INTRODUCCIÓN
A LAS
MATEMÁTICAS

Ejercicios y problemas

Grupo Editorial Patria

INTRODUCCIÓN A LAS MATEMÁTICAS

Ejercicios y problemas

Víctor Francisco Robledo-Rella
Antonio Aguilar Gómez
Luis Antonio Martínez Arias

Instituto Tecnológico de Estudios
Superiores de Monterrey

PRIMERA EDICIÓN EBOOK
MÉXICO, 2014

GRUPO EDITORIAL PATRIA

Para establecer comunicación con nosotros puede hacerlo por:

correo:
Renacimiento 180, Col. San Juan Tlihuaca, Azcapotzalco, 02400, México, D.F.

fax pedidos:
(01 55) 5354 9109 • 5354 9102

e-mail:
info@editorialpatria.com.mx

home page:
www.editorialpatria.com.mx

Dirección editorial: Javier Enrique Callejas
Coordinadora editorial: Estela Delfín Ramírez
Diseño de interiores: Braulio Morales Sánchez
Diseño de portada: Juan Bernardo Rosado Solís / Signx
Supervisor de producción: Gerardo Briones González
Fotografías: © Thinkstockphoto

Revisión técnica:

Silvia González Durán
Héctor Ochoa Grimaldo
Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey-Campus Monterrey

Hugo Gustavo González Hernández
Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey-Campus Puebla

Elizabeth Toriz García
Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey-Campus Estado de México

Jesús Cuauhtémoc Ruvalcaba Álvarez
Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey-Campus Guadalajara

Ana Elizabeth García Hernández
Instituto Politécnico Nacional

Introducción a las matemáticas. Ejercicios y problemas

Renacimiento 180, Colonia San Juan Tlihuaca,
Delegación Azcapotzalco, Código Postal 02400, México, D.F.

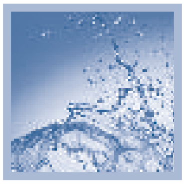
Miembro de la Cámara Nacional de la Industria Editorial Mexicana
Registro núm. 43

ISBN ebook: 978-607-438-921-0

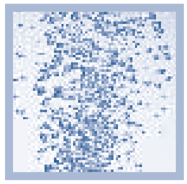
Impreso en México
Printed in Mexico

Primera edición ebook: 2014

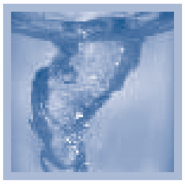
Contenido



Capítulo 2 Ecuaciones y desigualdades

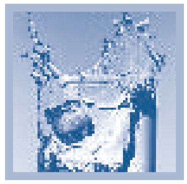


Capítulo 3 Funciones y gráficas



Capítulo 4 Funciones polinomiales y funciones racionales

197

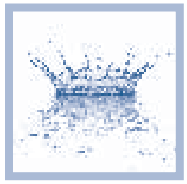


Capítulo 5 Funciones exponenciales y logarítmicas

251

Capítulo 6 Funciones trigonométricas

279



Capítulo 7 Geometría analítica

351

Prólogo

Bienvenido al libro *Introducción a las matemáticas. Ejercicios y problemas*. El estudio cuidadoso de las páginas de este libro te permitirá conocer los conceptos relacionados con los temas principales de un curso de Precálculo, incluidos los siguientes:

1. Álgebra
2. Ecuaciones y desigualdades
3. Funciones y gráficas
4. Funciones polinomiales y racionales
5. Funciones exponenciales y logarítmicas
6. Funciones trigonométricas
7. Geometría analítica.

Los profesores que escribimos este libro de texto hemos vertido en sus páginas nuestra experiencia docente de más de dos décadas. Con base en ella tomamos en cuenta la manera en que aprenden nuestros alumnos y enfatizamos aquellos conceptos que sabemos que son particularmente difíciles para ellos.

El libro está escrito de una manera clara y precisa que te ayudará a comprender los temas presentados. Al inicio de un tema, se desarrollan los conceptos principales y se incluyen muchos ejemplos resueltos que te permitirán afianzar los conocimientos adquiridos. Te sugerimos que repases con mucho cuidado estos ejemplos resueltos a fin de que comprendas los temas presentados y para que aprendas a resolver ejercicios similares. Esta es una parte muy importante del proceso de autoaprendizaje. A continuación, al final de cada sección, se ofrecen una serie de ejercicios propuestos que te permitirán poner a prueba tu comprensión de los temas y que te ayudarán a desarrollar tu habilidad de resolución de problemas, la cual es una competencia fundamental que necesitan los nuevos profesionistas. Al final del texto se incluyen las respuestas de los ejercicios propuestos, lo que te permitirá verificar si los resolviste correctamente. Los problemas presentados al final de cada una de las secciones del libro también pueden ser utilizados por el profesor que adopta este libro como base para sus ejercicios de tareas semanales.

Los autores de este libro confiamos en que en estas páginas encontrarás una guía práctica que te permitirá acrecentar tus conocimientos de Precálculo y que te dará las bases necesarias y suficientes para afrontar con éxito los cursos siguientes de matemáticas universitarias, incluyendo cálculo diferencial y cálculo integral.

En hora buena por tu estudio de las matemáticas y recuerda que el dominio de ellas te permitirá desenvolverte mejor a lo largo de tu vida profesional.

Agradecimientos

Víctor Robledo agradece primeramente a Dios la oportunidad de elaborar un libro que pueda contribuir a la formación de profesionistas exitosos en México. En segundo lugar, agradece a su esposa y a su hijo por el apoyo y la comprensión recibidos durante la edición de esta obra.

Luis Martínez agradece a su familia por el apoyo que siempre le han brindado. Especialmente agradece al doctor Gerardo Aguilar y al maestro Fernando Sierra por haberle dado la oportunidad de incurrir en el maravilloso mundo de la docencia. Agradece también a la doctora Linda Medina, a la doctora Natella Antonyan, al profesor Alejandro Latorre y al maestro Enrique Cruz por todo su apoyo.

Los autores agradecen especialmente a la ingeniera Estela Delfín, editora de Ciencias e Ingeniería del Grupo Editorial Patria, por la oportunidad y la confianza dadas a nosotros para escribir esta obra y por la revisión cuidadosa del texto.

Agradecemos también las observaciones y comentarios de los profesores que realizaron la revisión técnica de la obra, lo cual ayudó a mejorar la presentación y a clarificar conceptos a lo largo del libro: doctor Hugo Gustavo González Hernández del Instituto Tecnológico de Estudios Superiores de Monterrey, Campus Puebla; licenciada Silvia González Durán y al doctor Héctor Ochoa Grimaldo del Tecnológico de Monterrey, Campus Monterrey; doctora Elizabeth Toriz García del Tecnológico de Monterrey, Campus Estado de México; doctor Jesús Cuauhtémoc Ruvalcaba Álvarez del Tecnológico de Monterrey, Campus Guadalajara, y doctora Ana Elizabeth García Hernández del Instituto Politécnico Nacional.

Capítulo 1

Álgebra y conceptos básicos

Al final de este capítulo el alumno será capaz de:

- Identificar los conjuntos de numeración, incluyendo los números reales y los números complejos.
- Identificar el conjunto de los números reales y sus subconjuntos.
- Resolver problemas que involucran el uso y las propiedades de los números reales.
- Conocer los principales productos notables y realizar ejercicios de factorización.
- Entender y manejar el concepto de exponentes y radicales.
- Conocer y realizar operaciones de adición o suma, sustracción o resta, multiplicación y división de expresiones algebraicas.

Introducción

Las matemáticas son una de las ramas más bellas de las ciencias que jamás haya producido el ser humano. El desarrollo de las matemáticas le ha permitido expandir su conocimiento acerca del mundo físico que lo rodea.

Los conjuntos de números constituyen la base del lenguaje matemático y son el tema principal de esta sección introductoria del libro.

1.1 Números reales y números complejos

Existen distintos conjuntos de numeración que se usan en matemáticas, los cuales presentamos a continuación.

Conjunto de números naturales

El *conjunto de los números naturales,* $\mathbb{N}$, está compuesto por los números: $\mathbb{N} = \{1, 2, 3, 4,\ldots\}$. El conjunto de los números naturales es infinito.

Conjunto de números enteros

El *conjunto de los números enteros*, $\mathbb{Z}$, está compuesto por el conjunto de los números naturales, además del 0 y la reflexión de los números naturales. Es decir: $\mathbb{Z} = \{\ldots, -3, -2, -1, 0, 1, 2, 3,\ldots\}$. Entonces:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z}.$$

El símbolo $\subset$, significa pertenencia. Es decir, el conjunto de los naturales es un subconjunto del conjunto de los enteros.

Conjunto de números racionales

El *conjunto de los números racionales,* $\mathbb{Q}$, está compuesto por todos los números que pueden escribirse como cociente de dos números enteros, $c = b/a$, con a y $b \in \mathbb{Z}$, y $a \neq 0$. Es decir, $\mathbb{Q} = \{c \text{ tal que } c = b/a, \text{ con } a \text{ y } b \in \mathbb{Z}, \text{ y } a \neq 0\}$. Así, por ejemplo, los números $\frac{1}{2}, \frac{1}{4}, -2, -\frac{3}{7}$ pertenecen a los números racionales. Así pues:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q}$$

Conjunto de números irracionales

El *conjunto de los números irracionales,* $\mathbb{I}$, está compuesto por todos los números que *no* pueden escribirse como cociente de números enteros, es decir: $c \neq b/a$, con a y $b \in \mathbb{Z}$, y $a \neq 0$. Algunos ejemplos de números irracionales son: $\sqrt{2}$, π, e, $\sqrt[3]{5}$, $ln\ 2$, etcétera.

Conjunto de números reales

A nivel universitario, el principal conjunto de numeración que se usa en matemáticas es el *conjunto de los números reales,* $\mathbb{R}$, que está compuesto por la unión de los números racionales y los números irracionales. Esto es: $\mathbb{R}$ = {conjunto de los números c, tales que $c \in \mathbb{Q}$ o $c \in \mathbb{I}$}. Algunos ejemplos de números reales son: 0, -32.28, $ln\ \pi$ y e^{10}, entre otros. Así que:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R}.$$

Axiomas de los números reales

Existen dos operaciones fundamentales en los números reales: la suma o adición y la multiplicación o producto, que tienen las siguientes propiedades.

Sean a, b, c y d cuatro números reales cualesquiera.

Propiedad de cerradura

Si $a \in \mathbb{R}$, $b \in \mathbb{R}$ y $c = a + b$ y $d = a \cdot b$, entonces los números c y d son únicos y ambos $\in \mathbb{R}$.

Propiedades conmutativas

1. $a + b = b + a$ (el orden de los sumandos no afecta la suma).
2. $a \cdot b = b \cdot a$ (el orden de los factores no altera el producto).

Propiedades asociativas

1. $a + (b + c) = (a + b) + c = a + b + c.$
2. $a(bc) = (ab)c = abc.$

Propiedades distributivas

1. $a(b + c) = ab + ac.$
2. $(a + b)c = ac + bc.$

La multiplicación es distributiva sobre la suma.

Leyes de identidad

1. Existe un número único 0, con la propiedad: $0 + a = a + 0 = a.$
2. Existe un número único 1, con la propiedad: $1 \cdot a = a \cdot 1 = a.$

Leyes inversas

1. Para cada número real a existe un número real $-a$, tal que $a + (-a) = (-a) + a = 0.$
2. Para cada número real a, diferente de cero, existe un número real a^{-1}, tal que $aa^{-1} = a^{-1}a = 1.$
3. $-a$ se conoce como el inverso aditivo, o negativo de a.

4. a^{-1} se conoce como el inverso multiplicativo, o el recíproco de a.

Leyes del factor cero

1. Para todo número real a, $a \cdot 0 = 0$.
2. Si $a \cdot b = 0$, entonces $a = 0$ o $b = 0$.

Leyes de los negativos

1. $-(-a) = a$.
2. $(-a)(-b) = ab$.
3. $-ab = (-a)b = a(-b) = -(-a)(-b)$.
4. $(-1)a = -a$.

Sustracción o resta y cociente

La sustracción o resta se define como:

$$a - b = a + (-b).$$

En tanto, el cociente se define como:

$$\frac{a}{b} = a \div b = a \cdot b^{-1}$$

Así que:

$$b^{-1} = 1 \cdot b^{-1} = 1 \div b = \frac{1}{b}$$

Nótese que, dado que 0 no tiene inverso multiplicativo, $a \div 0$ no está definido, es decir, la división entre cero no existe en los números reales.

Leyes de los cocientes

1. $-\frac{a}{b} = \frac{-a}{b} = \frac{a}{-b} = -\frac{-a}{-b}$.
2. $\frac{-a}{-b} = \frac{a}{b}$.
3. $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, si y solo si $ad = cb$.
4. $\frac{a}{b} = \frac{ka}{kb}$, para cualquier número real k diferente de 0.

Propiedades de orden

El conjunto de los números reales positivos, designado por $\mathbb{R}^+$, es un subconjunto de los números reales que cumple con las siguientes propiedades:

1. Si a y b están en $\mathbb{R}^+$, entonces $a + b$ y ab también están en $\mathbb{R}^+$.
2. Para cada número real a, se cumple que: a está en $\mathbb{R}^+$, a es cero, o $-a$ está en $\mathbb{R}^+$. Si a está en $\mathbb{R}^+$, se dice que a es positivo; pero, si $-a$ está en $\mathbb{R}^+$, se dice que a es negativo.

El número a es *menor que* b, es decir, $a < b$, si $b - a$ es positivo. En este caso, b es *mayor que* a, es decir, $b > a$. Si a es menor o igual que b, se escribe: $a \leq b$. En este caso b es mayor o igual que a, y se escribe $b \geq a$.

Por tanto, de lo anterior se desprenden las siguientes propiedades:

1. $a > 0$, si y solo si a es positivo.
2. Si $a \neq 0$, entonces $a^2 > 0$.
3. Si $a < b$, entonces $a + c < b + c$.
4. Si $a < b$, entonces $\begin{cases} ac < bc, \text{ si } c > 0 \\ ac > bc, \text{ si } c < 0 \end{cases}$
5. Para cada número real a, se cumple que $a > 0$, $a = 0$ o $a < 0$.
6. Si $a < b$ y $b < c$, entonces $a < c$.

Valor absoluto de un número

El valor absoluto de un número real a, se escribe y se define como:

$$|a| = \begin{cases} a \ \ si \ \ a \geq 0 \\ -a \ \ si \ \ a < 0 \end{cases}$$

Recta de los números reales

Los números reales pueden representarse mediante puntos sobre una recta L (véase figura 1.1), tal que a cada número real a le corresponde exactamente un punto en la recta y viceversa. Es decir, a cada punto en la recta le corresponde exactamente un número real.

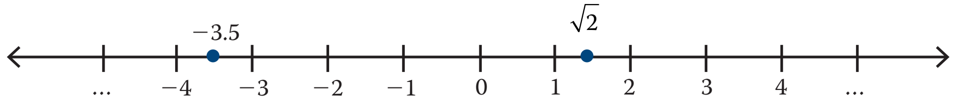


Figura 1.1 Recta de los números reales.

Números complejos

Pero no todos los números son números reales; por ejemplo, no existe ningún número real que al elevarlo al cuadrado dé como resultado un número negativo. Por ejemplo, $2 \times 2 = 4$, pero $(-2) \times (-2) = 4$. De esta manera, se define el número imaginario i, tal que $i^2 = -1$. Por tanto, los números complejos se definen como el conjunto $\mathbb{C} = \{c = a + bi$, tal que a y $b \in \mathbb{R}$ e $i^2 = -1\}$. Entonces se tiene que:

$$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$$

La figura 1.2 muestra de manera gráfica la relación entre estos diferentes conjuntos de números.

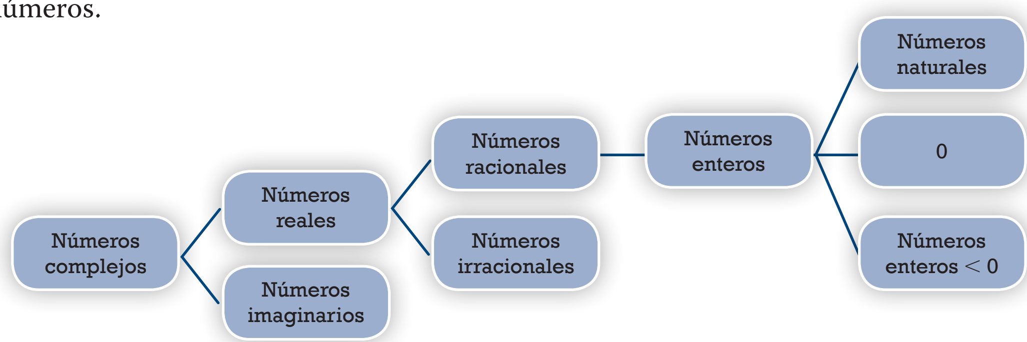


Figura 1.2 Relación entre los conjuntos $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$.

Los números complejos tienen diversas aplicaciones en física y matemáticas. Por ejemplo, se usan para representar de manera práctica una *onda viajera* o para escribir la función de onda de un electrón en un átomo de hidrógeno.

Ejemplo 1

Tomando en cuenta que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, determinar a qué conjuntos: $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, entre otros, pertenecen los siguientes números:

a) 63 **b)** -1 **c)** $\frac{3}{4}$ **d)** 4.3333

e) $-\pi$ **f)** $\sqrt[3]{9}$ **g)** $1+\sqrt{-6}$

Solución

En general, observamos que:

$\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$

Por tanto:

a) $63 \in \mathbb{N}$ **b)** $-1 \in \mathbb{Z}$ **c)** $\frac{3}{4} \in \mathbb{Q}$ **d)** $4.3333 \in \mathbb{Q}$

e) $-\pi \in \mathbb{I}$ **f)** $\sqrt[3]{9} \in \mathbb{I}$ **g)** $1+\sqrt{-6} \in \mathbb{C}$

Ejemplo 2

Usando las propiedades de los números reales, demostrar que

$$a(b + c + d) = ab + ac + ad.$$

Solución

$$\begin{aligned} a(b + c + d) &= a[(b + c) + d] && \text{Ley asociativa} \\ &= a(b + c) + ad && \text{Ley distributiva} \\ &= ab + ac + ad && \text{Ley distributiva} \end{aligned}$$

Ejemplo 3

Demostrar que si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces $ad = bc$.

Solución

Suponemos que $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. Entonces, por definición de división: $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, lo que significa que $ab^{-1} = cd^{-1}$. Así que:

$$\begin{aligned} ad &= ad \cdot 1 && \text{Ley de identidad} \\ &= ad\,bb^{-1} && \text{Ley del inverso} \\ &= ab^{-1}\,db && \text{Leyes asociativa y conmutativa} \\ &= cd^{-1}\,db && \text{Por hipótesis} \\ &= c \cdot 1\,b && \text{Ley del inverso} \\ &= bc && \text{Leyes de identidad y conmutativa} \end{aligned}$$

Ejemplo 4

Identificar si las siguientes afirmaciones son falsas o verdaderas:

a) $-4 < -9$ **b)** $\sqrt{2} = 1.41$ **c)** $x^3 \geq 0$, para toda $x \in \mathbb{R}$

Solución

a) Como $(-9)-(-4) = (-9)+4 = -5$ es negativo, significa que $-9 < -4$, así que la afirmación es falsa.

b) $\sqrt{2} \in \mathbb{I}$ y $1.41 \in \mathbb{Q}$. Así que la afirmación es falsa.

c) Si $x \geq 0$, entonces $x^3 \geq 0$. Sin embargo, si $x < 0$, tenemos que $x^3 = x^2 \cdot x$, y como $x^2 > 0$ y $x < 0$, implica que $x^3 < 0$, así que la afirmación es falsa.

Ejemplo 5

Reescribir las siguientes expresiones sin usar el símbolo de valor absoluto y simplificar.

a) $|6-9|$ **b)** $|5|-|8|$ **c)** $|6-2\pi|$ **d)** $|x-5|$ si $x>5$

e) $|y+8|$ si $y<-8$

Solución

a) $|6-9| = |-3| = 3$.

b) $|5| - |8| = 5-8 = -3$.

c) Como $6 < 2\pi$, entonces: $6-2\pi < 0$. Así que: $|6-2\pi| = -(6-2\pi) = 2\pi - 6$.

d) Como $x > 5$, entonces: $x-5 > 0$. Así que: $|x-5| = x-5$.

e) Como $y < -8$, entonces: $y+8 < 0$. Así que: $|y+8| = -(y+8) = -y-8$.

Ejercicios propuestos

1. Tomando en cuenta que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, determina a qué conjuntos, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, entre otros, pertenecen los siguientes números:

   a) -37 **b)** 89 **c)** $17/9$ **d)** 2.323232

   e) $\sqrt{-1}$ **f)** $\log 100$ **g)** $\sqrt{61}$

2. Tomando en cuenta que $\mathbb{N} \subset \mathbb{Z} \subset \mathbb{Q} \subset \mathbb{R} \subset \mathbb{C}$, determina a qué conjuntos, $\mathbb{N}$, $\mathbb{Z}$, $\mathbb{Q}$, $\mathbb{R}$, $\mathbb{C}$, entre otros, pertenecen los siguientes números:

   a) 0 **b)** $\sqrt{16}$ **c)** $\frac{6}{5}$ **d)** $ln\, e$

   e) $\pi^{\frac{1}{2}}$ **f)** $\sqrt{-2}$ **g)** -9 **h)** 6

   i) $\sqrt{5}$

3. Identifica las leyes de los números reales que se utilizan para los siguientes enunciados:

   a) $200[0.5(25-\mathrm{y})] = [200(0.5)](25-\mathrm{y})$

   b) $x^3(d+x) = x^3 \cdot d + x^3 \cdot x$

4. Si $x<0$ y $y<0$, indica el signo del número real $\dfrac{x}{y} + x \cdot y$.

5. Si $x>0$ y $y>0$, determina el signo del número real $\dfrac{x-y}{xy}$.

6. Demuestra que si $ad = bc$, entonces $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$. (*Sugerencia*: Asume que $ad = bc$; luego, comienza con ab^{-1} y transfórmalo en cd^{-1}, como se hizo en el ejemplo 3.)

7. Identifica si las siguientes afirmaciones son falsas (F) o verdaderas (V):

a) -8 es un número racional. (F) (V)

b) $\pi^2 = 3.14^2$. (F) (V)

c) $|x - 9| = x - 9$, para toda $x \in \mathbb{R}$. (F) (V)

d) Los números racionales están contenidos en los números reales. (F) (V)

8. Identifica si las siguientes afirmaciones son falsas (F) o verdaderas (V):

a) π *no* es un número real. (F) (V)

b) $\sqrt{-1}$ = *no* es un número real. (F) (V)

c) $|10 + x| = 10 + x$, para toda $x \in \mathbb{N}$. (F) (V)

d) Los números irracionales están contenidos en los números racionales. (F) (V)

9. En los ejercicios siguientes determina si el enunciado es falso (F) o verdadero (V):

a) Si $a < b$, entonces $\frac{1}{a} > \frac{1}{b}$. (F) (V)

b) Como $\frac{a+b}{c} = \frac{a}{c} + \frac{b}{c}$, entonces $\frac{c}{a+b} = \frac{c}{a} + \frac{c}{b}$. (F) (V)

c) Si $a < b$ y $b < c$, entonces necesariamente $a < c$. (F) (V)

d) Si $x < 0$ y $y < 0$, entonces necesariamente $x < y$. (F) (V)

e) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces necesariamente $a = c$ y $b = d$. (F) (V)

f) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces necesariamente $ad = cb$. (F) (V)

g) Si $\frac{a}{b} = \frac{c}{d}$, entonces necesariamente $\frac{ae}{be} = \frac{c}{d}$, con $e \neq 0$. (F) (V)

h) $a(b + c) = (a + b)c$ (F) (V)

10. Reescribe las siguientes expresiones sin usar el símbolo de valor absoluto y simplifica:

a) $|13 - 6|$ **b)** $|7| - |-9|$ **c)** $|2\pi - 7|$

d) $|6 - x|$ si $x > 6$ **e)** $-|-y + 3|$ si $y < -3$

11. Si $x < 1$, reescribe $|x - 1|$ sin usar el símbolo de valor absoluto.

12. Reescribe las siguientes expresiones sin usar el símbolo de valor absoluto y simplifica:

a) $|(-3)-[-(-8)]|$ **b)** $|-\sqrt{2} - 1.4142|$

c) $|12 - x|$; si $x > 12$ **d)** $|-4 - x|$

e) $|a - b|$ si $a > b$ **f)** $|a - b|$ si $a < b$

13. Reescribe los números siguientes sin usar el símbolo de valor absoluto y simplifica el resultado:

a) $|-11 + 1|$ **b)** $|\pi - 3|$

c) $\left|\sqrt{2} - 1.5\right|$ **d)** $|4 + x|$ si $x < -4$

1.2 Exponentes y radicales

Una potencia es una expresión del tipo a^n, donde a es la base y n es el exponente. Entonces, la expresión a^n significa que el número a debe multiplicarse por sí mismo $n - 1$ veces. No obstante, por lo común, se dice que se debe multiplicar n veces, pero esto es un *error*. Por ejemplo, $2^3 = 2 \cdot 2 \cdot 2$. Nótese en este caso que solo estamos multiplicando dos veces el número por sí mismo, no tres veces; es decir, solo se hacen dos multiplicaciones, no tres.

Leyes de los exponentes

A continuación se listan las leyes de los exponentes acompañadas de un ejemplo cada una.

Ley	Ejemplo
1. $a^n \cdot a^m = a^{n+m}$	$3^2 \cdot 3^5 = 3^{2+5} = 3^7$
2. $\dfrac{a^n}{a^m} = a^{n-m}$	$\dfrac{6^5}{6^3} = 6^{5-3} = 6^2$
3. $(ab)^n = a^n \cdot b^n$	$(-2 \cdot 4)^2 = (-2)^2 (4)^2 = 4 \cdot 16$
4. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^n = \dfrac{a^n}{b^n}$	$\left(\dfrac{7}{3}\right)^4 = \dfrac{7^4}{3^4}$
5. $(a^n)^m = a^{nm}$	$(5^2)^3 = 5^{2 \cdot 3} = 5^6$
6. $a^{-n} = \dfrac{1}{a^n}$	$3^{-2} = \dfrac{1}{3^2} = \dfrac{1}{9}$
7. $\left(\dfrac{a}{b}\right)^{-n} = \left(\dfrac{b}{a}\right)^n$	$\left(\dfrac{13}{2}\right)^{-7} = \left(\dfrac{2}{13}\right)^7$

Estas leyes tienen sentido siempre y cuando n y m sean números enteros y a y b sean cualquier número real, excepto 0 (cero). Más adelante se verá que también pueden usarse cuando n y m son números racionales o irracionales; no obstante, en estos casos el resultado no siempre tiene sentido.

Ejemplo 6

Simplificar una expresión usando las leyes de los exponentes.

Solución

En este caso, tenemos la expresión:

$$\left(\frac{3xy^3z^{-1}}{4x^{-2}yz^{-4}}\right)^{-2}$$

Primero, usamos la ley 7, podemos escribir:

$$\left(\frac{4x^{-2}yz^{-4}}{3xy^3z^{-1}}\right)^{2}$$

Observa que los signos de los exponentes de la expresión que conforma la base no cambian, debido a que no se está aplicando la ley 6. En este caso, el numerador y el denominador solo intercambiaron su posición y cambió el signo del exponente principal.

Ahora, si aplicamos la ley 6, tenemos:

$$\left(\frac{4yz}{3xx^2y^3z^4}\right)^{2}$$

Lo que se hace con la ley 6 es cambiar todos los exponentes negativos a positivos. Esto significa que las potencias con exponente negativo que se encontraban en el numerador pasaron al denominador con exponente positivo. Asimismo, las potencias del denominador (en este caso, solo Z^{-1}) pasan al numerador.

Entonces, usando las leyes 1 y 2 nos queda:

$$\left(\frac{4}{3x^3y^2z^3}\right)^{2}$$

Con la ley 1 obtuvimos que $xx^2 = x^3$ y con la ley 2 sabemos que $\frac{y}{y^3} = y^{1-3} = y^{-2} = \frac{1}{y^2}$.

En el último paso de esta serie de igualdades se aplicó la ley 6 y lo mismo se hizo para dividir $\frac{z}{z^4}$.

Ahora, aplicamos la ley 4 para escribir:

$$\frac{4^2}{\left(3x^3y^2z^3\right)^2}$$

En el denominador aplicamos la ley 3 y obtenemos:

$$\frac{16}{9\left(x^3\right)^2\left(y^2\right)^2\left(z^3\right)^2}$$

Por último, en las tres potencias del denominador usamos la ley 5 y obtenemos el resultado final:

$$\frac{16}{9x^6y^4z^6}$$

Exponente cero

Seguramente has escuchado que un número elevado a la potencia cero es igual a uno. Pero esto es cierto solo si la base de la potencia no es cero. Enseguida se analiza por qué es así.

Cuando se divide un número diferente de cero entre sí mismo, el resultado es uno. Es decir:

$$\frac{a^n}{a^n} = 1$$

Esto se cumple si $a \neq 0$. Por tanto: $a^n \neq 0$. Esto es importante, porque si $a^n = 0$, entonces $\frac{a^n}{a^n}$ no tiene sentido. Pero se sabe por las leyes de los exponentes que:

$$\frac{a^n}{a^n} = a^{n-n} = a^0$$

De esta manera, como se sabe que $\frac{a^n}{a^n} = 1$, entonces $a^0 = 1$.

Ejemplo 7

Leyes de exponentes y exponente cero

En esta ocasión queremos simplificar la expresión:

$$\frac{-2ab^0}{\left(ac^{-1}\right)^{-3}}$$

Solución

Primero, suponiendo que $b \neq 0$, sabemos que $b^0 = 1$. Entonces:

$$\frac{-2a}{\left(ac^{-1}\right)^{-3}}$$

Ahora, al aplicar la ley 6 obtenemos:

$$-2a\left(ac^{-1}\right)^{3}$$

Usando la ley 3, tenemos:

$$-2aa^{3}\left(c^{-1}\right)^{3}$$

Después, al utilizar las leyes 1 y 5, tenemos:

$$-2a^{4}c^{-3}$$

Hay que recordar que siempre debemos dejar la expresión sin exponente negativo alguno, así que finalmente volvemos a utilizar la ley 6. Entonces:

$$\frac{-2a^{4}}{c^{3}}$$

Exponentes racionales

Antes de iniciar este tema, conviene plantear la siguiente pregunta: ¿qué significan expresiones como: $4^{\frac{1}{2}}$, $7^{\frac{2}{3}}$ o $10^{\frac{11}{4}}$? Después de observarlas, es cierto que cuesta trabajo darles un significado, porque eso implica poder multiplicar un número por sí mismo un número no entero de veces.

Como es bien sabido, cada operación tiene una operación inversa. Por ejemplo, cuando se efectúa la suma $3 + (-2)$, en realidad eso es igual a realizar la operación $3 - 2$, que es una resta o sustracción; la operación inversa es la suma o adición. Entonces, cuando se suma un número negativo, en realidad se está restando.

De igual forma, cuando se multiplica por un número fraccionario, lo que en realidad se hace es una división. Por ejemplo:

$$8\cdot\frac{1}{4}=\frac{8}{4}=2$$

De manera análoga, cuando se eleva un número a una potencia fraccionaria, lo que en realidad se está haciendo es la operación inversa de la potencia, que es hallar una raíz. Para su comprensión, tómese como ejemplo la expresión antes citada $4^{\frac{1}{2}}$, la cual es lo mismo que $\sqrt{4}$; entonces, el resultado es 2. De esta manera, al elevar a la potencia $\frac{1}{2}$, esto quiere decir hallar la raíz cuadrada de la base de la potencia; esto es, hallar un número que multiplicado por sí mismo dé como resultado la base. De la misma forma, elevar a la $\frac{1}{3}$ significa obtener la raíz cúbica de la base, etcétera.

Pero, ¿qué significa un número como $7^{\frac{2}{3}}$? Como ya se analizó antes, el denominador del exponente implica obtener una raíz cúbica; pero, ¿entonces qué se hace con el numerador? De acuerdo con la ley 5 de los exponentes, $7^{\frac{2}{3}} = \left(7^2\right)^{\frac{1}{3}}$. Y eso es igual a $\sqrt[3]{49}$, el cual constituye un número irracional, porque ningún número racional multiplicado dos veces por sí mismo da como resultado 49. (*)

Ejemplo 8

Una potencia sin sentido

Observemos la siguiente expresión:

$$(-5)^{\frac{3}{2}}$$

Solución

Esta misma expresión, por la ley 5 de los exponentes, la podemos escribir como:

$$\left[(-5)^3\right]^{\frac{1}{2}}$$

Efectuando la potencia interior tenemos:

$$(-125)^{\frac{1}{2}}$$

Lo que finalmente es igual a:

$$\sqrt{-125}$$

Esta expresión está indefinida, es decir, no tiene sentido, porque no se puede hallar la raíz cuadrada de un número negativo en los números reales. Como se mencionó antes, cuando los exponentes no son enteros también está permitido usar las leyes de los exponentes, pero puede suceder que en esos casos nos encontremos con expresiones carentes de sentido. En el caso de raíces cuadradas de números negativos, debemos utilizar los números imaginarios $\left(i^2 = -1\right)$, definidos en la sección 1.1.

En el ejemplo anterior también se pudo haber escrito:

$$(-5)^{\frac{3}{2}} = \left[(-5)^{\frac{1}{2}}\right]^3 = \left(\sqrt{-5}\right)^3$$

Esta expresión tampoco tiene sentido porque $\sqrt{-5}$ no existe en los números reales.

Entonces, para evaluar una potencia con exponente racional, se debe aplicar la siguiente ley:

* Ya se explicó por qué dos veces y no tres.

$$a^{\frac{m}{n}} = \sqrt[n]{a^m} = \left(\sqrt[n]{a}\right)^m$$

Cuando n sea par, esto tendrá sentido solo si a es positiva.

Exponentes irracionales

Antes de entrar en materia, conviene responder la siguiente pregunta: ¿qué significa la expresión 2^π?

En realidad, no es posible escribir π como fracción, porque se trata de un número irracional. No obstante, es posible ubicar a π entre dos números racionales, por ejemplo: $3.1 < \pi < 3.2$. Entonces, es lógico pensar que $2^{3.1} < 2^\pi < 2^{3.2}$, o lo que es lo mismo $2^{\frac{31}{10}} < 2^\pi < 2^{\frac{32}{10}}$.

De hecho, $2^{\frac{31}{10}} \approx 8.5741877$ y $2^{\frac{32}{10}} \approx 9.18958684$; por tanto, se esperaría que 2^π fuera un número que estuviera entre estos dos números. Hallar el valor aproximado de 2^π podría hacerse con algún método de análisis numérico, lo cual constituye un área fuera del alcance de este libro. La forma más práctica de hallar su valor es usar una calculadora. Al realizarlo se tiene que:

$$2^\pi \approx 8.824977827$$

que en realidad es un número entre $2^{3.1}$ y $2^{3.2}$.

¿También es posible hallar $(-2)^\pi$ en la calculadora? Inténtalo…

¿Por qué la calculadora marca error? Si se piensa igual que en el ejemplo anterior, se supondría que $(-2)^{\frac{31}{10}} < (-2)^\pi < (-2)^{\frac{32}{10}}$. Pero $(-2)^{\frac{31}{10}} = \left(\sqrt[10]{-2}\right)^{31}$, lo cual no tiene sentido. Por tanto, tampoco tiene sentido elevar un número negativo a un exponente irracional.

Leyes de los radicales

Como ya se vio antes, la operación inversa a la potencia es la radicación.

Un radical es una expresión del tipo $\sqrt[n]{a}$, donde n es el índice y a es el radicando. Si $\sqrt[n]{a} = b$, significa que $b^n = a$.

Para manejar radicales se deben usar las siguientes leyes.

Ley	**Ejemplo**
1. $\sqrt[n]{ab} = \sqrt[n]{a} \cdot \sqrt[n]{b}$	$\sqrt[3]{16} = \sqrt[3]{2 \cdot 8} = \sqrt[3]{2} \cdot \sqrt[3]{8}$
2. $\sqrt[n]{\dfrac{a}{b}} = \dfrac{\sqrt[n]{a}}{\sqrt[n]{b}}$	$\sqrt{\dfrac{3\pi}{2}} = \dfrac{\sqrt{3\pi}}{\sqrt{2}}$
3. $\sqrt[m]{\sqrt[n]{a}} = \sqrt[mn]{a}$	$\sqrt[3]{\sqrt[4]{10}} = \sqrt[12]{10}$

4. $\sqrt[n]{a^n}=\begin{cases} a \text{ si } n \text{ es impar} \\ |a| \text{ si } n \text{ es par}\end{cases}$ $\quad\begin{cases}\sqrt[3]{2^3}=\sqrt[3]{8}=2 \\ \sqrt{(-4)^2}=\sqrt{16}=4\end{cases}$

5. $\left(\sqrt[n]{a}\right)^n=a$ $\quad\left(\sqrt[3]{64}\right)^3=4^3=64$

Ahora, resulta necesario revisar el segundo ejemplo de la ley 4. Esto es, si $\sqrt[n]{a^n}$ siempre fuera igual a a, entonces $\sqrt{(-4)^2}$ sería igual a -4, pero en el ejemplo es posible observar que eso no es cierto. No obstante, alguien podría afirmar que $\sqrt{16}=\pm 4$, porque tanto 4^2 como $(-4)^2$ son iguales a 16. Sin embargo, lo que sucede es que para poder manejar ambos valores por separado (lo cual es más cómodo), se ha convenido en reservar la expresión $\sqrt[n]{a}$ para la raíz positiva de a (cuando n es par).

Usando la ley 5 también es posible encontrar expresiones sin sentido; por ejemplo: $\left(\sqrt{-9}\right)^2$. Esta expresión no tiene sentido porque $\sqrt{-9}$ no existe, es un número imaginario. Entonces, para poder usar la ley 5, a debe ser positiva cuando n sea par.

Ejemplo 9

Simplificar una expresión con radicales

Para este ejemplo, tenemos la expresión:

$$\sqrt[4]{\frac{2x^6y^{-2}z}{3xyz^3}}$$

Solución

Antes que nada, usamos leyes de exponentes para simplificar el radicando. Por tanto, queda:

$$\sqrt[4]{\frac{2x^5}{3y^3z^2}}$$

Enseguida, ocupamos la ley 2 de los radicales y tenemos:

$$\frac{\sqrt[4]{2x^5}}{\sqrt[4]{3y^3z^2}}$$

En el numerador podemos usar la ley 1; por tanto:

$$\frac{\sqrt[4]{x^4}\,\sqrt[4]{2x}}{\sqrt[4]{3y^3z^2}}$$

Entonces, por la ley 4 tenemos que:

$$\frac{|x|\sqrt[4]{2x}}{\sqrt[4]{3y^3z^2}}$$

Una práctica muy común es racionalizar el denominador, es decir, dejar la expresión sin radicales en el denominador. Más adelante veremos por qué es útil esto.

En este caso, para racionalizar la expresión que nos quedó, debemos emplear la ley 4, la cual nos permite eliminar el radical de una expresión. Con base en ese objetivo, debemos multiplicar la expresión por 1, pero ese número 1 deberá estar escrito en una forma peculiar:

$$\frac{|x|\sqrt[4]{2x}}{\sqrt[4]{3y^3z^2}}\cdot\frac{\sqrt[4]{3^3yz^2}}{\sqrt[4]{3^3yz^2}}$$

Recordemos que una expresión dividida sobre sí misma es igual a 1. Por tanto, es posible multiplicar por 1 porque eso no altera la expresión original. Esto es, un número multiplicado por 1 es igual a sí mismo. La pregunta obvia es: ¿por qué escribimos ese 1 de esa forma? Hagamos la multiplicación de fracciones que nos quedó y después será evidente el porqué.

Entonces:

$$\frac{|x|\sqrt[4]{2x}\sqrt[4]{3^3yz^2}}{\sqrt[4]{3y^3z^2}\sqrt[4]{3^3yz^2}}$$

Si usamos la ley 1 de los radicales, tanto en el numerador como en el denominador, y luego empleamos la ley 3 de los exponentes en el denominador, tenemos:

$$\frac{|x|\sqrt[4]{54xyz^2}}{\sqrt[4]{3^4y^4z^4}}=\frac{|x|\sqrt[4]{54xyz^2}}{\sqrt[4]{(3yz)^4}}$$

Ahora sí, podemos aplicar la ley 4 de los radicales para obtener:

$$\frac{|x|\sqrt[4]{54xyz^2}}{|3yz|}=\frac{|x|\sqrt[4]{54xyz^2}}{|3||yz|}=\frac{|x|\sqrt[4]{54xyz^2}}{3|yz|}$$

Si en el ejemplo anterior, desde un inicio se hubiera indicado que las letras representan números positivos, entonces no habría sido necesario el valor absoluto y la respuesta sería:

$$\frac{x\sqrt[4]{54xyz^2}}{3yz}$$

Ejemplo 10

Otro tipo de racionalización

Ahora, aquí queremos racionalizar el denominador de la siguiente expresión:

$$\frac{5x}{2-\sqrt{y}}$$

Solución

En este caso, la diferencia con respecto al ejemplo anterior es que el radical no constituye todo el denominador. Aquí, el radical solo es un término de la resta que comprende el denominador. Para racionalizar, nuevamente multiplicaremos por 1, escrito ahora de la siguiente forma:

$$\frac{5x}{2-\sqrt{y}}\cdot\frac{2+\sqrt{y}}{2+\sqrt{y}}$$

¿Por qué lo escribimos así? Para entenderlo, primero hagamos la multiplicación de fracciones y luego efectuemos la multiplicación de binomios conjugados que queda en el denominador (véase la sección 1.3):

$$\frac{5x\left(2+\sqrt{y}\right)}{\left(2-\sqrt{y}\right)\left(2+\sqrt{y}\right)}=\frac{5x\left(2+\sqrt{y}\right)}{4+2\sqrt{y}-2\sqrt{y}-\left(\sqrt{y}\right)^{2}}=\frac{5x\left(2+\sqrt{y}\right)}{4-\left(\sqrt{y}\right)^{2}}$$

Ahora, aplicamos la ley 5 de los radicales y tenemos:

$$\frac{5x\left(2+\sqrt{y}\right)}{4-y}$$

Para que este último paso sea válido, debemos suponer que y es un número positivo; de lo contrario, $\sqrt{y}$ no tendría sentido.

Ahora bien, es momento de conocer para qué sirve racionalizar el denominador. Con base en ese objetivo, primero debe observarse la expresión $\frac{1}{\sqrt{2}}$ e intentar darle sentido. Aunque ya se sabe que $\sqrt{2}\approx 1.4142$, eso no dice mucho para este caso. Por tanto, si se racionaliza la expresión, se tiene:

$$\frac{1}{\sqrt{2}}=\frac{1}{\sqrt{2}}\cdot\frac{\sqrt{2}}{\sqrt{2}}=\frac{\sqrt{2}}{\left(\sqrt{2}\right)^{2}}=\frac{\sqrt{2}}{2}$$

En una fracción, el denominador indica el número de partes en las que se está dividiendo un entero. Por ejemplo, $\frac{3}{4}$ indica que un entero se divide en 4 partes iguales y el numerador indica que se toman 3 de esas 4 partes. No obstante, cuando se tiene la fracción $\frac{1}{\sqrt{2}}$ es difícil imaginarse un entero dividido en $\sqrt{2}$ partes iguales; sin embargo, si esta fracción se escribe como $\frac{\sqrt{2}}{2}$, esto significa que hay que dividir un entero en dos partes iguales y tomar aproximadamente 1.4142 partes de esas dos partes, es decir, una mitad completa y casi la mitad de la otra mitad.

Ejercicios propuestos

Evalúa las siguientes expresiones:

14. 34^0

15. $\frac{3^7}{3^4}$

16. $8^4 \cdot 8^{-2}$

17. $\left(2^3\right)^2 \cdot 3^{-1}$

18. $(3\pi)^3$

19. $\left(4\sqrt{2}\right)^{-2}$

20. $\left(\frac{7}{11}\right)^{-2}$

21. $\sqrt[4]{16} \cdot \sqrt[3]{-8}$

22. $\sqrt{\frac{121}{144}} \cdot \sqrt[5]{32}$

23. $\sqrt{30+6}$

24. $\sqrt{\sqrt[3]{64}}$

25. $\sqrt[6]{(-3)^6} \cdot \left(\sqrt[3]{-3}\right)^3$

26. $16^{-\frac{3}{4}}$

27. $(-5)^{\sqrt{2}}$

Simplifica las siguientes expresiones:

28. $\dfrac{xy^3}{(xyz)^2}$

29. $(2x^2y^{-3}z)^{-3}$

30. $\dfrac{3a^4b^{-5}c}{4^{-1}ab^{-3}c}$

31. $\left(\dfrac{6x}{3yz^2}\right)^{-3}\left(\dfrac{x}{z}\right)^2$

32. $\dfrac{(64xy^2)^{\frac{2}{3}}}{2x}$

33. $\dfrac{a^{\frac{1}{3}}\cdot a^3}{a^{\frac{1}{2}}}$

Simplifica las siguientes expresiones y racionaliza el denominador. Asume que las letras representan números positivos:

34. $\sqrt{\dfrac{xyz^{-1}}{x^2}}$

35. $\sqrt{\sqrt[3]{\dfrac{3x^5y^6z^7}{2}}}$

36. $\sqrt[3]{\dfrac{4x^{-3}yz^8}{xy^{-1}}}$

37. $\sqrt[5]{6ab^{-8}c^7}$

38. $\sqrt{3xy}\cdot\sqrt{3x^7y^6z}$

39. $\dfrac{9x}{2-\sqrt{x}}$

40. $\dfrac{32^{\frac{3}{5}}}{\sqrt{7}+1}$

41. $\dfrac{1}{\sqrt{x}+\sqrt{y}}$

1.3 Productos notables y factorización

Factorizar una expresión algebraica significa expresar esta como el producto de otras expresiones algebraicas. Por ejemplo, $x^6 - 1 = (x-1)(x+1)(x^2+x+1)(x^2-x+1)$. Sin embargo, en el ámbito de los números reales, no todas las expresiones son factorizables; por ejemplo, x^2+9 no se puede factorizar.

En la factorización y multiplicación de polinomios se utiliza con mucha frecuencia un grupo determinado de reglas fijas, las cuales se conocen como **productos notables**. La idea del uso de los productos notables es poder factorizar rápidamente, al identificar a simple vista la fórmula a utilizar o desarrollar la expresión dada.

Productos notables

I. $A^2-B^2 = (A+B)(A-B)$ (Diferencia de cuadrados)

II. $(A+B)^2 = A^2+2AB+B^2$

$(A-B)^2 = A^2-2AB+B^2$ (Binomio al cuadrado)

III. $(A+B)^3 = A^3+3A^2B+3AB^2+B^3$

$(A-B)^3 = A^3-3A^2B+3AB^2-B^3$ (Binomio al cubo)

IV. $A^3-B^3 = (A-B)(A^2+AB+B^2)$ (Diferencia de cubos)

V. $A^3+B^3 = (A+B)(A^2-AB+B^2)$ (Suma de cubos)

VI. $(X+A)(X+B) = X^2+(A+B)X+AB$ (Producto de binomios con un término común)

VII. $(A+B+C)^2 = A^2+B^2+C^2+2(AB+AC+BC)$ (Trinomio al cuadrado)

En las fórmulas anteriores, si la igualdad se considera de izquierda a derecha, se dice que los productos se *desarrollan,* y si se considera de derecha a izquierda, se dice que se *factorizan*. La fórmula I también se conoce como *producto de binomios conjugados*; obsérvese que en esta, dado que el orden de los factores no altera el producto (propiedad conmutativa del producto), también se tiene que: $A^2-B^2 = (A+B)(A-B) = (A-B)(A+B)$. Asimismo, también obsérvese que la fórmula II **no** es: $(A+B)^2 = A^2+B^2$ (véase el ejercicio 78).

A continuación se presenta una serie de ejemplos resueltos, con el fin de observar el uso de estas fórmulas.

Ejemplo 11

Desarrollar cada una de las siguientes expresiones dadas.

a) $(2x-7)^2$

b) $(y^2-2z^4)^3$

c) $(x^5-3w)(x^5+3w)$

d) $(x+7)(x+6)$

e) $(2y^4-4z)(2y^4+9z)$

f) $(z^3+3w+5)^2$

Solución

a) En este caso, tenemos un binomio al cuadrado, así que utilizamos la fórmula II:

$$(2x-7)^2=(2x)^2-(2)(2x)(7)+(7)^2=4x^2-28x+49$$

b) En este caso, usamos la fórmula III para elevar el binomio al cubo:

$$\begin{aligned}(y^2-2z^4)^3&=(y^2)^3-3(y^2)^2(2z^4)+3(y^2)(2z^4)^2-(2z^4)^3\\&=y^6-6y^4z^4+12y^2z^8-8z^{12}\end{aligned}$$

c) Se trata de un producto de binomios conjugados (fórmula I):

$$(x^5-3w)(x^5+3w)=(x^5)^2-(3w)^2=x^{10}-9w^2$$

d) Aquí utilizamos la fórmula VI, porque se trata de un producto de binomios con término común:

$$(x+7)(x+6)=x^2+(7+6)x+(7)(6)=x^2+13x+42$$

e) En este caso, nuevamente se trata de un producto de binomios con un término común:

$$(2y^4-4z)(2y^4+9z)=(2y^4)^2+(-4z+9z)(2y^4)+(-4z)(9z)=4y^8+10zy^4-36z^2$$

f) Aquí utilizamos la fórmula VII, debido a que se trata del cuadrado de un trinomio:

$$\begin{aligned}(z^3+3w+5)^2&=(z^3)^2+(3w)^2+(5)^2+2((z^3)(3w)+(z^3)(5)+(3w)(5))\\&=z^6+9w^2+25+2(3z^3w+5z^3+15w)\\&=z^6+9w^2+25+6z^3w+10z^3+30w\end{aligned}$$

Ejemplo 12

Factorizar los siguientes polinomios dados:

a) $9x^2-81$

b) $27x^3+8y^3$

c) $4x^2+20xz+25z^2$

d) $\dfrac{x^3}{64}-125z^6h^3$

e) $16x^4-81y^4$

f) $x^2-12x+36$

g) $x^2+8x+15$

h) w^4-w^2-12

i) z^4-2z^2+4

j) A^6-B^6

k) $z^{12}-64$

l) $x^4+2x^2y^3+2x^2+y^6+2y^3+1$

Solución

a) En este caso, aplicamos la fórmula I, porque la expresión es una diferencia de cuadrados:

$$9(x^2-9)=9(x^2-3^2)=9(x-3)(x+3)$$

También es posible factorizar como sigue:

$$9x^2-81=(3x)^2-9^2=(3x-9)(3x+9)$$

b) Aquí aplicamos la fórmula V, dado que se trata de una suma de cubos:

$$27x^3+8y^3=(3x)^3+(2y)^3=(3x+2y)((3x)^2-(3x)(2y)+(2y)^2)$$
$$=(3x+2y)(9x^2-6xy+4y^2)$$

c) Esta expresión se trata de un cuadrado perfecto, por lo que utilizamos la fórmula II:

$$4x^2+20xz+25z^2=(2x)^2+2(2x)(5z)+(5z)^2=(2x+5z)^2$$

d) Puesto que se trata de una diferencia de cubos, aquí utilizamos la fórmula IV:

$$\frac{x^3}{64}-125z^6h^3=\left(\frac{x}{4}\right)^3-(5z^2h)^3=\left(\frac{x}{4}-5z^2h\right)\left(\left(\frac{x}{4}\right)^2+\left(\frac{x}{4}\right)(5z^2h)+(5z^2h)^2\right)$$

$$=\left(\frac{x}{4}-5z^2h\right)\left(\frac{x^2}{16}+\frac{5xz^2h}{4}+25z^4h^2\right)$$

e) En este caso, comenzamos a factorizar como una diferencia de cuadrados:

$$16x^4-81y^{12}=(4x^2)^2-(9y^6)^2=(4x^2-9y^6)(4x^2+9y^6) \qquad (1)$$

Aquí notamos que $4x^2-9y^6$, se puede volver a factorizar como una diferencia de cuadrados:

$$4x^2-9y^6=(2x)^2-(3y^3)^2=(2x+3y^3)(2x-3y^3) \qquad (2)$$

Ahora sustituimos (2) en (1) y obtenemos:

$$16x^4-81y^{12}=(4x^2)^2-(9y^6)^2=(2x-3y^3)(2x+3y^3)(4x^2+9y^6)$$

f) En este caso se trata de un binomio al cuadrado, por consiguiente utilizamos el producto notable II.

$$x^2 - 12x + 36 = x^2 - 2(6x) + 6^2 = (x - 6)^2$$

g) Aquí utilizamos el producto de binomios con un término común (fórmula VI). Por tanto, lo que buscamos son dos números A y B tales que su suma sea 8, $A + B = 8$, y su producto sea 15, $A \cdot B = 15$. Esto no es difícil, si se realiza mediante un poco de ensayo y error o tanteo. De esta manera, vemos que estos números son $A = 5$ y $B = 3$, por lo que:

$$x^2 + 8x + 15 = (x + 5)(x + 3)$$

h) En este caso, primero reducimos el grado mediante la sustitución de $x = w^2$:

$$w^4 - w^2 - 12 = (w^2)^2 - w^2 - 12 = x^2 - x - 12$$

Aquí, la última expresión del lado derecho se factoriza como un producto de binomios con un término común, solo basta encontrar dos números A y B, cuya suma sea -1, $A + B = -1$, y cuyo producto sea -12, $A \cdot B = -12$. Un poco de tanteo nos lleva a determinar que $A = -4$ y $B = 3$, por lo que:

$$x^2 - x - 12 = (x - 4)(x + 3)$$

Pero, al cambiar x por w^2 tenemos:

$$w^4 - w^2 - 12 = (w^2 - 4)(w^2 + 3)$$

Todavía es posible factorizar más, debido a que el factor $w^2 - 4$ es una diferencia de cuadrados: $w^2 - 4 = (w + 2)(w - 2)$. De esta manera, la factorización final es:

$$w^4 - w^2 - 12 = (w + 2)(w - 2)(w^2 + 3).$$

i) En este caso, comenzamos cambiando $x = z^2$:

$$z^4 - 2z^2 + 4 = x^2 - 2x + 4$$

Luego, buscamos dos números A y B tales que $A + B = -2$ y $A \cdot B = 4$. Como podrás observar esto no es sencillo mediante ensayo y error. Cuando esto sucede lo recomendable para polinomios de grado 2 es utilizar la fórmula general: $ax^2 + bx + c = 0$, la cual tiene las raíces: $x = \dfrac{-b \pm \sqrt{b^2 - 4ac}}{2a}$

En nuestro caso, $a = 1$, $b = -2$ y $c = 4$, por lo que las raíces están dadas por $x = \dfrac{-(-2) \pm \sqrt{4 - 4(1)(4)}}{2(1)} = \dfrac{2 \pm \sqrt{-12}}{2}$. Notamos que el número dentro de la raíz cuadrada es negativo. Por tanto, podemos concluir que este polinomio no es factorizable (en los números reales).

j) Aquí, primero factorizamos como una diferencia de cuadrados:

$$A^6 - B^6 = (A^3)^2 - (B^3)^2 = (A^3 - B^3)(A^3 + B^3) \qquad (1)$$

Enseguida, factorizamos cada factor del lado derecho de la igualdad (diferencia y suma de cubos):

$$A^3 - B^3 = (A - B)(A^2 + AB + B^2) \qquad (2)$$

y $$A^3 + B^3 = (A + B)(A^2 - AB + B^2) \qquad (3)$$

Ahora, sustituimos (2) y (3) en (1) y tenemos:

$$A^6 - B^6 = (A - B)(A^2 + AB + B^2)\ (A + B)(A^2 - AB + B^2)$$

En este caso es posible que algunos de estos factores puedan factorizarse más, solo depende de las expresiones de A y B:

k) En este caso, primero escribimos la expresión como una diferencia de potencias de grado 6:

$$z^{12} - 64 = (z^2)^6 - 2^6$$

Enseguida, utilizamos la fórmula encontrada en el inciso anterior:

$$(z^2)^6 - 2^6 = (z^2 - 2)((z^2)^2 + (z^2)2 + 2^2)(z^2 + 2)((z^2)^2 - (z^2)2 + 2^2)$$
$$= (z^2 - 2)(z^4 + 2z^2 + 4)\ (z^2 + 2)\ (z^4 - 2z^2 + 4)$$

Además, la expresión z^2-2 se puede factorizar como una diferencia de cuadrados:

$$z^2 - 2 = z^2 - \left(\sqrt{2}\right)^2 = \left(z - \sqrt{2}\right)\left(z + \sqrt{2}\right)$$

Como sabemos del inciso i, el polinomio z^4-2z^2+4 no es factorizable, por lo que la factorización final es:

$$z^{12} - 64 = \left(z - \sqrt{2}\right)\left(z + \sqrt{2}\right)\left(z^4 + 2z^2 + 4\right)\left(z^2 + 2\right)\left(z^4 - 2z^2 + 4\right)$$

l) Este caso se trata de un trinomio al cuadrado si lo reescribimos como sigue:

$$x^4 + 2x^2y^3 + 2x^2 + y^6 + 2y^3 + 1 = x^4 + y^6 + 1 + 2x^2y^3 + 2x^2 + 2y^3$$
$$= (x^2)^2 + (y^3)^2 + 1^2 + 2(x^2y^3 + x^2(1) + 2y^3(1))$$
$$= (x^2 + y^3 + 1)^2$$

Ejercicios propuestos

En los ejercicios 42 a 56 factoriza la expresión dada.

42. x^3-27

43. x^3+27

44. $4x^2-16$

45. $2x^2-y^4$

46. $w^2z^6-9t^4$

47. $q^{12}-p^3$

48. $x^6z^9+8w^3y^3$

49. $x^2 + 6x + 9$

50. $z^4 - 4z^2 + 4$

51. $t^4 - 1$

52. $x^6 - 1$

53. $w^2 + w - 42$

54. $q^4 + 11q^2 + 18$

55. $y^4 - 8y^2 - 9$

56. $z^8 + 14z^4 + 49$

57. Encuentra una fórmula para factorizar $A^4 - B^4$.

58. Utiliza la fórmula que encontraste en el ejercicio 57 y factoriza: $x^4 - 1$.

59. En el ejemplo 12, inciso j, primero factoriza como una diferencia de cubos y luego como una diferencia de cuadrados. ¿Llegas a la misma expresión que en la solución del ejemplo? Explica tu respuesta.

En los ejercicios 60 a 68 desarrolla el binomio dado.

60. $(2x - 3y^3)^2$

61. $(2x + 3y^3)^2$

62. $(2 + w)^3$

63. $(2z^2 - 3w)^3$

64. $(6zw^3 + 3x^2y)^2$

65. $(6zw^3 + 3x^2y)^3$

66. $\left(\frac{z}{3} - 24q\right)^2$

67. $(x + 1 + y)^2$

68. Comprueba que $(A + B)^2 - (A - B)^2 = 4AB$.

En los ejercicios 69 a 77 simplifica la expresión dada.

69. $(2x + 3y)^2 - (2x - 3y)^2$

70. $(3xy + y^2)^2 - (3xy - y^2)^2$

71. $(A - 7B)^2 - (A + 7B)^2$

72. $(x + y + z)^2 - (x + y - z)^2$

73. $(x^3 - 1)^2 - (x^3 + 1)^2$

74. $(x^n + A)^2 - (x^n - A)^2$

75. $(2 - x)(2 + x)$

76. $(4 + 2z)(4 - 2z)$

77. $(1 - x^3)(1 + x^3)$

78. Comprueba que $(A + B)^2 \neq A^2 + B^2$, y que $(A - B)^2 \neq A^2 - B^2$, dando valores numéricos: $A = 5$ y $B = 2$. Esto es, comprueba que $(5 + 2)^2 \neq 5^2 + 2^2$, y que $(5 - 2)^2 \neq 5^2 - 2^2$.

1.4 Expresiones algebraicas

En esta sección se resumen algunas definiciones importantes que se utilizan a lo largo de todo el texto y se presentan algunos ejemplos de operaciones y divisiones de expresiones algebraicas.

De esta forma, se inicia con algunas definiciones básicas generales.

Un **conjunto** es una colección de objetos de algún tipo; a dichos objetos se les denomina **elementos** del conjunto. Por lo general, se usan las letras x, y y z para denotar **variables**, mientras que para denotar **constantes** se usan las letras a, b, c. A menos que se indique otra cosa, todas las variables y constantes usadas en este libro deben considerarse números reales.

Por su parte, una **expresión algebraica** es el resultado de sumar, restar, multiplicar, dividir, elevar a una potencia u obtener una raíz de una colección de variables y constantes. Cuando las variables de una expresión algebraica se sustituyen por números específicos, el número resultante se llama **valor** de la expresión algebraica para esos números específicos.

El **dominio** de una expresión algebraica corresponde al conjunto de valores que pueden tomar las variables de una expresión dada, que al ser sustituidos en la expresión algebraica, esta está bien definida, sin que el denominador de la expresión algebraica sea igual a 0 (cero) y que sus raíces existan.

A continuación se presenta un par de ejemplos de expresiones algebraicas:

$$x^4 - 7x + \frac{1}{2\sqrt{x}} \quad \text{o} \quad \frac{3yz - \left(\frac{9}{x^2}\right)}{\sqrt[4]{x - 8}}$$

Si x es una variable, un **monomio** en x se define por una expresión de la forma ax^n, donde a es un número real y n es un entero no negativo. En tanto, un **binomio** es la suma de dos monomios y un **trinomio** es la suma de tres monomios. Así que, en general, un **polinomio en x** es la suma de monomios en x; es decir, un polinomio en x, $P(x)$, que en general se puede escribir como:

$$P(x) = a_n x^n + a_{n-1} x^{n-1} + \ldots + a_1 x + a_0$$