análisis de riesgo, 567-572
de Montecarlo, 584-587
de probabilidad, 560-567
PERT, 607-609
sistemas complejos, 574-577
y control de inventarios, 565-567
sistema(s)
complejos, simulación de, 574-576
de apoyo para las decisiones, 11
situación, modelo de, 10
Smidt, S., 34 η
Smullyan, Raymond, 83 η
Snell,J. L.,76, 633
Solow, R. M., 167
solución básica, 321, 324, 353
sólo de enteros, 429
variables de la, 321
soluciones, 3, 5-6
no factibles, 352
Spetzler, C. S., 115
Spurr, W. A., 76, 115,238
SRI Decisión Analysis Group, 115
Stael von Holstein, C. A., 115
sucesos
dependientes, 55
dominación de, 147, 148
igualmente probables, 143, 144
independientes, 54
mutuamente excluyentes, 53-54
Swalm, R. O., 190

T

Taylor, H., 633
Teichroew, D., 299 η
tendero, problema del, 85-97
Tersine, R. J., 492
Thaler, Richard, 256
Theory of Gantes and Economic Behavior, 244
Thomas, G. B., Jr., 76
Thomas, H., 587
Thomas, L. J., 492, 599 n, 610
Thompson, G. L., 76, 633
tiempo
de actividad, 536
de inactividad, 536
transporte, problema de, 270, 404-410
interpretaciones económicas, 410-412
Tversky, A., 187 η, 190

U

utilidad
cambio de escala de una, 168
esperada, 91-92, 163
con pronósticos perfectos, 92-93
en condiciones de certidumbre, 213
y comparación con el valor monetario esperado, 164-164
marginal
decreciente, 170
del dinero, 169
máxima esperada, 143
utilidad, teoría de la, 159-189
funciones de utilidad
con varios atributos, 179-184
y preferencia de riesgo, 177-179
medición de la utilidad, 164-165
obtención de una función de utilidad para el dinero, 169-173
resultados con riesgo, 184-186
hipótesis psicológicas, 165-168

teoría de las perspectivas, 187-189
utilización de funciones de utilidad, 173
utilización de un sistema, 536

V

valor
condicional, 85-86, 91
de información perfecta, 209
de la información
de estudios, 113
imperfecta, 105-108
de la variable aleatoria, 64
del término independiente, 308
esperado
de la información perfecta, 93-94, 211
de la suma de variables aleatorias, 66
de una variable aleatoria, 65
del costo, 153
criterio del. para las decisiones, 143, 145
marginal, 310, 393
monetario esperado, 88-90, 91, 146
y comparación con beneficios esperados, 162-163
neto actual, cálculo del, 433 η
variabilidad, papel en sistema de colas, 530
variable
binaria, 431
cero/uno, 431
de entrada, 355
de estado, 642
de excedente, 323
de salida, 356
normal estandarizada, 204
variables
artificiales, 365
categorías de, 15-16
exógenas, 16
externas, 321, 352; *véase También* variables exógenas
intermedias, 17
no básicas, 321
variables aleatorias, 64-70
independientes, 153-155
generación por computador, 573
método algebraico para generar, 576-578
normalización, 204
valor esperado de las, 65
varianza y desviación estándar de las, 66
varianza, de una variable aleatoria, 66
Vatter, P. A., 115
Vaupel, J. W., 115
20-80, regla, 479
ventanillas de servicio de oficina postal, determinación de número óptimo de, 533
Vickrey, W., 258
VME (valor monetario esperado), 88-90, 91, 146
Von Neumann, J., 163 η, 165, 168 η, 190, 244, 258

W-Z

Wagner, Harvey M., 12, 283, 327 n, 460, 492, 554, 587, 663
Watson, H. S., 587
Weber, R. J., 258
Weiss, L., 156
WhafsBest, 326
Wiest, J. D., 610
Williams, J. D., 258
Wilson, R. B., 258
Wind, Y., 190
Winkler, R. L., 115, 156,213,238
Wolff, R. W., 554, 633
Wolsey, L. A., 459
Zeleny, M, 190
Zionts, S., 460

La administración de una empresa moderna se ha convertido en una tarea de enorme complejidad, por lo que vuelven a tener gran importancia las técnicas y los modelos cuantitativos como instrumento para resolver muchos de los problemas que surgen en esas empresas.

El propósito del libro es exponer una muestra representativa de los modelos y técnicas cuantitativos relacionados con la toma de decisiones, utilizando explicaciones sencillas con el fin de que los lectores que no tengan conocimientos profundos de matemáticas puedan comprender los fundamentos de cada técnica. De esta manera, el texto resulta un enlace perfecto entre los cursos de matemáticas y los relacionados con decisiones empresariales.

En esta octava edición se ha modificado gran parte del material de programación lineal y se ha añadido un nuevo capítulo sobre soluciones gráficas, soluciones por computador, interpretación de precios duales y análisis de sensibilidad. También se ha revisado el capítulo sobre teoría de colas y se ha añadido un apéndice al capítulo que trata sobre simulación, donde se muestra cómo realizar una simulación de Montecarlo en una hoja de cálculo.

9 789701 016909
ISBN: 970-10-1690-4

McGraw-Hill Interamericana Editores, S.A. de C.V.
A Subsidiary of The McGraw-Hill Companies